



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1982

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

On utilise $F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$, pour $x \geq 0$.

1. a. Pour $x \geq 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x \sin t}$ est continue sur le segment $[0; \pi/2]$, comme composée de fonctions continues. Son intégrale est donc finie. Ainsi $F(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. b. Pour $0 \leq x_1 \leq x_2$ et $t \in [0; \pi/2]$, on a $\sin t \geq 0$, donc $-x_2 \sin t \leq -x_1 \sin t$. La croissance de l'exponentielle entraîne $e^{-x_2 \sin t} \leq e^{-x_1 \sin t}$; par croissance de l'intégrale, $F(x_2) \leq F(x_1)$. Ainsi F est décroissante.

Pour tout $x \geq 0$, $0 < e^{-x \sin t} \leq 1$ sur le segment, d'où

$$0 < F(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{4}.$$

Cette inégalité implique la borne demandée, et $F(0) = \pi/4$. Si $x_2 > x_1$, l'inégalité des intégrandes est stricte pour $t \in]0; \pi/2]$; par continuité, leur différence a une intégrale strictement positive. La fonction F est même strictement décroissante.

2. a. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde vaut $-\sin t \leq 0$ sur $[0; \pi/2]$. Elle est donc concave sur ce segment. Une fonction concave est au-dessus de chacune de ses cordes.

Plus précisément, pour $t \in [0; \pi/2]$, posons $\theta = 2t/\pi \in [0; 1]$. L'inégalité de concavité appliquée aux extrémités donne

$$\sin t = \sin \left((1-\theta)0 + \theta \frac{\pi}{2} \right) \geq (1-\theta) \sin 0 + \theta \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2t}{\pi}.$$

2. b. Pour $x > 0$, la question précédente donne $-x \sin t \leq -2xt/\pi$, donc

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2xt/\pi} dt.$$

L'intégration d'une exponentielle donne

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2xt/\pi} dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\pi}{2x} e^{-2xt/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4x} (1 - e^{-x}).$$

Comme $0 \leq 1 - e^{-x} \leq 1$, on obtient $0 \leq F(x) \leq \pi/(4x)$. Le dernier membre tend vers 0, d'où $F(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3. a. Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis.

La fonction $v(u) = e^{-u}$ est continue et dérivable sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée vérifie $|v'(u)| = e^{-u} \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis sur le segment d'extrémités $a, b \geq 0$ donne $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$. Si $a = b$, les deux membres sont nuls.

Méthode 2 — Intégrer la dérivée.

Si $a \geq b \geq 0$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$e^{-b} - e^{-a} = \int_b^a e^{-u} du. \text{ Sur ce segment, } 0 \leq e^{-u} \leq 1, \text{ donc}$$

$$|e^{-a} - e^{-b}| = \int_b^a e^{-u} du \leq \int_b^a 1 du = a - b.$$

Si $a < b$, on échange les deux valeurs et l'on obtient la même conclusion. La première méthode utilise une borne de pente ; la seconde exprime la différence comme une aire majorée.

3. b. Les deux intégrales qui définissent $F(x_1)$ et $F(x_2)$ existent par 1.a. Par linéarité puis inégalité triangulaire,

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |e^{-x_1 \sin t} - e^{-x_2 \sin t}| dt.$$

Pour chaque t , on applique 3.a aux réels positifs ou nuls $a = x_1 \sin t$ et $b = x_2 \sin t$. Cela donne

$$|e^{-x_1 \sin t} - e^{-x_2 \sin t}| \leq |x_1 - x_2| \sin t.$$

Donc

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2} \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|,$$

car $\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$. Pour $x_2 \rightarrow x_1$ dans $\mathbb{R}_+$, cette majoration tend vers 0; F est continue sur $\mathbb{R}_+$, y compris à droite en 0.

4. a. Pour $x_0 \geq 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x_0 \sin t} \sin t$ est continue sur $[0; \pi/2]$. Son intégrale existe donc, ce qui définit bien le réel

$$H(x_0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x_0 \sin t} \sin t \, dt.$$

4. b. Question adaptée au programme actuel : la dérivée à l'extrémité 0 est précisée comme une dérivée à droite.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange d'ordre un à la fonction $v(u) = e^{-u}$ entre b et a , deux réels positifs ou nuls. Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle contenant ce segment et sa dérivée seconde vaut $v''(u) = e^{-u}$, de valeur absolue au plus 1 sur le segment. Ainsi

$$|v(a) - v(b) - (a - b)v'(b)| \leq \frac{|a - b|^2}{2}.$$

Comme $v'(b) = -e^{-b}$, on obtient précisément

$$|e^{-a} - e^{-b} + (a - b)e^{-b}| \leq \frac{|a - b|^2}{2}.$$

Fixons maintenant $x, x_0 \geq 0$ et posons $d = x - x_0$. Pour chaque $t \in [0; \pi/2]$, on applique l'inégalité à $a = x \sin t$ et $b = x_0 \sin t$, ce qui donne

$$|e^{-x \sin t} - e^{-x_0 \sin t} + d \sin t e^{-x_0 \sin t}| \leq \frac{d^2}{2} \sin^2 t.$$

Par linéarité des intégrales et par la définition de H ,

$$F(x) - F(x_0) - dH(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-x \sin t} - e^{-x_0 \sin t} + d \sin t e^{-x_0 \sin t}) dt.$$

En intégrant la majoration et en utilisant $\sin^2 t \leq 1$,

$$|F(x) - F(x_0) - dH(x_0)| \leq \frac{d^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \leq \frac{\pi}{8} d^2.$$

Si $x \neq x_0$, alors $|d| > 0$ et la division par $|d|$ donne l'inégalité demandée :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0) \right| \leq \frac{\pi}{8} |x - x_0|.$$

Lorsque $x \rightarrow x_0$ dans $\mathbb{R}_+$, le membre de droite tend vers 0. Le taux d'accroissement tend donc vers $H(x_0)$. Ainsi F est dérivable pour $x_0 > 0$, dérivable à droite en 0, et

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt \quad (x \geq 0).$$

En particulier, $F'(0) = -1/2$. La démonstration utilise une estimation du reste intégrée sur un segment; elle ne suppose aucun théorème de dérivation sous l'intégrale.

5. Pour $\alpha \geq 0$, la suite $u_0 = \alpha$, $u_{n+1} = F(u_n)$ est bien définie : 1.b assure que F envoie $\mathbb{R}_+$ dans $[0; \pi/4]$. Par récurrence, $u_n \geq 0$ pour tout n , et $u_n \leq \pi/4$ dès que $n \geq 1$.

5. a. Rectification locale : le PDF écrit $|u_{k+1} - u_n|$ avec un indice n non quantifié.

L'expression correcte, nécessaire à la question suivante, est $|u_{k+1} - u_k|$.

Posons $m = 1/2 \in [0; 1[$ et $D = |u_1 - u_0| \geq 0$. Pour $k \geq 1$, 3.b donne

$$|u_{k+1} - u_k| = |F(u_k) - F(u_{k-1})| \leq m |u_k - u_{k-1}|.$$

Au rang $k = 0$, la majoration $|u_1 - u_0| \leq m^0 D$ est une égalité. Une récurrence donne donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{k+1} - u_k| \leq m^k D.$$

5. b. Question adaptée au programme actuel : la demande utilisant les suites de Cauchy est remplacée par une preuve de convergence au moyen d'une série absolument convergente.

Pour $p > q$, l'identité télescopique et l'inégalité triangulaire donnent

$$|u_p - u_q| = \left| \sum_{k=q}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) \right| \leq \sum_{k=q}^{p-1} |u_{k+1} - u_k| \leq D \sum_{k=q}^{p-1} m^k.$$

Comme $0 < m < 1$, la somme géométrique vaut $m^q(1 - m^{p-q})/(1 - m)$ et est au plus $m^q/(1 - m)$. Ainsi

$$|u_p - u_q| \leq \frac{m^q}{1 - m} |u_1 - u_0|.$$

La question 5.a donne également $|u_{k+1} - u_k| \leq Dm^k$. La série géométrique

$$\sum_{k \geq 0} Dm^k$$

converge, donc la série

$$\sum_{k \geq 0} (u_{k+1} - u_k)$$

converge absolument, par comparaison des valeurs absolues.

Pour $n \geq 1$,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Les sommes partielles convergent ; la suite converge donc vers un réel $\ell(\alpha)$. Puisque $u_n \in [0; \pi/4]$ pour $n \geq 1$, le passage à la limite dans cet encadrement donne $\ell(\alpha) \in [0; \pi/4]$.

La continuité de F , démontrée en 3.b, permet de passer à la limite dans $u_{n+1} = F(u_n)$. Les deux suites décalées ont la même limite, d'où

$$F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha).$$

En faisant ensuite tendre p vers l'infini dans la majoration déjà obtenue, on a aussi $|\ell(\alpha) - u_q| \leq m^q D / (1 - m)$ pour tout $q \geq 0$.

5. c. Méthode 1 — Unicité à partir de la majoration de 3.b.

L'existence d'un point fixe est déjà assurée par 5.b, en prenant par exemple $\alpha = 0$. Si $r, s \geq 0$ vérifient $F(r) = r$ et $F(s) = s$, alors

$$|r - s| = |F(r) - F(s)| \leq \frac{1}{2} |r - s|.$$

Cette inégalité impose $|r - s| = 0$, donc $r = s$. Le point fixe est unique ; notons-le r . Toutes les limites $\ell(\alpha)$ de la question précédente sont des points fixes, donc toutes sont égales à r . Chaque suite converge ainsi vers la même limite, indépendante de α .

Méthode 2 — Étudier la fonction $F(x) - x$.

La fonction $G(x) = F(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement décroissante : si $x_2 > x_1$, alors

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2) - F(x_1) - (x_2 - x_1) < 0,$$

car $F(x_2) \leq F(x_1)$. De plus, $G(0) = \pi/4 > 0$. La stricte décroissance de F , établie en 1.b, donne $F(\pi/4) < F(0) = \pi/4$, donc $G(\pi/4) < 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit un zéro $r \in]0; \pi/4[$, et la stricte décroissance donne son unicité sur $\mathbb{R}_+$. La question 5.b assure que toutes les suites convergent vers un point fixe ; elles convergent donc toutes vers r .

La première méthode utilise une borne quantitative des écarts ; la seconde localise la limite grâce aux signes et aux variations. Aucune des deux n'invoque un théorème général du point fixe.

PROBLÈME 2

Rectification du préambule : l'égalité de division euclidienne du PDF omet le reste. Elle est rétablie sous la forme $F_\alpha P = (X^3 - X)Q + R$, avec $R = 0$ ou $\deg R < 3$, conformément à la définition de φ_α .

On pose $S = X + X^2$. La base canonique de E est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

1. a. Le polynôme $F_\alpha = \alpha + X + X^2$ est déjà de degré inférieur à 3, donc son reste est lui-même :

$$\varphi_\alpha(1) = \alpha + X + X^2.$$

Pour le produit avec X , on écrit la division sous une forme explicite :

$$F_\alpha X = \alpha X + X^2 + X^3 = (X^3 - X) + (\alpha + 1)X + X^2.$$

Le dernier polynôme a degré inférieur à 3, donc $\varphi_\alpha(X) = (\alpha + 1)X + X^2$.

Enfin,

$$F_\alpha X^2 = \alpha X^2 + X^3 + X^4 = (X + 1)(X^3 - X) + X + (\alpha + 1)X^2.$$

Le dernier terme est le reste, d'où $\varphi_\alpha(X^2) = X + (\alpha + 1)X^2$.

1. b. Soient $P_1, P_2 \in E$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Écrivons leurs divisions : $F_\alpha P_j = (X^3 - X)Q_j + R_j$, avec $R_j \in E$. La linéarité de la multiplication polynomiale donne

$$F_\alpha(c_1 P_1 + c_2 P_2) = (X^3 - X)(c_1 Q_1 + c_2 Q_2) + (c_1 R_1 + c_2 R_2).$$

Le dernier polynôme appartient à E , donc il est nul ou de degré inférieur à 3. Par unicité du reste de la division euclidienne,

$$\varphi_\alpha(c_1 P_1 + c_2 P_2) = c_1 \varphi_\alpha(P_1) + c_2 \varphi_\alpha(P_2).$$

Ainsi φ_α est un endomorphisme de E .

1. c. Pour $P \in E$, partons de $F_\alpha P = (X^3 - X)Q + \varphi_\alpha(P)$. Comme $F_{\alpha-\lambda} = F_\alpha - \lambda$, on a

$$F_{\alpha-\lambda}P = (X^3 - X)Q + (\varphi_\alpha(P) - \lambda P).$$

Le dernier polynôme appartient à E , donc c'est le reste. Ainsi $\varphi_{\alpha-\lambda}(P) = \varphi_\alpha(P) - \lambda P$ pour tout P , soit

$$\varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha-\lambda}.$$

En particulier, avec $\lambda = \alpha$, on obtient $\varphi_\alpha = \alpha I_E + \varphi_0$.

2. Les colonnes de M_α sont les coordonnées des trois images calculées en 1.a dans la base $\mathcal{B}$. Donc

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$,

$$\varphi_\alpha(P) = \alpha c_0 + (c_0 + (\alpha + 1)c_1 + c_2)X + (c_0 + c_1 + (\alpha + 1)c_2)X^2.$$

3. a. Question adaptée au programme actuel : le calcul de déterminant est remplacé par la résolution d'un système, en conservant la discussion de la bijectivité.

Pour un polynôme cible $R = r_0 + r_1X + r_2X^2$, l'équation $\varphi_\alpha(P) = R$, avec $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$, équivaut au système

$$\alpha c_0 = r_0, \quad c_0 + (\alpha + 1)c_1 + c_2 = r_1, \quad c_0 + c_1 + (\alpha + 1)c_2 = r_2.$$

En additionnant puis en soustrayant les deux dernières équations, on obtient le système

équivalent

$$\alpha c_0 = r_0, \quad (\alpha + 2)(c_1 + c_2) = r_1 + r_2 - 2c_0, \quad \alpha(c_1 - c_2) = r_1 - r_2.$$

L'équivalence est justifiée car les deux équations initiales se retrouvent en additionnant et soustrayant les équations transformées, puis en divisant par 2.

Si $\alpha \notin \{0, -2\}$, on peut diviser par α et $\alpha + 2$. Le système possède alors, pour toute cible R , une unique solution :

$$c_0 = \frac{r_0}{\alpha}, \quad c_1 + c_2 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_0/\alpha}{\alpha + 2}, \quad c_1 - c_2 = \frac{r_1 - r_2}{\alpha}.$$

Les deux dernières valeurs déterminent uniquement c_1 et c_2 . L'application est donc bijective.

Si $\alpha = 0$, la question 1.a donne $\varphi_0(1 - X) = 0$, alors que $1 - X \neq 0$; elle n'est pas injective. Si $\alpha = -2$, on a $\varphi_{-2}(X + X^2) = (-X + X^2) + (X - X^2) = 0$, avec $X + X^2 \neq 0$; elle n'est pas injective non plus.

Ainsi φ_α et M_α sont inversibles si et seulement si $\alpha \notin \{0, -2\}$.

3. b. On suppose désormais $\alpha \notin \{0, -2\}$.

Méthode 1 — Extraire l'inverse du système résolu.

En additionnant et soustrayant les expressions de $c_1 + c_2$ et $c_1 - c_2$ de 3.a, on obtient

$$c_1 = \frac{-r_0 + (\alpha + 1)r_1 - r_2}{\alpha(\alpha + 2)}, \quad c_2 = \frac{-r_0 - r_1 + (\alpha + 1)r_2}{\alpha(\alpha + 2)}.$$

Comme $c_0 = r_0/\alpha$, ces trois expressions donnent les lignes de la matrice inverse :

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha+2 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Utiliser une relation particulière de φ_0 .

Notons $\psi = \varphi_0$. La formule de la question 2 donne, pour tout $P \in E$,

$$\psi(P) = P(1)S, \quad S = X + X^2.$$

Puisque $S(1) = 2$, on a $\psi^2(P) = P(1)\psi(S) = 2P(1)S = 2\psi(P)$; donc $\psi^2 = 2\psi$. De plus, $\varphi_\alpha = \alpha I_E + \psi$ par 1.c.

Posons $u = I_E/\alpha - \psi/(\alpha(\alpha+2))$. En développant la composition et en utilisant $\psi^2 = 2\psi$,

$$\varphi_\alpha \circ u = I_E + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{2}{\alpha(\alpha+2)} \right) \psi = I_E.$$

Le coefficient de ψ est nul, puisque son numérateur vaut $(\alpha+2) - \alpha - 2 = 0$. Les deux endomorphismes sont des combinaisons de I_E et ψ , donc commutent; la composition dans l'autre ordre vaut aussi I_E . Ainsi

$$\varphi_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} I_E - \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} \varphi_0.$$

Sa matrice est la formule déjà obtenue. La première méthode réutilise la résolution d'une équation; la seconde calcule l'inverse à partir d'une relation polynomiale démontrée explicitement.

4. a. La formule $\varphi_0(P) = P(1)S$ et le fait que $S \neq 0$ donnent

$$\varphi_0(P) = 0 \iff P(1) = 0.$$

Le noyau est donc exactement l'ensemble des polynômes de E ayant 1 pour racine, avec le polynôme nul inclus. Explicitement,

$$\text{Ker } \varphi_0 = \{c_0 + c_1X + c_2X^2 : c_0 + c_1 + c_2 = 0\} = \text{Vect}(1 - X, X - X^2).$$

En effet, si la somme des coefficients est nulle, $P = c_0(1 - X) - c_2(X - X^2)$; les deux polynômes proposés sont indépendants par comparaison de leurs coefficients.

Toutes les images sont des multiples de S . Réciproquement, $\varphi_0(1) = S$, donc tout multiple de S est atteint. Ainsi $\text{Im } \varphi_0 = \text{Vect}(X + X^2)$.

4. b. La question 1.c donne $\varphi_{-2} = \varphi_0 - 2I_E$. Si $P \in \text{Ker } \varphi_{-2}$, on a $2P = \varphi_0(P) = P(1)S$, donc P est un multiple de S . Réciproquement, $\varphi_0(S) = 2S$, donc $\varphi_{-2}(S) = 0$. Par linéarité,

$$\text{Ker } \varphi_{-2} = \text{Vect}(S) = \text{Im } \varphi_0.$$

Pour tout $P \in E$, $\varphi_{-2}(P) = P(1)S - 2P$. Son évaluation en 1 vaut $2P(1) - 2P(1) = 0$, donc $\text{Im } \varphi_{-2} \subset \text{Ker } \varphi_0$.

Réciproquement, si $Q \in \text{Ker } \varphi_0$, alors $Q(1) = 0$ et

$$\varphi_{-2}(-Q/2) = \varphi_0(-Q/2) - 2(-Q/2) = Q.$$

Tout élément du noyau est donc une image. Ainsi $\text{Im } \varphi_{-2} = \text{Ker } \varphi_0$.

5. a. On recherche les valeurs propres par le système $M_\alpha C = \lambda C$, où $C = {}^t(c_0, c_1, c_2) \neq 0$. Les équations sont

$$(\alpha - \lambda)c_0 = 0, \quad c_0 + (\alpha + 1 - \lambda)c_1 + c_2 = 0, \quad c_0 + c_1 + (\alpha + 1 - \lambda)c_2 = 0.$$

Si $\lambda \neq \alpha$, la première équation impose $c_0 = 0$. La différence des deux dernières donne $(\alpha - \lambda)(c_1 - c_2) = 0$, donc $c_1 = c_2$. Leur somme donne $(\alpha + 2 - \lambda)(c_1 + c_2) = 0$. Puisque $C \neq 0$, on a $c_1 = c_2 \neq 0$, ce qui impose $\lambda = \alpha + 2$.

Si $\lambda = \alpha$, les deux dernières équations se réduisent à $c_0 + c_1 + c_2 = 0$, qui admet des solutions non nulles. Ainsi α est effectivement valeur propre. La valeur $\alpha + 2$ l'est aussi, avec le vecteur de coordonnées ${}^t(0, 1, 1)$.

Les valeurs propres réelles sont donc exactement α et $\alpha + 2$, distinctes pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. b. Suivons l'indication : par 1.c, $\varphi_\alpha - \alpha I_E = \varphi_0$ et $\varphi_\alpha - (\alpha + 2)I_E = \varphi_{-2}$. Par la question 4,

$$E_{\varphi_\alpha}(\alpha) = \text{Ker } \varphi_0 = \text{Vect}(1 - X, X - X^2),$$

$$E_{\varphi_\alpha}(\alpha + 2) = \text{Ker } \varphi_{-2} = \text{Vect}(X + X^2).$$

Les deux dimensions sont respectivement 2 et 1. Leur intersection est nulle : si cS appartient aussi à $\text{Ker } \varphi_0$, son évaluation en 1 vaut $2c = 0$, donc $c = 0$.

La somme est directe et de dimension $3 = \dim E$. En réunissant les bases indiquées, on obtient une base de E formée de vecteurs propres. L'endomorphisme φ_α est donc diagonalisable pour tout α réel, y compris 0 et -2 , où il n'est pas bijectif.

5. c. Dans cet ordre, choisissons la base propre $(1 - X, X - X^2, X + X^2)$. Les coordonnées de ces polynômes dans $\mathcal{B}$ donnent

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois colonnes sont indépendantes : dans une combinaison nulle, le coefficient constant impose le premier scalaire nul ; les coefficients de X et X^2 imposent ensuite la somme et la différence des deux autres scalaires nulles, donc ces scalaires sont nuls.

On peut expliciter l'inverse par résolution de coordonnées. Pour $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$, si $P = d_1(1 - X) + d_2(X - X^2) + d_3(X + X^2)$, alors

$$d_1 = c_0, \quad d_2 = \frac{c_0 + c_1 - c_2}{2}, \quad d_3 = \frac{c_0 + c_1 + c_2}{2}.$$

Ainsi

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les images des colonnes de T sont leurs produits par α , α et $\alpha + 2$. On a donc $M_\alpha T = T \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \alpha + 2)$ et, puisque T est inversible,

$$M_\alpha = T \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \alpha + 2) T^{-1}.$$

6. a. On note de nouveau $\psi = \varphi_0$. Par 1.c, $\varphi_\alpha = \alpha I_E + \psi$ et $\varphi_\beta = \beta I_E + \psi$. En composant,

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \alpha \beta I_E + (\alpha + \beta) \psi + \psi^2.$$

L'expression est symétrique en α et β , donc $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$ pour tous les réels α, β .

6. b. Méthode 1 — Calcul de la composition.

On a démontré en 3.b que $\psi^2 = 2\psi$. Donc

$$\varphi_{-2} \circ \varphi_0 = (\psi - 2I_E) \circ \psi = \psi^2 - 2\psi = 0.$$

Méthode 2 — Utiliser l'image et le noyau.

La question 4.b donne $\operatorname{Im} \varphi_0 = \operatorname{Ker} \varphi_{-2}$. Pour tout $P \in E$, le vecteur $\varphi_0(P)$ appartient donc au noyau de φ_{-2} , ce qui entraîne $\varphi_{-2}(\varphi_0(P)) = 0$. La composition est l'endomorphisme nul.

La première méthode calcule avec une relation quadratique; la seconde explique la nullité sans calcul, par l'inclusion de l'image dans le noyau.

6. c. Pour $k = 0$, $M_\alpha^0 = I_3$ et $(\varphi_\alpha)^0 = I_E$. Ce cas est traité séparément afin de ne pas introduire une expression ambiguë telle que 0^0 lorsque $\alpha = 0$ ou -2 .

Pour $k \geq 1$, la diagonalisation de 5.c donne

$$M_\alpha^k = T \operatorname{diag}(\alpha^k, \alpha^k, (\alpha + 2)^k) T^{-1}.$$

Posons $a_k = \alpha^k$, $b_k = (\alpha + 2)^k$ et $\delta_k = b_k - a_k$. Le produit avec les matrices T, T^{-1} calculées donne

$$M_\alpha^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ \frac{\delta_k}{2} & \frac{a_k + b_k}{2} & \frac{\delta_k}{2} \\ \frac{\delta_k}{2} & \frac{\delta_k}{2} & \frac{a_k + b_k}{2} \end{pmatrix} = a_k I_3 + \frac{\delta_k}{2} M_0.$$

Par exemple, pour $k = 1$, $\delta_1 = 2$ et la formule redonne M_α . Pour $\alpha = 0$ ou -2 , les puissances scalaires d'exposant positif sont bien définies et la même formule reste valable.

En revenant aux endomorphismes,

$$(\varphi_\alpha)^k = \alpha^k I_E + \frac{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_0.$$

Avant de définir γ , vérifions que le dénominateur ne s'annule pas sous l'hypothèse $\alpha \neq -1$. Si k est impair, la fonction réelle $x \mapsto x^k$ est strictement croissante, donc $(\alpha + 2)^k \neq \alpha^k$. Si k est pair, l'égalité serait équivalente à $|\alpha + 2| = |\alpha|$, car $x \mapsto x^k$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. En élevant au carré, elle donnerait $(\alpha + 2)^2 = \alpha^2$, soit $4(\alpha + 1) = 0$. Ainsi, pour $\alpha \neq -1$ et $k \geq 1$, $\delta_k \neq 0$.

On peut alors factoriser et utiliser $\varphi_\gamma = \gamma I_E + \varphi_0$:

$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{\delta_k}{2} \left(\frac{2\alpha^k}{\delta_k} I_E + \varphi_0 \right) = \frac{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma,$$

$$\gamma = \frac{2\alpha^k}{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}.$$

Enfin, pour $\alpha = -1$, les valeurs propres sont -1 et 1 . Dans la formule des puissances, si

k est pair et positif, $a_k = b_k = 1$, donc $(\varphi_{-1})^k = I_E$. Si k est impair, $a_k = -1$ et $b_k = 1$, donc $(\varphi_{-1})^k = -I_E + \varphi_0 = \varphi_{-1}$. Le cas $k = 0$ a déjà été traité. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(\varphi_{-1})^k = \begin{cases} I_E & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \varphi_{-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut contrôler cette alternance directement : $(\varphi_0 - I_E)^2 = \varphi_0^2 - 2\varphi_0 + I_E = I_E$, grâce à $\varphi_0^2 = 2\varphi_0$.

Relevé des adaptations

- Problème 1, 4.b : précision de la dérivée à droite en 0, extrémité du domaine ; utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange autorisée pour justifier le passage du taux d'accroissement à sa limite.
- Problème 1, 5.a : rectification de u_n en u_k dans la différence $|u_{k+1} - u_k|$, afin de corriger l'indice non quantifié et de préserver la déduction de 5.b.
- Problème 1, 5.b : remplacement de la demande portant sur les suites de Cauchy par une preuve de convergence via une série absolument convergente, conforme au référentiel. L'estimation et l'équation de point fixe sont conservées.
- Problème 2, préambule : rétablissement du terme $+R$ manquant dans l'identité de division euclidienne, nécessaire à la définition du reste.
- Problème 2, 3.a : suppression du calcul de déterminant et remplacement par une discussion du système linéaire associé ; le même objectif de bijectivité en fonction de α est conservé.