



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1981

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. a. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, +\infty[$. Sa valeur en 0 est 0, sa dérivée en 0 vaut 1 et sa dérivée seconde en 0 vaut -1 . La formule de Taylor-Young donne :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0).$$

Pour $t \neq 0$, posons $h(t) = \ln(f(t))$. Comme $1+t > 0$, la puissance définissant f est bien définie et $f(t) > 0$. Ainsi :

$$h(t) = -1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t).$$

En substituant le développement précédent et en ne faisant que des produits et des sommes :

$$h(t) = -1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = o(t).$$

En effet, les termes constants donnent $-1 + 1 = 0$ et les termes d'ordre 1 sont $-\frac{t}{2} + \frac{t}{2} = 0$; le terme restant $-\frac{t^2}{4}$ est négligeable devant t , de même que $\frac{o(t^2)}{t}$ et $\frac{1}{2}o(t^2)$.

Pour passer de h à f , on applique le théorème des accroissements finis à l'exponentielle entre 0 et $h(t)$. Il donne la majoration :

$$|f(t) - 1| = |e^{h(t)} - 1| \leq e^{|h(t)|} |h(t)|.$$

Comme $h(t) = o(t)$, on a $h(t) \rightarrow 0$ et $|h(t)|/|t| \rightarrow 0$. Donc $|f(t) - 1|/|t| \rightarrow 0$. Le développement limité d'ordre 1 est :

$$f(t) = 1 + 0 \cdot t + o(t).$$

Ce passage utilise une majoration par les accroissements finis, sans composition de développements limités.

1. b. Le développement précédent implique $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$; la fonction est donc continue en 0.

Pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Le taux d'accroissement a une limite; f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. a. Pour $t \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, la fonction $h(t) = -1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t)$ est dérivable, et $f = e^h$. Par dérivation :

$$h'(t) = -\frac{\ln(1+t)}{t^2} + \frac{\frac{1}{t} + \frac{1}{2}}{1+t} = \frac{1}{t^2} \left(-\ln(1+t) + \frac{t + t^2/2}{1+t} \right).$$

Or :

$$\frac{t + t^2/2}{1+t} = \frac{(1+t)^2 - 1}{2(1+t)} = \frac{1}{2} \left(1+t - \frac{1}{1+t} \right).$$

Le terme entre parenthèses est donc $\varphi(t)$. La dérivation de $f = e^h$ donne :

$$f'(t) = h'(t)f(t) = \frac{1}{t^2} \varphi(t)f(t).$$

2. b. Sur $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$, la formule de la question 2.a est un produit de fonctions continues ; f' y est donc continue.

Pour étudier le raccord en 0, on utilise les développements limités :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2), \quad \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Le premier résultat de Taylor-Young appliqué à la fonction $t \mapsto (1+t)^{-1}$, de classe $\mathcal{C}^2$ près de 0. En les substituant dans la définition de φ :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(2t - t^2 + o(t^2)) - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = o(t^2).$$

Ainsi $\varphi(t)/t^2 \rightarrow 0$. Comme $f(t) \rightarrow 1$, la formule 2.a donne $f'(t) \rightarrow 0 = f'(0)$. La dérivée est donc continue aussi en 0, et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.

2. c. La fonction φ est dérivable sur $] -1, +\infty[$. On calcule :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)^2 + 1 - 2(1+t)}{2(1+t)^2} = \frac{t^2}{2(1+t)^2}.$$

Cette dérivée est positive pour $t \neq 0$ et nulle pour $t = 0$. La fonction est strictement croissante sur $] -1, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit :

$$\varphi(t) < 0 \text{ si } -1 < t < 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) > 0 \text{ si } t > 0.$$

2. d. Pour $t \neq 0$, $f(t) > 0$ et $t^2 > 0$, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $\varphi(t)$. D'après 2.c, f est strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La continuité en 0 permet d'y inclure la valeur $f(0) = 1$.

Ainsi, f atteint son minimum global en 0 et :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \quad f(t) \geq 1.$$

L'égalité a lieu uniquement pour $t = 0$.

3. a. Pour $x > 0$, tous les termes $u_n(x)$ sont strictement positifs, donc le quotient est défini. On simplifie les factorielles et les puissances :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{((n+1)x)^{n+1} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(nx)^n \sqrt{n}} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}.$$

Donc :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

Par définition, $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$. On obtient ainsi :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = ex f\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. b. Si $x = 0$, chaque terme est nul puisque $n \geq 1$. La série converge et sa somme vaut 0.

Supposons $x > 0$. La continuité de f en 0 donne $f(1/n) \rightarrow 1$, donc $u_{n+1}(x)/u_n(x) \rightarrow ex$. On établit directement les conséquences pour cette série, par comparaison géométrique.

Si $0 < x < 1/e$, choisissons un réel q tel que $ex < q < 1$. Par la convergence du quotient, il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x) \leq q u_n(x)$. Une récurrence donne alors :

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_N(x) q^{n-N}.$$

La série géométrique de droite converge, car $0 < q < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de $u_n(x)$ converge. Cette preuve fournit la majoration particulière nécessaire sans invoquer un critère général sur les quotients.

Si $x \geq 1/e$, le résultat 2.d et la formule 3.a donnent, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = exf(1/n) \geq ex \geq 1.$$

La suite des termes est donc croissante, et $u_n(x) \geq u_1(x) = x > 0$. Elle ne tend pas vers 0. Plus précisément, la somme de ses n premiers termes est au moins nx , donc tend vers $+\infty$. La série diverge vers $+\infty$, y compris au seuil $x = 1/e$.

En conclusion, la série converge exactement pour $0 \leq x < 1/e$.

3. c. On identifie $v_n = u_n(1/3)$ et

$$w_n = \sum_{k=1}^n u_k(1/2).$$

Pour situer ces paramètres, on utilise $2 < e < 3$. Ces inégalités peuvent se vérifier avec la série exponentielle :

$$e = \sum_{m=0}^{+\infty} 1/m! > 2,$$

tandis que $m! \geq 2^{m-1}$ pour $m \geq 2$, avec inégalité stricte pour $m \geq 3$, donne :

$$e = 2 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m!} < 2 + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 3.$$

Ainsi $1/3 < 1/e$. La série de $u_n(1/3)$ converge, donc son terme général tend vers 0 :

$$v_n \longrightarrow 0.$$

Comme $1/2 > 1/e$, les sommes partielles de la série de $u_n(1/2)$ tendent vers $+\infty$ d'après 3.b. Donc :

$$w_n \longrightarrow +\infty.$$

3. d. Méthode 1 — Étude de la différence

Posons $H(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(1+t)$ pour $t \geq 0$. La fonction est dérivable et :

$$H'(t) = 1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t+t^2)(1+t) - 1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t} \geq 0.$$

Comme $H(0) = 0$, $H(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi :

$$\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

Pour $t > 0$, on multiplie cette inégalité par $\frac{1}{t} + \frac{1}{2} > 0$ puis on soustrait 1. Par la formule de $\ln f$:

$$\ln(f(t)) \leq -1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) = \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}.$$

À $t = 0$, cette dernière inégalité reste vraie, car ses deux membres valent 0.

Méthode 2 — Identité finie pour la dérivée du logarithme

Pour $s \geq 0$, l'identité algébrique $\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - \frac{s^3}{1+s}$ se vérifie en multipliant par $1+s$. En l'intégrant sur $[0, t]$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \int_0^t \frac{s^3}{1+s} ds.$$

L'intégrale finale est positive ou nulle pour $t \geq 0$; on retrouve la première inégalité. Pour $t > 0$, la même substitution dans $\ln f(t) = -1 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t)$ donne le contrôle plus précis :

$$\ln(f(t)) = \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{s^3}{1+s} ds \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}.$$

Le cas $t = 0$ se vérifie directement. La première méthode étudie le signe d'une différence; la seconde exprime explicitement le reste par une intégrale positive.

3. e. Pour alléger les notations, posons $a_n = u_n(1/e) > 0$. La formule 3.a donne $a_{k+1}/a_k = f(1/k)$. En prenant les logarithmes puis en sommant des égalités finies :

$$\ln a_n - \ln a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \ln f(1/k).$$

On a $a_1 = 1/e$, donc $\ln a_1 = -1$. La majoration 3.d, appliquée à $t = 1/k$, donne :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln \left(u_n \left(\frac{1}{e} \right) \right) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3} \right).$$

Les séries de Riemann d'exposants 2 et 3 convergent. Le réel :

$$C = -1 + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

est donc bien défini. Les termes sommés étant positifs, on a $\ln a_n \leq C$ pour $n \geq 2$, et aussi pour $n = 1$ puisque $\ln a_1 = -1 \leq C$. Par croissance de l'exponentielle, $0 < a_n \leq e^C$ pour tout $n \geq 1$. La suite demandée est majorée.

3. f. On exprime le terme demandé à partir de la suite bornée précédente :

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n \left(\frac{1}{e} \right).$$

La majoration 3.e donne :

$$0 \leq \frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq \frac{e^C}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0.$$

Partie II

Question adaptée au programme actuel — Le préambule définit les polynômes par une récurrence entièrement réelle. Cette récurrence conserve les polynômes et les identités nécessaires à toutes les questions suivantes. La formule explicite de leurs coefficients sera démontrée en 2.

1. On montre par récurrence que Q_n est de degré n et de coefficient dominant $n + 1$.

Pour $n = 0$, $Q_0 = 1$ est de degré 0, avec coefficient dominant 1. Pour $n = 1$, $Q_1 = 2X$ est de degré 1, avec coefficient dominant 2.

Supposons que Q_n soit de degré n , avec coefficient dominant $n + 1$, et que Q_{n+1} soit de degré $n + 1$, avec coefficient dominant $n + 2$. Dans :

$$Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - (X^2 + 1)Q_n,$$

le coefficient de X^{n+2} est $2(n + 2) - (n + 1) = n + 3$, non nul. Les autres termes ont un degré inférieur ou égal à $n + 1$. Donc Q_{n+2} est de degré $n + 2$, avec coefficient dominant $n + 3$. La récurrence est établie et :

$$\deg Q_n = n, \quad \text{coefficient dominant de } Q_n = n + 1.$$

2. On établit l'expression des coefficients à l'aide du binôme pour deux matrices réelles qui commutent.

Fixons un réel x et posons :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = xI_2 + J = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Un produit direct donne $J^2 = -I_2$, puis :

$$H^2 = (x^2 - 1)I_2 + 2xJ = 2xH - (x^2 + 1)I_2.$$

En multipliant par H^{n+1} , on obtient $H^{n+3} = 2xH^{n+2} - (x^2 + 1)H^{n+1}$ pour $n \geq 0$.

Notons $q_n = (H^{n+1})_{2,1}$. Alors $q_0 = 1$, $q_1 = 2x$ et :

$$q_{n+2} = 2xq_{n+1} - (x^2 + 1)q_n.$$

Les valeurs $Q_n(x)$ satisfont la même récurrence avec les mêmes valeurs initiales. Une récurrence donne donc $q_n = Q_n(x)$ pour tout n .

Les matrices xI_2 et J commutent; la formule du binôme donne :

$$H^{2r+1} = \sum_{j=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{j} x^{2r+1-j} J^j.$$

Pour $p \geq 0$, $J^{2p} = (-1)^p I_2$ et $J^{2p+1} = (-1)^p J$. Les puissances paires ont un coefficient de position $(2, 1)$ nul; celui des puissances impaires vaut $(-1)^p$. En lisant ce coefficient dans la somme :

$$Q_{2r}(x) = q_{2r} = \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} x^{2r-2p}.$$

Cette égalité vaut pour tout réel x . Les deux polynômes sont donc égaux : leur différence s'annule en une infinité de points, ce qu'un polynôme non nul ne peut pas faire. On obtient l'identité (1) :

$$Q_{2r}(X) = \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p}.$$

Pour $r = 0$, elle donne bien $Q_0 = 1$.

3. a. Question adaptée au programme actuel — On recherche les racines par une identité trigonométrique réelle et la récurrence du préambule.

Fixons $\theta \in]0, \pi[$, de sorte que $\sin \theta > 0$. Les formules d'addition du sinus donnent, pour tout entier $m \geq 0$:

$$\sin((m+2)\theta) + \sin(m\theta) = 2 \cos \theta \sin((m+1)\theta).$$

En effet, on additionne les développements de $\sin((m+1)\theta + \theta)$ et de $\sin((m+1)\theta - \theta)$; les deux termes contenant le cosinus de $(m+1)\theta$ se compensent.

On montre maintenant par récurrence :

$$Q_n(\cotan \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin^{n+1} \theta}.$$

Pour $n = 0$, le membre de droite vaut $1 = Q_0$. Pour $n = 1$, la formule d'addition donne $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, donc le membre de droite vaut $2 \cotan \theta = Q_1(\cotan \theta)$.

Supposons la formule vraie aux rangs n et $n+1$. Puisque $\cotan^2 \theta + 1 = 1/\sin^2 \theta$, la récurrence donne :

$$Q_{n+2}(\cotan \theta) = \frac{2 \cos \theta \sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin^{n+3} \theta} = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin^{n+3} \theta}.$$

La dernière égalité est l'identité d'addition établie plus haut. La formule est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Sur $]0, \pi[$, la cotangente est continue et sa dérivée vaut $-1/\sin^2 \theta < 0$. Ses limites aux bornes sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$; elle est donc une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

Tout réel x s'écrit ainsi de manière unique $x = \cotan \theta$. La formule obtenue montre :

$$Q_n(x) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0.$$

Comme $0 < \theta < \pi$, les solutions sont exactement $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour $n \geq 1$, les racines sont donc :

$$x_k = \cotan \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Elles sont distinctes, car la cotangente est injective sur $]0, \pi[$. On a trouvé n racines réelles

distinctes pour un polynôme de degré n : elles sont toutes simples et donnent une factorisation complète sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 0$, $Q_0 = 1$ ne possède aucune racine.

3. b. Le polynôme Q_n a pour coefficient dominant $n + 1$ et pour racines les n nombres distincts trouvés en 3.a. La factorisation par ces racines donne :

$$Q_n(X) = (n + 1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right).$$

On peut vérifier l'égalité en observant que les deux membres ont le même coefficient dominant et les mêmes n racines distinctes ; leur différence a un degré au plus $n - 1$ et ces n racines, donc est nulle. Pour $n = 0$, le produit vide vaut 1 et la formule donne bien $Q_0 = 1$.

4. Pour $r \geq 1$, on applique la factorisation précédente à $n = 2r$. Les indices k et $2r + 1 - k$, pour $k = 1, \dots, r$, donnent les deux angles $\theta_k = \frac{k\pi}{2r+1}$ et $\pi - \theta_k$.

Les formules d'addition donnent $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ et $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, donc $\cotan(\pi - \theta) = -\cotan \theta$. Les deux facteurs correspondants ont donc pour produit :

$$(X - \cotan \theta_k)(X + \cotan \theta_k) = X^2 - \cotan^2 \theta_k.$$

En regroupant les $2r$ facteurs par paires, on obtient l'identité (2) :

$$Q_{2r}(X) = (2r + 1) \prod_{k=1}^r \left(X^2 - \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right) \right).$$

Pour $r = 0$, le membre de droite vaut 1 par la convention sur les produits vides, et coïncide avec Q_0 .

5. Pour $r \geq 1$, on compare les coefficients de X^{2r-2} dans les deux identités, comme demandé.

Dans (1), l'exposant $2r - 2$ correspond à $p = 1$; le coefficient vaut :

$$-\binom{2r+1}{3}.$$

Dans (2), ce degré est obtenu en choisissant le terme constant dans exactement un des r facteurs, et X^2 dans tous les autres. Le coefficient est donc :

$$-(2r+1) \sum_{k=1}^r \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right).$$

En identifiant ces coefficients et en divisant par $2r+1 > 0$:

$$\sum_{k=1}^r \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right) = \frac{1}{2r+1} \binom{2r+1}{3} = \frac{(2r)(2r-1)}{6} = \frac{r(2r-1)}{3}.$$

Pour les angles considérés, le sinus est non nul et l'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ donne :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cotan^2 \theta.$$

En sommant et en utilisant l'égalité déjà établie :

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2r+1} \right)} = r + \frac{r(2r-1)}{3} = \frac{2r(r+1)}{3}.$$

Pour $r = 0$, les deux sommes sont vides et valent 0, comme les deux membres de droite. Les égalités restent donc vraies ; il n'y a pas de coefficient de degré négatif à calculer.

6. a. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$. On commence par démontrer les inégalités $\sin x < x < \tan x$.

La fonction $a(x) = x - \sin x$ est nulle en 0 et sa dérivée vaut $1 - \cos x > 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Elle est donc strictement positive sur cet intervalle, ce qui donne $\sin x < x$.

La fonction $b(x) = \tan x - x$ est également nulle en 0, et sa dérivée vaut $1/\cos^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ainsi $x < \tan x$.

Tous les nombres comparés sont positifs. En prenant les inverses et leurs carrés dans $x < \tan x$, on obtient $\cotan^2 x < 1/x^2$. De $\sin x < x$, on obtient $1/x^2 < 1/\sin^2 x$. Donc :

$$\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. b. Pour $r \geq 1$ et $1 \leq k \leq r$, les angles $\theta_k = \frac{k\pi}{2r+1}$ satisfont $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$. On peut donc appliquer 6.a à chacun et sommer les r inégalités strictes. Avec les résultats de 5 :

$$\frac{r(2r-1)}{3} < \sum_{k=1}^r \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2} < \frac{2r(r+1)}{3}.$$

6. c. Notons

$$S_r = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}.$$

Puisque :

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2} = \frac{(2r+1)^2}{\pi^2} S_r,$$

on multiplie l'encadrement 6.b par $\frac{\pi^2}{(2r+1)^2} > 0$ et on obtient :

$$\frac{\pi^2 r(2r-1)}{3(2r+1)^2} < S_r < \frac{2\pi^2 r(r+1)}{3(2r+1)^2}.$$

En divisant numérateurs et dénominateurs par r^2 , on voit que les deux bornes tendent vers $\pi^2/6$. Le théorème d'encadrement donne donc $S_r \rightarrow \pi^2/6$.

La convergence des sommes partielles est précisément la convergence de la série. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La convergence et la valeur de la somme ont ici été établies simultanément par l'encadrement fini, sans supposer connue la valeur de cette série.

Partie III

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n(t) = \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}$ est continue sur $] -1, +\infty[$, puisque son dénominateur y est strictement positif. Pour tout $x > -1$, le segment de bornes 0 et x est contenu dans cet intervalle ; l'intégrale définissant $F_n(x)$ existe.

Le théorème fondamental du calcul intégral donne $F_n \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[)$, donc sa continuité, et :

$$F'_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}.$$

Pour $n = 0$, le numérateur est le polynôme constant 1. Pour $n \geq 1$, le signe de la dérivée est celui de x^n .

Si n est pair, y compris $n = 0$, F_n est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$. Pour $n \geq 2$, sa dérivée ne s'annule qu'en 0, et son intégrale entre deux points distincts reste strictement positive, ce qui justifie la stricte croissance.

Si n est impair, F_n est strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum global en 0, avec $F_n(0) = 0$.

Pour la limite en $+\infty$, lorsque $t \geq 1$, on a $t/(1+t) \geq 1/2$ et $1/(1+t) \geq 1/(2t)$. Ainsi :

$$g_n(t) = \left(\frac{t}{1+t} \right)^n \frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{2^{n+1}t}.$$

Pour $x \geq 1$, la relation de Chasles donne :

$$F_n(x) = F_n(1) + \int_1^x g_n(t) dt \geq F_n(1) + \frac{\ln x}{2^{n+1}}.$$

Le membre de droite tend vers $+\infty$ pour n fixé. Donc, pour tout $n \geq 0$, $F_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Pour la limite en -1 , on traite d'abord $n = 0$:

$$F_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} -\infty.$$

Supposons maintenant $n \geq 1$. Sur $] -1, -\frac{1}{2}]$, le signe de g_n est $(-1)^n$ et $|t| \geq \frac{1}{2}$. Pour $-1 < x < -\frac{1}{2}$:

$$\int_x^{-1/2} |g_n(t)| dt \geq \frac{1}{2^n} \int_x^{-1/2} \frac{dt}{(1+t)^{n+1}} = \frac{1}{n2^n} \left(\frac{1}{(1+x)^n} - 2^n \right).$$

Cette borne tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow -1^+$. La relation de Chasles, avec l'orientation de l'intégrale, donne :

$$F_n(x) = F_n(-1/2) - \int_x^{-1/2} g_n(t) dt = F_n(-1/2) + (-1)^{n+1} \int_x^{-1/2} |g_n(t)| dt.$$

Le premier terme est une constante finie. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} F_n(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Avec la limite à droite, cela décrit complètement les limites aux deux bornes de l'intervalle pour chaque entier n .

2. Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto t/(1+t)$ est croissante sur $[0, x]$, car sa dérivée vaut $1/(1+t)^2 > 0$. Donc, pour $t \in [0, x]$:

$$0 \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{x}{1+x}.$$

Posons $q = x/(1+x)$, de sorte que $0 < q < 1$. Pour $n \geq 1$, l'élévation à la puissance n et la majoration $1/(1+t) \leq 1$ donnent :

$$0 \leq \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} = \left(\frac{t}{1+t} \right)^n \frac{1}{1+t} \leq q^n = \frac{x^n}{(1+x)^n}.$$

Pour $n = 0$, l'inégalité demandée se vérifie directement : $1/(1+t) \leq 1$. En intégrant sur $[0, x]$, on obtient, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq F_n(x) \leq xq^n.$$

Puisque $q \in]0, 1[$ est fixé, $xq^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement :

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

3. Question adaptée au programme actuel — Rectification locale : la borne du PDF omet le facteur $1/(1+x)$. À $t = x < 0$, le membre de gauche est $|x/(1+x)|^n/(1+x)$, strictement supérieur à $|x/(1+x)|^n$; l'inégalité originale est donc fausse. On démontre la borne rectifiée de l'énoncé.

Fixons $-\frac{1}{2} < x < 0$ et posons $q = |x/(1+x)| = -x/(1+x)$. On a $0 < q < 1$, car $-x < 1+x$ équivaut à $x > -\frac{1}{2}$.

Pour $t \in [x, 0]$, la fonction $t \mapsto -t/(1+t)$ est décroissante, puisque sa dérivée vaut $-1/(1+t)^2 < 0$. Donc :

$$0 \leq \frac{|t|}{1+t} = \frac{-t}{1+t} \leq \frac{-x}{1+x} = q.$$

De plus, $1+t \geq 1+x > 0$, donc $1/(1+t) \leq 1/(1+x)$. Pour $n \geq 1$:

$$\left| \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right| = \left(\frac{|t|}{1+t} \right)^n \frac{1}{1+t} \leq \frac{q^n}{1+x}.$$

Pour $n = 0$, la même borne est simplement $1/(1+t) \leq 1/(1+x)$, déjà établie. La borne rectifiée vaut donc pour tout $n \geq 0$.

Comme $x < 0$, on écrit $F_n(x) = -\int_x^0 g_n(t) dt$ avant de majorer sa valeur absolue.

L'inégalité triangulaire pour l'intégrale et la longueur $-x$ du segment donnent :

$$|F_n(x)| \leq \int_x^0 |g_n(t)| dt \leq \frac{-x}{1+x} q^n.$$

Le facteur $(-x)/(1+x)$ est fixe et $0 < q < 1$. Le membre de droite tend vers 0, donc :

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Relevé des adaptations

Partie II, préambule et question 3.a : remplacement de la définition hors du cadre réel par la récurrence $Q_0 = 1, Q_1 = 2X, Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - (X^2 + 1)Q_n$. Les racines sont déterminées par une identité trigonométrique réelle obtenue avec cette récurrence. Les coefficients et factorisations nécessaires sont intégralement démontrés, sans résultat admis supplémentaire.

Partie II, question 5 : précision que la comparaison du coefficient de X^{2r-2} s'effectue pour $r \geq 1$; le cas $r = 0$ est vérifié séparément avec les sommes vides. L'indication répétée dans le PDF est réunie en une seule consigne de comparaison des coefficients, qui conduit aux deux égalités demandées.

Partie II, question 6.b : précision $r \geq 1$ pour l'encadrement issu de la somme d'inégalités strictes ; le cas de la somme vide n'est pas utilisé dans le passage à la limite.

Partie III, question 3 : ajout du facteur $1/(1+x)$ dans la majoration de l'intégrande. La borne originale est fautive dès $t = x < 0$. La borne rectifiée reste géométrique en n et permet d'établir la même limite demandée.