



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1983

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Dans cette partie, p est un entier naturel. Les intégrales impropres sont étudiées séparément au voisinage de 0 et de $+\infty$.

1. (a) Existence de I_p

Les croissances comparées donnent $x^{p+2}e^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \geq M$, $x^{p+2}e^{-x} \leq 1$.

Puisque $x^2 > 0$, cette inégalité équivaut à

$$x^p e^{-x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour } x \geq M.$$

La fonction $x \mapsto x^p e^{-x}$ est continue sur $[0, M]$. Son intégrale sur ce segment existe. Sur $[M, +\infty[$, elle est positive et dominée par $1/x^2$, dont l'intégrale impropre converge. Le théorème de comparaison entraîne donc

$$I_p \text{ existe et est fini pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

1. (b) Relation de récurrence et valeur de I_p

Effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $A > 0$: le facteur polynomial est x^{p+1} et une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$. On obtient

$$\int_0^A x^{p+1} e^{-x} dx = [-x^{p+1} e^{-x}]_0^A + (p+1) \int_0^A x^p e^{-x} dx.$$

Le terme en 0 est nul car $p+1 \geq 1$. Le terme $A^{p+1}e^{-A}$ tend vers 0 par croissances comparées. Les deux intégrales impropres existent par la question précédente. Le passage à la limite donne

$$I_{p+1} = (p+1)I_p.$$

Enfin, $I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1$. Par récurrence, $I_p = p!$ pour tout entier naturel p , avec la convention $0! = 1$. Ainsi

$$I_p = p! \quad (p \in \mathbb{N}).$$

2. (a) Existence de J_p pour $p \geq 1$

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, l'intégrande $x^p/(e^x - 1)$ est positive et continue.

Au voisinage de 0, on a $e^x - 1 \sim x$, donc

$$\frac{x^p}{e^x - 1} \sim x^{p-1} \quad (x \rightarrow 0^+).$$

L'intégrale de x^{p-1} converge en 0 puisque $p - 1 \geq 0$. Par comparaison de fonctions positives équivalentes, l'intégrale définissant J_p converge donc en 0.

Au voisinage de $+\infty$, l'écriture

$$\frac{x^p}{e^x - 1} = \frac{x^p e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

montre que l'intégrande est équivalente à $x^p e^{-x}$. L'intégrale de cette dernière fonction converge par 1. (a). L'intégrale définissant J_p converge donc aussi en $+\infty$.

Finalement, J_p existe et est fini pour $p \geq 1$.

Pour situer le cas exclu, lorsque $p = 0$, l'intégrande est équivalente à $1/x$ en 0^+ ; l'intégrale J_0 diverge donc vers $+\infty$.

2. (b) Identité issue d'une somme géométrique finie

Fixons $n \geq 1$ et $x > 0$. Posons $q = e^{-x}$, de sorte que $0 < q < 1$. La formule de la somme géométrique finie donne

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

Après multiplication par x^p , on obtient

$$\frac{x^p}{e^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

La somme étant finie, cette égalité ne nécessite aucune justification d'un échange avec une série infinie.

2. (c) Intégrales avec le paramètre k

Pour $k \geq 1$, faisons le changement de variable affine $t = kx$ dans l'intégrale sur $[0, A]$.

Puisque $dx = dt/k$ et $x^p = t^p/k^p$,

$$\int_0^A x^p e^{-kx} dx = \frac{1}{k^{p+1}} \int_0^{kA} t^p e^{-t} dt.$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, on a $kA \rightarrow +\infty$. L'intégrale de droite tend vers $I_p = p!$. Par conséquent,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx} dx = \frac{p!}{k^{p+1}}.$$

2. (d) Majoration du reste intégral

Méthode 1 — Établir l'inégalité exponentielle par la convexité.

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$: sa dérivée seconde est $e^x > 0$. Sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$. D'où

$$e^x - 1 \geq x \quad (x \geq 0).$$

Méthode 2 — Établir la même inégalité par une étude de fonction.

Posons $g(x) = e^x - 1 - x$ pour $x \geq 0$. On a $g(0) = 0$ et $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$. La fonction g est croissante, donc $g(x) \geq 0$, ce qui donne à nouveau $e^x - 1 \geq x$.

La convexité fournit une inégalité de tangente immédiatement ; l'étude de g permet de retrouver le résultat sans utiliser cette propriété générale.

Appliquons maintenant cette inégalité au reste. Pour $x > 0$, $p \geq 1$ et $n \geq 1$, les dénominateurs sont strictement positifs et

$$0 \leq \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} \leq x^{p-1} e^{-nx}.$$

L'intégrande de gauche est intégrable en 0 : elle est équivalente à x^{p-1} lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour $A > 0$, la comparaison donne donc

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^A x^{p-1} e^{-nx} dx \leq \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-nx} dx.$$

La dernière intégrale vaut $(p-1)!/n^p$ d'après 2. (c), appliquée à l'entier $p-1$ et au paramètre $k = n$. Ainsi

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

2. (e) Approximation de J_p par les sommes partielles

Fixons $p \geq 1$ et $n \geq 1$. Intégrons l'identité de 2. (b) sur $[0, A]$; la somme comporte seulement n termes, donc la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^A \frac{x^p}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^A x^p e^{-kx} dx + R_{p,n}(A),$$

avec $R_{p,n}(A) = \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$

Le reste est positif, croissant en A et majoré par $(p-1)!/n^p$, d'après 2. (d). Il possède donc une limite finie $R_{p,n}$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. Les autres intégrales ont des limites connues par 2. (a) et 2. (c). Le passage à la limite dans la somme finie donne

$$J_p = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + R_{p,n}, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

Comme $(p-1)! \leq (p+1)!$ pour $p \geq 1$, on en déduit exactement l'inégalité demandée :

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leq \frac{(p+1)!}{n^p}.$$

L'énoncé donne une borne plus large que celle obtenue en 2. (d), mais cette borne est correcte. Aucune rectification n'est nécessaire.

3. Série de Riemann et expression de sa somme

La série de terme général $1/n^{p+1}$, pour $n \geq 1$, est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $p+1 > 1$. Comme p est entier naturel, cela équivaut à $p \geq 1$.

Pour $p = 0$, c'est la série harmonique, qui diverge. Pour $p \geq 1$, l'inégalité de 2. (e) montre que

$$p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \rightarrow J_p,$$

puisque $(p+1)!/n^p \rightarrow 0$. Il en résulte

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \frac{J_p}{p!} \quad (p \geq 1).$$

Cette conclusion repose sur un reste explicite, et non sur un échange non justifié entre une somme infinie et une intégrale.

Partie II

Fixons $x > 0$ et posons $\varphi(t) = \frac{1+t}{2\sqrt{t}}$ pour $t > 0$. La récurrence est $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Minoration de u_n à partir du rang 1

La suite est bien définie et strictement positive : $u_0 = x > 0$, et $u_n > 0$ entraîne $u_{n+1} > 0$.

Pour tout $t > 0$, l'identité

$$\varphi(t) - 1 = \frac{1+t-2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2\sqrt{t}} \geq 0$$

donne $\varphi(t) \geq 1$. En appliquant cette inégalité à $t = u_n$, on obtient

$$\boxed{u_n \geq 1 \text{ pour tout } n \geq 1}.$$

Cette propriété ne s'applique pas nécessairement à $u_0 = x$.

2. (a) Monotonie et convergence

Pour $t \geq 1$, on a $1+t \leq 2t$ et $\sqrt{t} \geq 1$. Ainsi

$$\varphi(t) = \frac{1+t}{2\sqrt{t}} \leq \frac{2t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \leq t.$$

D'après la question 1, $u_n \geq 1$ pour $n \geq 1$. La majoration précédente donne alors

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 1. Par le théorème de convergence des suites monotones,

$$\boxed{(u_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers un réel } \ell \geq 1}.$$

Si $x = 1$, tous ses termes valent 1. Si $x \neq 1$, l'identité de la question 1 montre que $u_1 > 1$ et que les termes suivants restent strictement supérieurs à 1 ; la décroissance à partir du rang 1 est alors stricte.

2. (b) Valeur de la limite

Méthode 1 — Exploiter une inégalité au point fixe.

La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$, donc en $\ell \geq 1$. Le passage à la limite dans $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ donne $\ell = \varphi(\ell)$.

Or, pour $t > 1$, la majoration de 2. (a) donne $\varphi(t) \leq \sqrt{t} < t$. Aucun $t > 1$ ne peut donc être un point fixe. Comme $\ell \geq 1$ et $\varphi(1) = 1$, il vient

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

Méthode 2 — Résoudre l'équation du point fixe.

Résolvons explicitement l'équation du point fixe : en posant $y = \sqrt{\ell} \geq 1$, elle devient $2y^3 - y^2 - 1 = 0$, soit $(y - 1)(2y^2 + y + 1) = 0$. Le second facteur est strictement positif pour $y \geq 1$, donc $y = 1$ et $\ell = 1$.

La première méthode exclut les points fixes strictement supérieurs à 1 par une comparaison ; la seconde utilise une factorisation polynomiale réelle.

3. (a) Positivité de v_n pour $n \geq 1$

Question adaptée au programme actuel : rectification d'une erreur d'indice du PDF.

L'énoncé original demandait $v_n > 0$ pour tout entier naturel n . Si $0 < x < 1$, cela est faux pour $n = 0$, puisque $v_0 = x - 1 < 0$. La version rectifiée demande cette propriété pour $n \geq 1$.

Supposons $x \neq 1$. L'identité de la question 1 donne

$$v_1 = u_1 - 1 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2\sqrt{x}} > 0.$$

Si $u_n > 1$, alors $\sqrt{u_n} - 1 \neq 0$, donc

$$v_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_n} - 1)^2}{2\sqrt{u_n}} > 0.$$

Par récurrence, $\boxed{v_n > 0 \quad (n \geq 1)}$. Au rang 0, v_0 est non nul puisque $x \neq 1$, mais son signe dépend de x .

3. (b) Limite du quotient et convergence de la série

Pour $n \geq 1$, les termes v_n sont strictement positifs. L'identité précédente et la factorisation $u_n - 1 = (\sqrt{u_n} - 1)(\sqrt{u_n} + 1)$ donnent

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{u_n} - 1}{2\sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} + 1)}.$$

La simplification est licite puisque $u_n > 1$. Comme $u_n \rightarrow 1$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 4. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0}.$$

Pour conclure sur la série avec les seuls outils autorisés, majorons explicitement ses termes par ceux d'une série géométrique. Il existe un rang $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$0 < v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n.$$

Par récurrence, $0 < v_{N+j} \leq v_N 2^{-j}$ pour tout $j \geq 0$. La série géométrique

$$\sum_{j \geq 0} v_N 2^{-j}$$

converge; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq N} v_n$$

converge.

Les termes avant le rang N sont en nombre fini. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge absolument,}$$

même si $v_0 < 0$ lorsque $x < 1$.

Aucun critère général portant sur les quotients de termes n'est nécessaire : la conclusion découle de la majoration géométrique établie.

3. (c) Convergence du produit P_n

Tous les termes u_k sont strictement positifs, donc $P_n > 0$ et son logarithme est défini. On a

$$\ln P_n = \ln x + \sum_{k=1}^n \ln u_k = \ln x + \sum_{k=1}^n \ln(1 + v_k).$$

Pour $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + t) \leq t$. En effet, la fonction $t - \ln(1 + t)$ s'annule en 0 et sa dérivée $t/(1 + t)$ est positive ou nulle.

Ainsi $0 \leq \ln(1 + v_k) \leq v_k$ pour $k \geq 1$. La série

$$\sum_{k \geq 1} v_k$$

converge par 3. (b), donc la série

$$\sum_{k \geq 1} \ln(1 + v_k)$$

converge par comparaison.

Notons S sa somme, qui est un réel fini. Il vient $\ln P_n \rightarrow \ln x + S$. Par continuité de l'exponentielle,

$$P_n \text{ converge vers une limite finie strictement positive.}$$

Cette preuve n'évalue pas la limite du produit, conformément à la consigne de cette question.

Partie III

Les deux suites sont définies à partir de réels $a, b \geq 0$. La récurrence conserve leur positivité au sens large : les racines carrées sont donc toujours définies.

1. (a) Cas où l'une des données est nulle

Si $a = 0$ et $b \geq 0$, on a $a_0 = 0$ puis $a_{n+1} = \sqrt{0 \cdot b_n} = 0$. Ainsi $a_n = 0$ pour tout n . La seconde récurrence devient $b_{n+1} = b_n/2$, d'où

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{b}{2^n} \quad (n \geq 0).$$

Si $a \geq 0$ et $b = 0$, le rang initial est $a_0 = a, b_0 = 0$. Au rang 1, $a_1 = 0$ et $b_1 = a/2$. À partir de ce rang, la situation est celle du cas précédent. Donc

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{a}{2^n} \quad (n \geq 1).$$

Lorsque $a = b = 0$, les deux suites sont nulles à tous les rangs. Dans tous ces cas, leur limite est 0.

1. (b) Ordre et monotonie des deux suites

Pour tous $s, t \geq 0$, l'identité $(\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 \geq 0$ donne $s + t \geq 2\sqrt{st}$, soit l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt{st} \leq \frac{s+t}{2}.$$

En l'appliquant à $s = a_n$ et $t = b_n$, il vient $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. Ainsi $\boxed{a_n \leq b_n \quad (n \geq 1)}$.

Pour $n \geq 1$, les nombres sont donc ordonnés : $0 \leq a_n \leq b_n$. On a $a_n^2 \leq a_n b_n \leq b_n^2$, d'où

$$a_n \leq a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq b_n.$$

De même, $a_n \leq (a_n + b_n)/2 \leq b_n$, donc $b_{n+1} \leq b_n$. Finalement,

$$\boxed{(a_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante et } (b_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante}}.$$

Ces conclusions portent sur les suites à partir du rang 1 ; l'ordre entre a_0 et b_0 n'est pas imposé.

1. (c) Convergence vers une même limite

Méthode 1 — Passer à la limite dans la récurrence.

Pour $n \geq 1$, $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$. La suite (a_n) est croissante et majorée par b_1 ; la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0. Elles convergent donc vers des réels α et β , avec $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Dans la relation $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, le passage à la limite donne $\beta = (\alpha + \beta)/2$, donc $\alpha = \beta$.

Ainsi $\boxed{a_n \rightarrow \mathcal{L}(a, b), \quad b_n \rightarrow \mathcal{L}(a, b)}.$

Méthode 2 — Majorer directement l'écart.

Posons $d_n = b_n - a_n \geq 0$ pour $n \geq 1$. En utilisant $a_{n+1} \geq a_n$, on obtient

$$0 \leq d_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{d_n}{2}.$$

Par récurrence, $0 \leq d_n \leq d_1/2^{n-1}$, donc $d_n \rightarrow 0$. Les suites sont de sens de variation opposés, ordonnées et leur différence tend vers 0 : elles sont adjacentes et convergent

vers la même limite.

Cette seconde méthode donne aussi une majoration explicite de l'écart entre les deux approximations de $\mathcal{L}(a, b)$.

1. (d) Symétrie, homogénéité et encadrement de $\mathcal{L}$

Symétrie. Les données initiales (a, b) et (b, a) produisent le même couple dès le rang 1 :

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad b_1 = \frac{a+b}{2}.$$

La récurrence donne ensuite les mêmes termes, donc

$$\boxed{\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)}.$$

Homogénéité. Notons $(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ les suites initialisées en $(\lambda a, \lambda b)$, avec $\lambda \geq 0$. Une récurrence montre que $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ et $\tilde{b}_n = \lambda b_n$: c'est vrai au rang 0 et

$$\tilde{a}_{n+1} = \sqrt{\lambda^2 a_n b_n} = \lambda \sqrt{a_n b_n} = \lambda a_{n+1},$$

$$\tilde{b}_{n+1} = \frac{\lambda a_n + \lambda b_n}{2} = \lambda b_{n+1}.$$

L'égalité avec la racine carrée utilise $\lambda \geq 0$ et reste valable pour $\lambda = 0$. En passant à la limite,

$$\boxed{\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)}.$$

Encadrement. La monotonie et l'ordre des suites donnent $a_1 \leq \mathcal{L}(a, b) \leq b_1$. Donc

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{a+b}{2}}.$$

Ces trois propriétés sont valables pour tous $a, b, \lambda \geq 0$, y compris les cas où l'un d'eux est nul.

2. (a) Valeurs particulières, positivité et croissance de F

Valeurs particulières. Le cas $a = 1, b = 0$ de 1. (a) donne $\boxed{F(0) = \mathcal{L}(1, 0) = 0}$. Pour $a = b = 1$, les deux suites restent constamment égales à 1, d'où $\boxed{F(1) = 1}$.

Positivité. Les suites définissant $\mathcal{L}$ sont positives ou nulles ; leur limite l'est également.

Ainsi $F(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Si $x > 0$, l'encadrement de 1. (d) donne même

$$F(x) \geq \sqrt{x} > 0.$$

Croissance. Soient $0 \leq x \leq y$. Notons $(a_n^{(x)}, b_n^{(x)})$ et $(a_n^{(y)}, b_n^{(y)})$ les suites correspondant aux données initiales $(1, x)$ et $(1, y)$.

Au rang 0, $a_0^{(x)} = a_0^{(y)} = 1$ et $b_0^{(x)} \leq b_0^{(y)}$. Si les deux inégalités $a_n^{(x)} \leq a_n^{(y)}$ et $b_n^{(x)} \leq b_n^{(y)}$ sont vraies à un rang n , la positivité des termes entraîne

$$\sqrt{a_n^{(x)} b_n^{(x)}} \leq \sqrt{a_n^{(y)} b_n^{(y)}}, \quad \frac{a_n^{(x)} + b_n^{(x)}}{2} \leq \frac{a_n^{(y)} + b_n^{(y)}}{2}.$$

Les inégalités sont donc vraies au rang suivant, puis à tous les rangs par récurrence. Le passage à la limite donne $F(x) \leq F(y)$.

Ainsi F est positive ou nulle et croissante sur $[0, +\infty[$.

2. (b) Quatre relations pour F

La propriété (7) est l'encadrement de 1. (d), avec $a = 1$ et $b = x$:

$$\boxed{\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2} \quad (x > 0)}.$$

Pour établir (8), utilisons la symétrie puis l'homogénéité, avec $x > 0$:

$$F(x) = \mathcal{L}(1, x) = \mathcal{L}(x, 1) = x \mathcal{L}(1, 1/x).$$

$$\text{Ainsi } \boxed{F(x) = x F(1/x)}.$$

Pour (9) et (10), observons que supprimer le premier couple de termes ne change pas la limite des suites. Les suites initialisées au couple (a_1, b_1) sont exactement les suites initiales décalées d'un rang. Donc

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Pour $a = 1, b = x > 0$, on obtient $F(x) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, (1+x)/2)$. En extrayant le facteur strictement positif $\sqrt{x}$ par homogénéité,

$$\boxed{F(x) = \sqrt{x} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)}.$$

En utilisant d'abord la symétrie puis en extrayant le facteur $(1+x)/2 > 0$, on obtient aussi

$$F(x) = \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

Toutes les divisions sont justifiées par $x > 0$.

3. (a) Dérivabilité de F au point 1

La double inégalité (7), et $F(1) = 1$, donnent pour $x > 0$

$$\sqrt{x} - 1 \leq F(x) - 1 \leq \frac{x-1}{2}.$$

Si $x > 1$, on divise par $x-1 > 0$ et on rationalise le premier quotient :

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Si $0 < x < 1$, la division par $x-1 < 0$ inverse les inégalités :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Dans les deux cas, les bornes tendent vers $1/2$ lorsque $x \rightarrow 1$. Le théorème d'encadrement donne une même limite finie à gauche et à droite pour le taux d'accroissement. Donc

$$F \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } F'(1) = \frac{1}{2}.$$

En particulier, F est continue en 1. Cette continuité sera utilisée dans la question 4.

3. (b) Limite de F en $+\infty$

D'après (7), $F(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$. Puisque $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, la comparaison donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

3. (c) Continuité et absence de dérivée finie en 0

Méthode 1 — Utiliser la croissance et la relation (10).

Comme F est croissante et positive ou nulle, posons $\ell = \inf\{F(t) : t > 0\}$, qui est un réel de $[0, 1]$ puisque $F(1) = 1$.

Vérifions que $F(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la définition de l'infimum donne un $t > 0$ tel que $F(t) < \ell + \varepsilon$. Pour $0 < x < t$, la croissance impose $\ell \leq F(x) \leq F(t) < \ell + \varepsilon$. C'est précisément la limite annoncée.

Pour $x > 0$, posons $q(x) = 2\sqrt{x}/(1+x)$. On a $q(x) > 0$ et $q(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ainsi $F(q(x)) \rightarrow \ell$. Le passage à la limite dans (10), $F(x) = (1+x)F(q(x))/2$, donne

$$\ell = \frac{\ell}{2},$$

donc $\ell = 0$. Puisque $F(0) = 0$, F est continue à droite en 0, ce qui est sa continuité en 0 sur son domaine $[0, +\infty[$.

Méthode 2 — Utiliser les majorants fournis par les itérations.

Notons $a_m(x)$ et $b_m(x)$ les termes au rang m des suites initialisées en $(1, x)$. Pour tout rang fixé m , ces deux fonctions de $x \geq 0$ sont continues : au rang 0, elles valent 1 et x ; la récurrence ne fait intervenir que produit, somme et racine carrée sur des valeurs positives ou nulles, qui conservent la continuité.

Pour $m \geq 1$, on dispose de $0 \leq F(x) \leq b_m(x)$. En $x = 0$, la question 1. (a) donne $b_m(0) = 2^{-m}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $m \geq 1$ tel que $2^{-m} < \varepsilon/2$. Par continuité de b_m en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $0 \leq x < \delta$ entraîne $|b_m(x) - b_m(0)| < \varepsilon/2$. Il vient alors $0 \leq F(x) \leq b_m(x) < \varepsilon$.

Ainsi $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$ en 0^+ . Cette méthode prouve la continuité sans utiliser la relation fonctionnelle ; elle repose sur une approximation par une itération fixée, choisie en fonction de la précision souhaitée.

Dérivabilité. Pour $x > 0$, la relation (7) donne

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le minorant tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = +\infty.}$$

La fonction n'admet pas de dérivée à droite finie en 0 ; elle n'est donc pas dérivable en ce point au sens d'une dérivée réelle finie.

3. (d) Limites des deux quotients en $+\infty$

Par (8), $F(x)/x = F(1/x)$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0^+$. La continuité en 0 établie en 3. (c) donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.}$$

Pour le second quotient, la relation (9) donne

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right).$$

L'argument se réécrit $(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})/2$ et tend vers $+\infty$. D'après 3. (b), $F(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = +\infty.}$$

Les deux conclusions sont compatibles : la croissance de F dépasse celle de $\sqrt{x}$, tout en restant négligeable devant x .

4. Expression de P_n et valeur de sa limite

Reprenons la suite de la partie II pour un $x > 0$. Tous les u_k sont strictement positifs. Appliquons (9) à l'argument u_k ; la récurrence (1) donne

$$F(u_k) = \sqrt{u_k} F\left(\frac{1+u_k}{2\sqrt{u_k}}\right) = \sqrt{u_k} F(u_{k+1}).$$

En substituant successivement cette identité pour $k = 0, 1, \dots, n$, on obtient

$$F(x) = \sqrt{u_0} \sqrt{u_1} \cdots \sqrt{u_n} F(u_{n+1}) = \sqrt{P_n} F(u_{n+1}).$$

D'après (7), $F(u_{n+1}) \geq \sqrt{u_{n+1}} > 0$. La division par cette quantité est donc licite. En élevant au carré,

$$P_n = \left(\frac{F(x)}{F(u_{n+1})} \right)^2.$$

La partie II a établi $u_{n+1} \rightarrow 1$. D'après 3. (a), F est continue en 1, donc

$F(u_{n+1}) \rightarrow F(1) = 1$. Il s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = F(x)^2.$$

Cette démonstration vaut également pour $x = 1$: la suite u_n et le produit P_n valent alors constamment 1, et $F(1)^2 = 1$. La restriction $x \neq 1$ de la partie II, question 3, n'est donc plus nécessaire ici.

Relevé des adaptations

Partie II, question 3. (a) : « pour tout entier naturel n » est remplacé par « pour tout entier $n \geq 1$ ». La demande originale est fautive au rang 0 lorsque $0 < x < 1$, puisque $v_0 = x - 1 < 0$. La rectification conserve toutes les données initiales et ne change pas les conclusions de convergence, qui dépendent de la suite à partir du rang 1.

Aucune autre question n'a été modifiée. En partie I, question 2. (d), les paramètres $n \geq 1$ et $A > 0$ sont explicités pour préciser le domaine de l'inégalité.