



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1980

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs ou nuls. On adopte la convention $\frac{x^0}{0!} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment ; les résultats de la partie I à utiliser dans les parties II et III sont signalés dans les questions correspondantes.

Partie I

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on considère les trois suites définies par :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad w_n(x) = v_n(x) + \frac{x^n}{n!}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n(x))$ est convergente et, en utilisant la formule de Maclaurin, que sa limite est e^x . Montrer que la suite $(w_n(x))$ a la même limite.
2. Démontrer que la suite $(v_n(x))$ est croissante et que la suite $(w_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang.
3. En utilisant ce qui précède, établir les inégalités :

$$(1) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, \ln 2[.$$

$$(2) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, 1[.$$

Partie II

Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, Φ_A désigne la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\Phi_A(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A, \\ 0 & \text{si } k \notin A. \end{cases}$$

À toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, on associe la suite $(s_n^A(a))$ définie par :

$$s_n^A(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi_A(k)}{k!} a^k.$$

1. Démontrer que la suite $(s_n^A(a))$ est convergente.

2. Le réel $a \in \mathbb{R}_+$ étant fixé, on pose, pour toute partie A de $\mathbb{N}$: $m(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^A(a)$.

Calculer $m(\emptyset)$, $m(\{0\})$, $m(\{p\})$ pour $p \neq 0$, et $m(\mathbb{N})$.

Dans les questions 3, 4 et 5, on suppose $a \in]0, \ln 2[$.

3. a. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ vérifiant $A \subset B$, démontrer que $m(A) \leq m(B)$.

b. Démontrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $m(A) \in [0, 2[$.

c. Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$, démontrer que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

4. a. Soient A, B deux parties disjointes non vides de $\mathbb{N}$, et p le plus petit élément de $A \cup B$. On suppose $p \in A$, et donc $p \notin B$. Démontrer, en utilisant l'inégalité (1) de la première partie :

$$m(B) < \frac{a^p}{p!} \leq m(A).$$

- b.** En déduire que, si deux parties disjointes A, B vérifient $m(A) = m(B)$, elles sont vides.

- 5. a.** Démontrer que, pour tout couple (A, B) de parties de $\mathbb{N}$,

$$m(A) - m(B) = m(A \setminus B) - m(B \setminus A).$$

- b.** En déduire que l'application $m : A \mapsto m(A)$ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ensemble des parties de $\mathbb{N}$, vers l'intervalle $[0, 2[$ de $\mathbb{R}$.

Partie III

Soit C l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, continues sur $[0, 1]$. On considère l'application U qui, à tout élément f de C , associe l'élément $U(f)$ défini par :

$$(U(f))(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On définit les applications U^n par $U^n = U^{n-1} \circ U$ pour $n \geq 1$, et $U^0 = I$, application identique de C .

- 1. a.** Montrer que U est un endomorphisme de C .

- b.** Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(U^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt,$$

en raisonnant par récurrence et en utilisant une intégration par parties.

- c. On note V_n l'endomorphisme défini, pour $n \geq 1$, par

$$V_n = \sum_{k=1}^n U^k.$$

Démontrer les relations :

$$V_n \circ U = U \circ V_n = V_{n+1} - U.$$

2. a. Vérifier que l'application de C dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ est une norme sur C , c'est-à-dire vérifie :

$$\forall f \in C, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|,$$

$$\forall (f, g) \in C^2, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$$\|f\| = 0 \implies f = 0.$$

- b. Démontrer que $\|U(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in C$.

3. Soit V l'application qui, à tout élément f de C , associe l'élément $V(f)$ défini par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (V(f))(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Démontrer que $\|V(f) - V_n(f)\| \leq \frac{e}{n!} \|f\|$ pour tout entier $n \geq 1$, en utilisant l'inégalité (2) de la première partie.

On admet que l'on peut en déduire les égalités $V \circ U = U \circ V = V - U$.

4. a. Dédurre de 3 que $I - U$ et $I + V$ sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

b. Application : trouver la solution $f \in C$ de l'équation intégrale

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) - \int_0^x f(t) dt = e^{-x}.$$