



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2026

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$, avec des valeurs dans $]0, 1]$. On pose $Y_j = \ln(X_j)$ pour $j \in \{1, 2\}$ et $Z = X_1 X_2$.

1) Simulation de Z .

On simule deux uniformes indépendantes puis leur produit. La commande `rd.random()` renvoie une uniforme sur l'intervalle numérique semi-ouvert de zéro inclus à un exclu. Utiliser son complément à un respecte aussi la convention $X_j \in]0, 1]$.

Python

```
import numpy.random as rd

def simulZ():
    X1 = 1 - rd.random()
    X2 = 1 - rd.random()
    return X1 * X2
```

Les deux appels simulent deux tirages indépendants. La sortie simule donc la loi de $Z = X_1 X_2$.

Code exécuté : les sorties contrôlées appartiennent à $]0, 1]$. La simulation illustre la loi, sans en constituer une démonstration.

2) Espérance et variance de Z .

Comme $0 < Z \leq 1$, les variables Z et Z^2 sont bornées. Leurs espérances existent, ainsi que la variance de Z .

Pour $j \in \{1, 2\}$, le théorème de transfert pour la loi uniforme donne :

$$E(X_j) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}, \quad E(X_j^2) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

L'indépendance de X_1 et X_2 , puis celle de X_1^2 et X_2^2 par le lemme des coalitions, permet

d'écrire :

$$E(Z) = E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{4}, \quad E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = \frac{1}{9}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne finalement :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}.$$

Conclusion

$$E(Z) = \frac{1}{4} \text{ et } V(Z) = \frac{7}{144}.$$

3) a) Fonction de répartition de Y_1 et Y_2 .

Fixons $j \in \{1, 2\}$. L'exponentielle étant strictement croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(Y_j \leq x) = P(\ln(X_j) \leq x) = P(X_j \leq e^x).$$

Si $x < 0$, alors $e^x \in]0, 1[$ et la fonction de répartition de l'uniforme vaut e^x . Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1$ et la probabilité vaut un. Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident en zéro, où $F(0) = 1$.

3) b) Densité commune.

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Une densité s'obtient par dérivation sur ces intervalles ; sa valeur au seul point zéro est libre.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Elle est positive et $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$. C'est donc une densité commune à Y_1 et Y_2 .

4) a) Densité de $Y_1 + Y_2$.

Méthode 1 — Convolution.

Les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes car elles sont obtenues par des transformations séparées des variables indépendantes X_1 et X_2 . On peut donc utiliser la formule de convolution. Pour un réel x , le produit $f(t)f(x-t)$ ne peut être non nul que si $t \leq 0$ et $x-t \leq 0$, soit $x \leq t \leq 0$.

Si $x > 0$, cet intervalle est vide et la convolution vaut zéro. Si $x \leq 0$, l'intégrale se réduit à un segment et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = \int_x^0 e^t e^{x-t} dt = \int_x^0 e^x dt = -xe^x.$$

Toutes ces intégrales sont finies, y compris en zéro, où leur valeur est nulle. La convolution fournit donc la densité annoncée :

$$h(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Méthode 2 — Somme d'exponentielles.

Posons $T_j = -Y_j$. D'après la question 3), pour $t \geq 0$, la continuité de la loi uniforme donne :

$$P(T_j \leq t) = P(X_j \geq e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

Pour $t < 0$, cette probabilité vaut zéro. Chaque T_j suit donc la loi exponentielle de taux un. Les variables T_1 et T_2 sont indépendantes par le lemme des coalitions.

Le résultat du programme sur les sommes d'exponentielles indépendantes donne $T_1 + T_2 \sim \gamma(2)$, de densité $g(t) = te^{-t}$ pour $t > 0$, et nulle pour $t \leq 0$, puisque $\Gamma(2) = 1$. La transformation affine $Y_1 + Y_2 = -(T_1 + T_2)$ possède alors la densité $g(-x)$, qui est exactement $h(x)$.

La convolution détaille le calcul sur le support; la seconde méthode permet de reconnaître une loi gamma à partir de logarithmes d'uniformes.

4) b) Fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$.

Pour $x \leq 0$, on calcule l'intégrale impropre à partir de la primitive $t \mapsto (1-t)e^t$ de $-te^t$:

$$H(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x (-t)e^t dt = (1-x)e^x - \lim_{a \rightarrow -\infty} (1-a)e^a = (1-x)e^x.$$

La dernière limite est nulle par croissance comparée. Pour $x > 0$, comme $Y_1 + Y_2 \leq 0$, on a $H(x) = 1$. Ainsi :

$$H(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En particulier, $H(0) = 1$, ce qui vérifie également la normalisation de h .

4) c) Loi du produit Z .

On a $\ln(Z) = Y_1 + Y_2$ et $0 < Z \leq 1$. Pour $x \leq 0$, $F_Z(x) = 0$; pour $x \geq 1$, $F_Z(x) = 1$. Pour $0 < x < 1$, la croissance stricte du logarithme donne :

$$F_Z(x) = P(\ln(Z) \leq \ln(x)) = H(\ln(x)) = (1 - \ln(x))x.$$

On obtient donc :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x(1 - \ln(x)) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Par croissance comparée, $x \ln(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$; de plus $x(1 - \ln(x)) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. La fonction F_Z est ainsi continue sur $\mathbb{R}$, et elle est de classe C^1 en dehors de zéro et un. Sur $]0, 1[$:

$$F'_Z(x) = 1 - \ln(x) - 1 = -\ln(x).$$

Une densité est donc bien :

$$f_Z(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette densité est non négative et sa normalisation résulte de la fonction de répartition que l'on vient d'établir.

5) a) Intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. La fonction est continue sur $]0, 1]$; la seule borne impropre est zéro. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on effectue l'intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, 1]$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^n$:

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n \ln(x) dx = \left[\frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n dx.$$

Ainsi :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{\varepsilon^{n+1} \ln(\varepsilon)}{n+1} - \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Comme $n+1 > 0$, la croissance comparée donne $\varepsilon^{n+1} \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$. Le passage à la limite fournit :

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

L'intégrande étant négative sur $]0, 1[$, cette convergence est aussi absolue :

$$\int_0^1 |x^n \ln(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^2}. \text{ Cela inclut le cas } n = 0.$$

5) b) Retrouver les moments de Z .

Les intégrales absolues nécessaires à $E(Z)$ et $E(Z^2)$ convergent par la question précédente, avec respectivement $n = 1$ et $n = 2$. Le transfert donne :

$$E(Z) = \int_0^1 x(-\ln(x)) dx = \frac{1}{4}, \quad E(Z^2) = \int_0^1 x^2(-\ln(x)) dx = \frac{1}{9}.$$

On retrouve $V(Z) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}.$

La question 2) utilisait l'indépendance des facteurs ; cette question fournit une seconde approche par la densité du produit.

Exercice 2

1) Bonne définition des suites.

On montre par récurrence que $u_n \in [0, 1[$ pour tout $n \geq 1$. L'initialisation est $u_1 = 0$. Si $u_n \in [0, 1[$, alors :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 + u_n}{2} < 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} < 1.$$

Le radical est donc défini et $u_{n+1} > 0$. La récurrence est établie.

À partir de $v_1 = 2$, chaque $v_{n+1} = v_n / u_{n+1}$ est alors défini puisque son dénominateur ne s'annule pas. De plus, par récurrence, $v_n > 0$.

Conclusion

les deux suites sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $0 \leq u_n < 1$ et $v_n > 0$.

2) Fonction suite_v.

Il faut d'abord calculer le nouveau terme de la suite (u_n) , puis diviser le terme courant de (v_n) par ce nouveau terme.

Python

```
import numpy as np

def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n + 1):
        u = np.sqrt((1 + u) / 2)
```

```

    v = v / u
return v

```

Pour $n \geq 1$, au début de l'itération d'indice k , on dispose de u_{k-1} et v_{k-1} ; à la fin, on dispose de u_k et v_k . La boucle parcourt les entiers de deux à n inclus. Pour $n = 1$, elle est vide et la fonction renvoie bien $v_1 = 2$.

Code exécuté et comparé à l'expression exacte de la question 3)c). Pour les premiers indices, les valeurs coïncident à la précision des nombres flottants ; par exemple $v_2 = 2\sqrt{2}$ et $v_3 \simeq 3,061467459$.

3) a) Existence et unicité de (α_n) .

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'image $[0, 1]$. Elle est donc une bijection de cet intervalle sur $[0, 1]$.

Pour chaque $n \geq 1$, on a $u_n \in [0, 1[$ d'après la question 1). Il existe donc un unique $\alpha_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(\alpha_n) = u_n$.

Ces choix uniques pour chaque indice définissent l'unique suite demandée. Comme $u_n < 1$, on a même $\alpha_n > 0$.

3) b) Expression de α_n .

Puisque $u_1 = 0$, on a $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. La formule du cosinus de l'angle double donne :

$$\cos^2\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha_n)}{2} = \frac{1 + u_n}{2}.$$

Comme $\alpha_n/2 \in [0, \pi/4]$, son cosinus est positif. En prenant la racine positive, on obtient :

$$u_{n+1} = \cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

L'unicité démontrée à la question précédente entraîne $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$. La suite est géométrique de raison $1/2$, d'où :

$$\forall n \geq 1, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2^n}, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

3) c) Expression et limite de v_n .

Méthode 1 — Récurrence.

Pour $n = 1$, $2^1 \sin(\pi/2) = 2 = v_1$. Supposons $v_n = 2^n \sin(\pi/2^n)$. La relation de récurrence et la formule du sinus de l'angle double donnent :

$$v_{n+1} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{\cos(\pi/2^{n+1})} = \frac{2^{n+1} \sin(\pi/2^{n+1}) \cos(\pi/2^{n+1})}{\cos(\pi/2^{n+1})} = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

La simplification est licite, car $\pi/2^{n+1} \in]0, \pi/4]$ et le cosinus est strictement positif. La récurrence établit la formule pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Invariant obtenu par l'angle double.

La même identité trigonométrique donne directement $\sin(\alpha_n) = 2 \sin(\alpha_{n+1}) u_{n+1}$. Comme tous les sinus concernés sont strictement positifs :

$$\frac{v_{n+1}}{\sin(\alpha_{n+1})} = \frac{v_n}{u_{n+1} \sin(\alpha_{n+1})} = 2 \frac{v_n}{\sin(\alpha_n)}.$$

La suite $v_n / \sin(\alpha_n)$ est donc géométrique de raison deux et son premier terme est deux. On retrouve $v_n = 2^n \sin(\alpha_n) = 2^n \sin(\pi/2^n)$.

La première méthode vérifie une formule proposée ; la seconde explique comment la construire à partir de la relation de récurrence.

Dans les deux cas, on pose $t_n = \pi/2^n$, qui tend vers zéro par valeurs positives. Le développement limité fourni implique $\sin(t)/t \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$. Par conséquent :

$$v_n = \pi \frac{\sin(t_n)}{t_n} \longrightarrow \pi.$$

4) Développement asymptotique de v_n .

On évalue le développement limité fourni en $t_n = \pi/2^n$, sans composition de développements limités. Il existe une fonction $\varepsilon(t)$ tendant vers zéro en zéro telle que :

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^5 \varepsilon(t).$$

En multipliant l'égalité en $t = t_n$ par 2^n , on obtient :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + \frac{\pi^5}{4^{2n}} \varepsilon(t_n).$$

Le dernier terme est $o(4^{-2n})$. Ainsi :

$$a = \pi, \quad b = -\frac{\pi^3}{6}, \quad c = \frac{\pi^5}{120}.$$

Ces constantes sont uniques : a est la limite de v_n , puis b est la limite de $4^n(v_n - a)$, et enfin c est la limite de $4^{2n}(v_n - a - b4^{-n})$.

5) a) Fonction suite_w.

La définition de w_n se traduit directement par deux appels à `suite_v`. Voici le code autonome, avec la fonction utilisée :

Python

```
import numpy as np

def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n + 1):
        u = np.sqrt((1 + u) / 2)
        v = v / u
    return v

def suite_w(n):
    return (4 * suite_v(n + 1) - suite_v(n)) / 3
```

Pour tout entier $n \geq 1$, la sortie est l'approximation numérique de w_n . Code exécuté : par exemple $w_1 \simeq 3,104569500$ et $w_2 \simeq 3,139147570$.

5) b) Limite de w_n .

Puisque $v_n \rightarrow \pi$ et $v_{n+1} \rightarrow \pi$, les opérations sur les limites donnent :

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3} \longrightarrow \frac{4\pi - \pi}{3} = \pi.$$

5) c) Développement de w_n et rapport des erreurs.

Reprenons les constantes $b = -\pi^3/6$ et $c = \pi^5/120$. La question 4) donne :

$$v_n = \pi + b4^{-n} + c4^{-2n} + o(4^{-2n}).$$

En remplaçant n par $n + 1$, on obtient :

$$v_{n+1} = \pi + \frac{b}{4} 4^{-n} + \frac{c}{16} 4^{-2n} + o(4^{-2n}).$$

Le dernier terme reste un $o(4^{-2n})$, car $4^{-2(n+1)} = 4^{-2n}/16$. La combinaison linéaire des deux développements donne :

$$4v_{n+1} - v_n = 3\pi + (b-b)4^{-n} + \left(\frac{c}{4} - c\right)4^{-2n} + o(4^{-2n}) = 3\pi - \frac{3c}{4}4^{-2n} + o(4^{-2n}).$$

En divisant par trois :

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o(4^{-2n}).$$

Les coefficients dominants étant non nuls :

$$v_n - \pi \sim -\frac{\pi^3}{6}4^{-n}, \quad w_n - \pi \sim -\frac{\pi^5}{480}4^{-2n}.$$

En particulier, $v_n - \pi$ est non nul à partir d'un certain rang ; le quotient est alors défini. Le quotient des équivalents fournit :

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \sim \frac{\pi^2}{80}4^{-n} = \frac{\pi^2}{80 \times 4^n}.$$

Conclusion

le rapport des erreurs tend vers zéro.

5) d) Intérêt de l'accélération.

Les deux suites convergent vers π , mais leurs erreurs absolues vérifient :

$$|v_n - \pi| \sim \frac{\pi^3}{6}4^{-n}, \quad |w_n - \pi| \sim \frac{\pi^5}{480}16^{-n}.$$

La combinaison de Richardson supprime le premier terme d'erreur. Pour un même indice suffisamment grand, w_n fournit donc une approximation plus précise ; asymptotiquement, augmenter l'indice d'une unité divise l'erreur par seize au lieu de quatre.

Cet avantage concerne les suites mathématiques exactes. Dans le code exécuté en nombres flottants, les arrondis finissent par dominer : on ne peut pas obtenir indéfiniment davantage de précision en augmentant n .

6) a) Construction de (y_n) .

On cherche une combinaison $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$ conservant le terme constant et annulant le terme en q^n . Les conditions sont :

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + q\beta = 0.$$

Comme $q \neq 1$, ce système possède l'unique solution $\beta = 1/(1 - q)$ et $\alpha = -q/(1 - q)$. On définit donc :

$$y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1 - q}.$$

Écrivons $x_n = a + bq^n + cr^n + e_n$ avec $e_n = o(r^n)$. On a aussi $e_{n+1} = o(r^n)$, puisque $e_{n+1}/r^n = r(e_{n+1}/r^{n+1}) \rightarrow 0$. D'où :

$$x_{n+1} - qx_n = (1 - q)a + c(r - q)r^n + e_{n+1} - qe_n.$$

Le dernier groupe est $o(r^n)$. Ainsi :

$$y_n = a + dr^n + o(r^n), \quad d = \frac{c(r - q)}{1 - q}.$$

Les hypothèses $c \neq 0$, $r < q$ et $q < 1$ assurent que $d \neq 0$.

6) b) Développement dominant de x_n .

Puisque $0 < r < q$, on a $r^n/q^n = (r/q)^n \rightarrow 0$, donc $r^n = o(q^n)$. Si $e_n = o(r^n)$, alors :

$$\frac{e_n}{q^n} = \frac{e_n}{r^n} \left(\frac{r}{q}\right)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi $cr^n + e_n = o(q^n)$ et :

$$x_n = a + bq^n + o(q^n).$$

6) c) Comparaison des vitesses de convergence.

Comme $q, r \in]0, 1[$, les deux suites tendent vers a . Les constantes b et d étant non nulles, les résultats précédents donnent :

$$x_n - a \sim bq^n, \quad y_n - a \sim dr^n.$$

Le dénominateur $x_n - a$ est donc non nul à partir d'un certain rang, et :

$$\frac{y_n - a}{x_n - a} \sim \frac{d}{b} \left(\frac{r}{q}\right)^n \rightarrow 0.$$

En valeur absolue, cela signifie $|y_n - a| = o(|x_n - a|)$. C'est le sens précis de l'accélération de convergence demandée.

Exercice 3

Partie 1

1) a) Loi de X_k .

Pour $k \geq 1$, le mobile se place de façon équiprobable sur les $k + 1$ points d'abscisses $0, \dots, k$. Ainsi X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad P(X_k = j) = \frac{1}{k + 1}.$$

En dehors de cet ensemble, la probabilité ponctuelle est nulle.

1) b) Moments de X_k .

La variable X_k est bornée entre zéro et k , donc son espérance et sa variance existent.

Méthode 1 — Translation d'une uniforme usuelle.

La variable $T_k = X_k + 1$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k + 1 \rrbracket$. Pour une uniforme sur $\llbracket 1, m \rrbracket$, les formules du programme sont $E(T) = (m + 1)/2$ et $V(T) = (m^2 - 1)/12$.

En prenant $m = k + 1$, puis en utilisant les formules pour une transformation affine :

$$E(X_k) = E(T_k) - 1 = \frac{k + 2}{2} - 1 = \frac{k}{2},$$

$$V(X_k) = V(T_k) = \frac{(k + 1)^2 - 1}{12} = \frac{k(k + 2)}{12}.$$

Méthode 2 — Calcul direct des sommes.

La formule de la somme arithmétique donne

$$\sum_{j=0}^k j = k(k+1)/2.$$

Pour calculer la somme des carrés sans la supposer connue, on somme l'identité $(j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1$ de $j = 0$ à k . Le télescopage fournit :

$$(k+1)^3 = 3 \sum_{j=0}^k j^2 + \frac{3k(k+1)}{2} + (k+1).$$

En isolant la somme des carrés :

$$\sum_{j=0}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

La loi de X_k donne alors :

$$E(X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k j = \frac{k}{2}, \quad E(X_k^2) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k j^2 = \frac{k(2k+1)}{6}.$$

Par Koenig-Huygens :

$$V(X_k) = \frac{k(2k+1)}{6} - \frac{k^2}{4} = \frac{2k(2k+1) - 3k^2}{12} = \frac{k(k+2)}{12}.$$

La translation permet d'appliquer immédiatement les moments d'une loi usuelle ; le calcul direct reste utile lorsque le support ou les probabilités changent.

2) a) Événement $(Y = n)$.

Pour $n \geq 1$, le premier retour à l'origine a lieu à l'instant n si le mobile n'est jamais à l'origine aux instants précédents, puis s'y trouve à l'instant n . Ainsi :

$$(Y = n) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \neq 0) \right) \cap (X_n = 0).$$

Pour $n = 1$, l'intersection vide est l'événement certain : on retrouve $(Y = 1) = (X_1 = 0)$. L'instant initial, où $X_0 = 0$, ne figure pas dans cette expression.

2) b) Probabilités ponctuelles de Y .

La famille (X_k) est mutuellement indépendante ; les événements portant séparément sur ces variables sont donc indépendants. La question 1)a) donne $P(X_k \neq 0) = k/(k+1)$ et $P(X_n = 0) = 1/(n+1)$.

Pour $n \geq 1$:

$$P(Y = n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \right) \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Le produit télescopique vaut $1/n$, y compris pour $n = 1$, où le produit vide vaut un. La décomposition en éléments simples donne :

$$P(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

2) c) Probabilité d'absence de retour.

Pour tout $N \geq 1$, la somme partielle est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N P(Y = n) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1.$$

Comme Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, les événements $(Y = n)$ pour $n \geq 0$ forment un système complet. Par conséquent :

$$P(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 0.$$

Le premier retour existe donc presque sûrement, même si $Y = 0$ a été défini pour les trajectoires sans retour.

2) d) Existence d'une espérance de Y .

La variable Y est positive. L'existence d'une espérance finie équivaut à la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} nP(Y = n).$$

Or :

$$nP(Y = n) = \frac{1}{n+1}.$$

La série correspondante est la série harmonique privée de son premier terme ; elle diverge. Ainsi Y n'admet pas d'espérance finie. Sa moyenne vaut $+\infty$ si l'on utilise la convention d'espérance étendue pour les variables positives.

Un retour presque sûr n'implique donc pas un temps moyen de retour fini.

Partie 2

3) Simulation de Z_n .

On simule d'abord U_n , uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puis la loi géométrique conditionnelle, de paramètre $1 - U_n/n$.

Python

```
import numpy.random as rd

def var_Z(n):
    U = rd.randint(0, n)
    Z = rd.geometric(1 - U / n)
    return Z
```

L'appel `rd.randint(0, n)` exclut la borne supérieure et renvoie donc bien un entier de zéro à $n-1$. Le paramètre appartient à $[1/n, 1]$, donc est strictement positif. La commande `rd.geometric` renvoie un entier strictement positif, suivant la convention du sujet.

Quand $U = 0$, le paramètre vaut un et la sortie vaut nécessairement un. Cela traite aussi le cas $n = 1$, où $U_1 = 0$ et $Z_1 = 1$ presque sûrement.

Code exécuté pour plusieurs valeurs de n , y compris $n = 1$. Les sorties sont des entiers strictement positifs et, pour $n = 1$, sont toutes égales à un. Ces contrôles ne remplacent pas la justification de la loi conditionnelle.

4) a) Loi de Z_n .

Précision de convention : pour la puissance zéro, on prend $t^0 = 1$ même lorsque $t = 0$. Cela représente ici la probabilité de zéro échec avant le premier succès. Pour un paramètre géométrique égal à un, la loi est concentrée en un.

Fixons $i \geq 1$. Les événements $(U_n = k)$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, forment un système complet d'événements de probabilités non nulles $1/n$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(Z_n = i \mid U_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}.$$

Le cas $k = 0$ est bien inclus : sa contribution est $1/n$ si $i = 1$ et zéro si $i \geq 2$. En développant le facteur $1 - k/n$, on obtient :

$$P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i.$$

4) b) Limite des probabilités ponctuelles.

L'entier $i \geq 1$ est fixé. Les fonctions $t \mapsto t^{i-1}$ et $t \mapsto t^i$ sont continues sur $[0, 1]$, la première étant constante égale à un si $i = 1$. Les deux sommes sont des sommes de Riemann aux extrémités gauches d'une subdivision régulière :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} \longrightarrow \int_0^1 t^{i-1} dt = \frac{1}{i},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \longrightarrow \int_0^1 t^i dt = \frac{1}{i+1}.$$

Par différence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

4) c) Convergence en loi.

Méthode 1 — Probabilités ponctuelles sur les entiers.

D'après la partie 1, $P(Y = 0) = 0$ et $P(Y = i) = 1/[i(i + 1)]$ pour $i \geq 1$. La question précédente montre donc la convergence des probabilités ponctuelles vers celles de Y pour tout entier positif. À l'entier zéro, on a également $P(Z_n = 0) = 0 = P(Y = 0)$.

Les variables Z_n et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. La caractérisation du programme par les probabilités ponctuelles donne alors :

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.$$

Le fait que les probabilités limites somment à un a été établi en 2)c) ; il garantit qu'elles décrivent bien une loi.

Méthode 2 — Fonctions de répartition.

Pour $x < 1$, les fonctions de répartition de Z_n et de Y valent zéro, car ces variables sont au moins égales à un presque sûrement. Pour $x \geq 1$, posons $m = \lfloor x \rfloor$. Il s'agit d'un entier fixé lorsque x est fixé. On a :

$$P(Z_n \leq x) = \sum_{i=1}^m P(Z_n = i) \longrightarrow \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} = P(Y \leq x).$$

Le passage à la limite porte uniquement sur une somme finie. Cette convergence vaut en particulier en tout point de continuité de la fonction de répartition de Y : c'est exactement la définition de la convergence en loi.

La première méthode est rapide pour des variables entières ; la seconde explicite la fonction de répartition limite.

5) Espérance de Z_n .

Précision de convention : conditionnellement à $U_n = 0$, la loi géométrique de paramètre un a pour espérance un, conformément à la formule $1/p$.

On fixe $n \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le paramètre $p_k = 1 - k/n$ est strictement positif, et la loi géométrique conditionnelle admet l'espérance finie :

$$E(Z_n \mid U_n = k) = \frac{1}{1 - k/n} = \frac{n}{n - k}.$$

Pour justifier l'existence de l'espérance inconditionnelle avant d'appliquer la formule de l'espérance totale, considérons, pour $N \geq 1$, la somme partielle positive :

$$\sum_{i=1}^N iP(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^N iP(Z_n = i \mid U_n = k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n - k}.$$

L'égalité utilise seulement des sommes finies ; la majoration utilise les espérances conditionnelles finies. Le majorant est fini pour n fixé et ne dépend pas de N . La série positive définissant $E(Z_n)$ converge donc.

La formule de l'espérance totale, pour le système complet fini des événements $(U_n = k)$, est maintenant applicable :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = k)E(Z_n \mid U_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n - k}.$$

Avec le changement d'indice $j = n - k$, on obtient :

$$E(Z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

En particulier $E(Z_1) = 1$, en accord avec $Z_1 = 1$ presque sûrement.

6) a) Encadrement d'une différence de logarithmes.

Méthode 1 — Comparaison d'intégrales.

Pour $k \geq 1$ et $t \in [k, k+1]$, on a $1/(k+1) \leq 1/t \leq 1/k$. On intègre ces inégalités sur ce segment de longueur un :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Méthode 2 — Théorème des accroissements finis.

La fonction logarithme est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. Il existe donc $\xi_k \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{\xi_k}.$$

La décroissance de $t \mapsto 1/t$ donne $1/(k+1) < 1/\xi_k < 1/k$, donc l'encadrement demandé, avec des inégalités larges.

La comparaison d'intégrales met directement en relation somme harmonique et logarithme ; les accroissements finis retrouvent le même encadrement à partir de la dérivée.

6) b) Encadrement de $E(Z_n)$.

Pour $n \geq 2$, on somme les inégalités de 6)a) de $k = 1$ à $n-1$. Les logarithmes se télescopent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En notant

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k = E(Z_n),$$

l'inégalité de gauche est $H_n - 1 \leq \ln(n)$, tandis que celle de droite est $\ln(n) \leq H_n - 1/n$.
On obtient donc :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(Z_n) \leq \ln(n) + 1.$$

6) c) Équivalent de $E(Z_n)$.

Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$. On divise l'encadrement précédent par $\ln(n)$:

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{E(Z_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Les deux bornes tendent vers un. Par encadrement :

$$E(Z_n) \sim \ln(n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Ainsi chaque Z_n admet une espérance finie, mais ces espérances divergent. Cela est cohérent avec l'absence d'espérance finie de la variable limite Y ; une convergence en loi ne permet pas, à elle seule, de passer à la limite dans les espérances.

Problème

Toutes les matrices sont réelles. Une matrice symétrique M est positive si ${}^tXMX \geq 0$ pour tout vecteur colonne X . La positivité porte ici sur la forme quadratique, et non sur les coefficients de la matrice.

Partie 1 : caractérisation des matrices symétriques positives

1) a) Quotient associé à un vecteur propre.

Puisque λ est une valeur propre de A , il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant à gauche par ${}^tX$:

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX.$$

On a

$${}^tXX = \sum_{j=1}^n X_j^2 > 0$$

puisque $X \neq 0$. La division est donc licite et donne :

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}.$$

1) b) Signe des valeurs propres.

La positivité de A implique ${}^tXAX \geq 0$. Le dénominateur du quotient précédent étant strictement positif, on en déduit $\lambda \geq 0$.

Conclusion

toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique positive sont positives ou nulles.

2) a) Diagonalisation orthogonale.

La matrice A est réelle et symétrique. Le théorème spectral réel fournit une base orthonormale de vecteurs propres. Si P a ces vecteurs pour colonnes, alors P est orthogonale, donc $P^{-1} = {}^tP$, et :

$$A = PD{}^tP, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A , répétées selon les dimensions des espaces propres.

2) b) Expression de la forme quadratique dans la base propre.

Pour $Y = {}^tPX$, on a ${}^tY = {}^tXP$. Ainsi :

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY.$$

C'est l'expression de la même forme quadratique après changement de coordonnées.

2) c) Positivité de A .

En écrivant $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et en utilisant la diagonalité de D :

$${}^tYDY = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2.$$

Sous l'hypothèse $\lambda_j \geq 0$ pour tout j , chaque terme est positif ou nul. La question 2)b) donne donc ${}^tXAX \geq 0$ pour tout X , ce qui établit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

3) Conclusion de la caractérisation.

La question 1) a montré le sens direct, et la question 2) a montré la réciproque. Pour toute matrice réelle symétrique A :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[.$$

La symétrie est essentielle à l'application du théorème spectral utilisée dans la réciproque.

Partie 2 : « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

4) a) Définition de Δ .

Comme $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, la partie 1 montre que $\lambda_j \geq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les racines carrées réelles positives $\sqrt{\lambda_j}$ sont donc définies, y compris lorsque $\lambda_j = 0$.

On peut ainsi poser $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Elle est réelle, symétrique, et vérifie $\Delta^2 = D$.

4) b) Construction d'une racine carrée positive.

Posons $B = P\Delta^tP$. Puisque ${}^t\Delta = \Delta$, la règle de transposition d'un produit donne :

$${}^tB = {}^t(P\Delta^tP) = P\Delta^tP = B.$$

La matrice B est donc symétrique. Pour tout X , en posant $Y = {}^tPX$:

$${}^tXBX = {}^tY\Delta Y = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} y_j^2 \geq 0.$$

On a donc $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, l'orthogonalité de P donne ${}^tPP = I_n$ et :

$$B^2 = P\Delta^t P P \Delta^t P = P\Delta^{2t} P = P D^t P = A.$$

Cette construction reste valide pour les matrices singulières, notamment pour $A = 0$, où $B = 0$.

5) Valeurs des polynômes L_i .

Les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont deux à deux distinctes. Tous les dénominateurs $\mu_i - \mu_k$ présents dans le produit sont donc non nuls ; L_i est bien un polynôme réel.

En $x = \mu_i$, chacun des facteurs est égal à un. Ainsi $L_i(\mu_i) = 1$.

Si $j \neq i$, le facteur correspondant à $k = j$ est présent et son numérateur $\mu_j - \mu_j$ est nul. Ainsi $L_i(\mu_j) = 0$.

Pour $p = 1$, le produit est vide : $L_1 = 1$. La première égalité reste vraie, et il n'existe aucun couple d'indices distincts à traiter.

6) a) Valeurs du polynôme S .

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la question 5) donne :

$$S(\mu_k) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}.$$

Chaque λ_j est égale à une des valeurs propres distinctes μ_k , donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad S(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j}.$$

Ce polynôme reproduit ainsi la racine carrée sur le spectre de A ; il n'est pas nécessaire qu'il coïncide avec la fonction racine carrée sur tout $[0, +\infty[$.

6) b) Puissances de A .

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, $PD^{0t}P = P^tP = I_n = A^0$.

Supposons $A^k = PD^{kt}P$. Puisque ${}^tPP = I_n$:

$$A^{k+1} = A^k A = PD^{kt}P PD^tP = PD^{k+1t}P.$$

La récurrence donne $A^k = PD^{kt}P$ pour tout entier naturel k .

6) c) Expression polynomiale de B .

Écrivons

$$S(x) = \sum_{k=0}^m s_k x^k,$$

où $s_k \in \mathbb{R}$. La question 6)b), puis la distributivité du produit matriciel sur une somme finie, donnent :

$$S(A) = \sum_{k=0}^m s_k A^k = \sum_{k=0}^m s_k PD^{kt}P = P \left(\sum_{k=0}^m s_k D^k \right) {}^tP = PS(D){}^tP.$$

Puisque D est diagonale :

$$S(D) = \text{diag}(S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n)) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta.$$

Par conséquent $S(A) = P\Delta{}^tP = B$. La racine carrée construite est donc un polynôme en A , propriété qui permettra d'établir des commutations.

Partie 3 : unicité de la « racine carrée » d'une matrice symétrique positive

On suppose, comme demandé, qu'il existe une autre matrice $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$, et l'on va aboutir à $C = B$.

7) a) Commutation de A et C .

Comme $A = C^2$, l'associativité du produit donne :

$$AC = C^2C = C^3 = CC^2 = CA.$$

Ainsi A et C commutent.

7) b) Commutation de B et C .

On établit d'abord par récurrence que $A^k C = C A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, les deux côtés valent C . Si la propriété est vraie au rang k , alors :

$$A^{k+1}C = A^k AC = A^k CA = CA^k A = CA^{k+1}.$$

Puisque $B = S(A)$ par la question 6)c), on écrit

$$S(x) = \sum_{k=0}^m s_k x^k$$

et l'on utilise la commutation de chaque puissance :

$$BC = \sum_{k=0}^m s_k A^k C = \sum_{k=0}^m s_k C A^k = CB.$$

Conclusion

B et C commutent.

8) a) Commutation des endomorphismes.

Dans la base canonique, les matrices de $b \circ c$ et de $c \circ b$ sont respectivement BC et CB . Leur égalité, établie en 7)b), entraîne $b \circ c = c \circ b$.

8) b) Stabilité de E_i par c .

Fixons $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $x \in E_i$. Par définition, $b(x) = \sqrt{\mu_i} x$. La commutation précédente donne :

$$b(c(x)) = c(b(x)) = c(\sqrt{\mu_i} x) = \sqrt{\mu_i} c(x).$$

Donc $c(x) \in \text{Ker}(b - \sqrt{\mu_i} \text{Id}) = E_i$. Cela établit la stabilité, y compris lorsque $\mu_i = 0$.

8) c) Symétrie de c_i .

L'espace E_i est un sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; il est lui-même euclidien pour le produit scalaire restreint. La stabilité précédente et la linéarité de c font de c_i un endomorphisme de E_i .

Pour $x, y \in E_i$, la symétrie de c donne :

$$\langle c_i(x), y \rangle = \langle c(x), y \rangle = \langle x, c(y) \rangle = \langle x, c_i(y) \rangle.$$

Ainsi c_i est symétrique pour le produit scalaire de E_i .

8) d) Base propre commune dans E_i .

Le théorème spectral appliqué à l'endomorphisme symétrique c_i de l'espace euclidien E_i fournit une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de vecteurs propres de c_i .

Tous les vecteurs de E_i vérifient $b(x) = \sqrt{\mu_i} x$. Chaque vecteur non nul de $\mathcal{B}_i$ est donc également propre pour b . De plus, sur E_i , c_i coïncide avec c : ces vecteurs sont aussi propres pour c .

On a ainsi obtenu une base orthonormale commune aux deux endomorphismes sur chacun des espaces E_i .

8) e) Base propre commune de $\mathbb{R}^n$.

La construction $B = P\Delta^tP$ montre que les valeurs propres de b sont exactement $\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_p}$. Elles sont deux à deux distinctes, puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Chacune apparaît au moins une fois dans Δ , donc chaque E_i est non nul.

Comme b est symétrique, le théorème spectral et l'orthogonalité des espaces propres donnent :

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p,$$

avec des sous-espaces deux à deux orthogonaux. On concatène les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ obtenues en 8)d). La famille résultante $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Tous ses vecteurs sont propres pour b et pour c ; les matrices de ces deux endomorphismes dans $\mathcal{B}$ sont donc diagonales. Cette diagonalisation commune a été construite, sans invoquer un théorème général de diagonalisation simultanée.

8) f) Unicité de la racine carrée positive.

Méthode 1 — Utilisation de la base propre commune.

Soit Q la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$. On a :

$${}^tQBQ = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad {}^tCCQ = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Comme B et C sont symétriques positives, la partie 1 donne $\beta_j \geq 0$ et $\gamma_j \geq 0$ pour tout j . L'égalité $B^2 = C^2 = A$, exprimée dans la même base, donne $\beta_j^2 = \gamma_j^2$ pour chaque j .

Deux réels positifs ou nuls de même carré sont égaux : $\beta_j = \gamma_j$ pour tout j . Cela reste vrai lorsque leur carré est nul. Les deux matrices diagonales sont donc identiques ; en revenant à la base canonique, on obtient $B = C$.

Cela contredit l'hypothèse selon laquelle C était une autre racine carrée positive. La racine carrée symétrique positive est donc unique.

Méthode 2 — Argument sur chaque espace propre, par produit scalaire.

Cette approche utilise la stabilité de 8)b), sans nécessiter la construction de la base commune. Pour $x \in E_i$, on a $b^2(x) = \mu_i x$. Comme $c^2 = b^2$, l'endomorphisme induit vérifie $c_i^2 = \mu_i \text{Id}_{E_i}$. Il est symétrique et positif : $\langle c_i(x), x \rangle \geq 0$.

Si $\mu_i = 0$, alors, pour tout $x \in E_i$:

$$\|c_i(x)\|^2 = \langle x, c_i^2(x) \rangle = 0.$$

Ainsi $c_i = 0$, égal à la restriction de b à E_i .

Si $\mu_i > 0$, posons $s = \sqrt{\mu_i} > 0$. L'endomorphisme $c_i + s \text{Id}_{E_i}$ est injectif : si son image en x est nulle, alors :

$$0 = \langle (c_i + s \text{Id})(x), x \rangle = \langle c_i(x), x \rangle + s\|x\|^2 \geq s\|x\|^2,$$

donc $x = 0$. Or :

$$(c_i + s \operatorname{Id}) \circ (c_i - s \operatorname{Id}) = c_i^2 - s^2 \operatorname{Id} = 0.$$

L'injectivité du premier facteur impose $c_i - s \operatorname{Id} = 0$. Ainsi $c_i = s \operatorname{Id}$, encore égal à la restriction de b .

Dans tous les cas, b et c coïncident sur chaque E_i . Ces espaces engendrent $\mathbb{R}^n$, donc $b = c$ et $B = C$.

La première méthode lit l'égalité dans une base commune ; la seconde traite directement les restrictions aux espaces propres, avec un traitement explicite de la valeur propre nulle.

On peut désormais noter l'unique racine carrée positive de A par $A^{1/2}$.

Partie 4 : un résultat sur l'inversibilité et la positivité

9) Caractérisation des matrices définies positives.

Si A est définie positive, le quotient de 1)a), appliqué à un vecteur propre non nul, possède un numérateur strictement positif et un dénominateur strictement positif. Chaque valeur propre de A est donc strictement positive.

Réciproquement, supposons toutes ses valeurs propres strictement positives. Dans la diagonalisation de 2), pour $X \neq 0$, le vecteur $Y = {}^t P X$ est non nul car ${}^t P$ est inversible. La somme

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$$

de 2)c) contient alors au moins un terme strictement positif et aucun terme négatif. Par conséquent ${}^t X A X > 0$.

Conclusion

pour une matrice réelle symétrique A :

$$A \text{ est définie positive} \iff \text{Sp}(A) \subset]0, +\infty[.$$

10) a) Symétrie de N .

On utilise ${}^tM = M$ et ${}^t(I_n) = I_n$:

$${}^tN = {}^t(M - I_n) = M - I_n = N.$$

Ainsi N est symétrique.

10) b) Spectre de M , inversibilité et positivité de $I_n - M^{-1}$.

Méthode 1 — Diagonalisation de M .

Soit λ une valeur propre de M et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors :

$$NX = (M - I_n)X = (\lambda - 1)X.$$

Ainsi $\lambda - 1$ est une valeur propre de N . Comme N est symétrique positive, la partie 1 donne $\lambda - 1 \geq 0$. Donc $\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[$.

Le théorème spectral donne $M = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^tQ$ avec Q orthogonale et $\lambda_j \geq 1$. La matrice diagonale est inversible, donc M l'est aussi, avec :

$$M^{-1} = Q \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) {}^tQ.$$

Par conséquent :

$$I_n - M^{-1} = Q \operatorname{diag}(1 - 1/\lambda_1, \dots, 1 - 1/\lambda_n) {}^tQ.$$

Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles, puisque $\lambda_j \geq 1$. Par la partie 1, elle est positive.

Méthode 2 — Formes quadratiques.

Pour $X \neq 0$, l'égalité $M = I_n + N$ et la positivité de N donnent :

$${}^tXMX = \|X\|^2 + {}^tXNX \geq \|X\|^2 > 0.$$

Ainsi M est définie positive et donc inversible : si $MX = 0$, cette inégalité impose $X = 0$, et une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est bijective. Pour un vecteur propre non nul, la même inégalité donne $\lambda\|X\|^2 \geq \|X\|^2$, donc $\lambda \geq 1$.

L'inverse est symétrique car ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1} = M^{-1}$. Pour tout X , posons $Y = M^{-1}X$, soit $X = MY$. Alors :

$${}^tX(I_n - M^{-1})X = {}^tY(M^2 - M)Y.$$

Comme $M = I_n + N$, on a $M^2 - M = N + N^2$. La symétrie de N entraîne ${}^tYN^2Y = \|NY\|^2$. D'où :

$${}^tX(I_n - M^{-1})X = {}^tYNY + \|NY\|^2 \geq 0.$$

Cela prouve directement la positivité recherchée. La première méthode identifie les

valeurs propres ; la seconde montre comment transporter une inégalité de formes quadratiques par une matrice inversible.

11) a) Définie positivité de S_2 .

Pour tout $X \neq 0$, on écrit :

$${}^tXS_2X = {}^tXS_1X + {}^tX(S_2 - S_1)X.$$

Le premier terme est strictement positif car S_1 est définie positive ; le second est positif ou nul par hypothèse. Leur somme est strictement positive. Comme S_2 est symétrique, elle est donc définie positive.

En particulier, S_1 et S_2 sont toutes les deux inversibles, leurs noyaux étant réduits au vecteur nul.

11) b) Inversibilité de $S_1^{1/2}$ et calcul du produit.

Les valeurs propres de S_1 sont strictement positives par la question 9). Les valeurs propres de $T = S_1^{1/2}$ sont leurs racines carrées positives, donc sont également strictement positives. La diagonalisation de T montre qu'elle est inversible.

Posons $R = T^{-1} = S_1^{-1/2}$. L'égalité $S_1 = T^2$ donne :

$$RS_1R = T^{-1}T^2T^{-1} = I_n.$$

Par distributivité :

$$S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2} = RS_2R - RS_1R = RS_2R - I_n.$$

Conclusion

avec la notation de la question suivante, ce produit vaut $L - I_n$.

11) c) Symétrie de L et positivité de $L - I_n$.

La matrice T est symétrique et inversible, donc $R = T^{-1}$ est symétrique :

$${}^tR = ({}^tT)^{-1} = T^{-1} = R.$$

Comme S_2 est aussi symétrique :

$${}^tL = {}^t(RS_2R) = RS_2R = L.$$

Il en résulte que $L - I_n$ est également symétrique. Pour tout vecteur X , on utilise 11)b) et on pose $Y = RX$:

$${}^tX(L - I_n)X = {}^tXR(S_2 - S_1)RX = {}^tY(S_2 - S_1)Y \geq 0.$$

La dernière inégalité est exactement l'hypothèse de positivité de $S_2 - S_1$. Ainsi $L - I_n$ est symétrique positive.

11) d) Application de la question 10).

La question 11)c) a montré que L est symétrique et que $L - I_n$ est positive. On peut donc appliquer 10)b) avec $M = L$:

$$L \text{ est inversible et } I_n - L^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

11) e) Positivité de la différence des inverses.

Méthode 1 — Transport par la racine carrée.

On reprend $T = S_1^{1/2}$ et $R = T^{-1}$. Les facteurs de $L = RS_2R$ sont inversibles ; la règle de l'inverse d'un produit, dans l'ordre inversé, donne :

$$L^{-1} = TS_2^{-1}T.$$

D'autre part, comme $S_1 = T^2$, on a $S_1^{-1} = T^{-1}T^{-1}$, donc $TS_1^{-1}T = I_n$. Ainsi :

$$T(S_1^{-1} - S_2^{-1})T = I_n - L^{-1}.$$

La question 11)d) montre que cette matrice est symétrique positive. Cela établit la première positivité demandée.

Posons $K = S_1^{-1} - S_2^{-1}$. Les inverses de matrices symétriques sont symétriques, donc K est symétrique. Pour tout vecteur X , on pose $Y = T^{-1}X$; alors $X = TY$ et :

$${}^tXKX = {}^tY(TKT)Y \geq 0.$$

On conclut $S_1^{-1} - S_2^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Méthode 2 — Décomposition directe en deux termes positifs.

On peut également prouver directement la dernière conclusion par une identité quadratique. Pour tout X , posons $U = S_1^{-1}X$ et $V = S_2^{-1}X$. Les inverses existent par 11)a), et l'on a $S_1U = X = S_2V$.

En développant le carré et en utilisant la symétrie des matrices :

$${}^t(U - V)S_1(U - V) = {}^tXS_1^{-1}X - 2{}^tXS_2^{-1}X + {}^tVS_1V.$$

Par ailleurs :

$${}^tV(S_2 - S_1)V = {}^tVS_2V - {}^tVS_1V = {}^tXS_2^{-1}X - {}^tVS_1V.$$

En ajoutant les deux égalités, on obtient :

$${}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = {}^t(U - V)S_1(U - V) + {}^tV(S_2 - S_1)V \geq 0.$$

Le premier terme est positif ou nul par la définie positivité de S_1 , et le second par la positivité de $S_2 - S_1$. Comme la différence des inverses est symétrique, elle est positive. Pour obtenir aussi la première conclusion de la question, on remplace X par TY dans cette inégalité : ${}^tYT(S_1^{-1} - S_2^{-1})TY \geq 0$ pour tout Y ; le produit est symétrique puisque T et la différence des inverses le sont.

La première méthode suit la normalisation construite dans l'énoncé. La seconde donne une identité utilisable sans supposer que S_1 et S_2 commutent. Aucune des deux méthodes ne nécessite de comparer les coefficients des matrices.

Relevé des adaptations

Exercice 3, partie 2, questions 3), 4)a) et 5) : explicitation de la convention géométrique sur $\mathbb{N}^*$ et du cas de paramètre un ; ce cas apparaît lorsque $U_n = 0$, notamment pour $n = 1$. En 4)a), la puissance zéro vaut un même en zéro, afin d'interpréter correctement la probabilité du premier succès. Les questions et les résultats demandés sont conservés.

Problème, question 5) : explicitation de la convention du produit vide, nécessaire lorsque $p = 1$. L'énoncé mathématique est conservé.
