



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2025

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1.

1. (a) La fonction $g : x \mapsto \ln(x)/x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Ainsi $g'(x) > 0$ pour $0 < x < e$, $g'(e) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x > e$.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, pour $0 < x < e^{-1}$ on a $g(x) \leq -1/x$, d'où $g(x) \rightarrow -\infty$. Par croissance comparée, $g(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le tableau de variations est donc :

x	0^+	e	$+\infty$
Signe de g'	+ sur $]0, e[$	0	− sur $]e, +\infty[$
Variations de g	$-\infty$	maximum $1/e$	limite 0

La fonction croît strictement de $-\infty$ à $1/e$, puis décroît strictement de $1/e$ à 0.

1. (b) Comme $e < 3$, tous les entiers $k \geq 3$ appartiennent à l'intervalle de stricte décroissance de g . On a donc $g(k+1) < g(k)$: la suite demandée est strictement décroissante.

Pour $k \geq 4$, $g(k) \leq g(4)$ et

$$g(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ainsi $\forall k \geq 4$, $\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$, avec égalité pour $k = 4$ seulement.

2. (a) Pour $x > n$, les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x-n)$ sont dérivables ; leurs produits avec les fonctions affines le sont également. Par dérivation des produits,

$$f'_n(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}.$$

On peut donc écrire

$$f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}.$$

Toutes les fractions sont définies puisque $x > n \geq 1$.

2. (b) Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire.

Posons $\varphi(t) = t - 1 - \ln(t)$ pour $t > 0$. Sa dérivée est $\varphi'(t) = 1 - 1/t = (t-1)/t$. Elle est négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$. La fonction φ admet donc un minimum global en 1, de valeur 0.

Ainsi $\ln(t) \leq t - 1$ pour tout $t > 0$, avec égalité exactement lorsque $t = 1$.

Méthode 2 — Tangente à une fonction concave.

Le logarithme est strictement concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde est $-1/t^2 < 0$. Sa courbe est sous sa tangente au point d'abscisse 1, dont l'équation est $y = t - 1$. On retrouve $\ln(t) \leq t - 1$, avec égalité uniquement en 1.

La première méthode permet de retrouver l'inégalité par les variations ; la seconde l'inscrit dans le principe général des tangentes aux fonctions concaves.

Pour appliquer cette inégalité à f'_n , fixons $x > n$ et posons $t = x/(x-n)$. Comme $n > 0$, $t > 1$. La question précédente donne

$$f'_n(x) = \ln(t) + \frac{1}{t} - t \leq t - 1 + \frac{1}{t} - t = \frac{1}{t} - 1 < 0.$$

Par conséquent, f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

2. (c) La fonction f_n est continue sur $[n+1, n+2]$, segment inclus dans son domaine, et

$$f_n(n+1) = \ln(n+1) > 0.$$

D'autre part,

$$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2).$$

Puisque $n + 2 \geq 4$, la question 1. (b) implique $\ln(n + 2)/(n + 2) \leq \ln(2)/2$. En multipliant par $2(n + 2) > 0$, on obtient $f_n(n + 2) \leq 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une racine dans $[n + 1, n + 2]$. La stricte décroissance assure son unicité. On a plus précisément $n + 1 < x_n \leq n + 2$.

Pour $n = 2$, $f_2(4) = 0$, donc $x_2 = 4$. Pour $n > 2$, l'inégalité de 1. (b) est stricte au rang $n + 2$, donc $n + 1 < x_n < n + 2$.

3. En divisant l'encadrement précédent par $n > 0$, on obtient

$$1 + \frac{1}{n} < \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc $x_n/n \rightarrow 1$ par encadrement. Ainsi $x_n \sim n$ et, en particulier, $x_n \rightarrow +\infty$.

4. (a) Par définition, $f_n(x_n) = 0$, donc

$$(x_n - n) \ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n).$$

Comme $x_n > n + 1 > 0$, on peut diviser par x_n :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

Le logarithme de $x_n - n$ est bien défini puisque $x_n - n > 1$.

4. (b) Comme $x_n \rightarrow +\infty$ et $\ln(x)/x \rightarrow 0$ à l'infini, $\ln(x_n)/x_n \rightarrow 0$.

Or $1 < x_n - n \leq 2$. La relation de 4. (a) donne donc

$$0 \leq \ln(x_n - n) \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n} \rightarrow 0.$$

En appliquant la continuité de l'exponentielle, $x_n - n = \exp(\ln(x_n - n)) \rightarrow 1$.

Il n'est pas nécessaire de supposer d'abord que la suite $(x_n - n)$ converge : c'est l'encadrement du logarithme qui établit cette convergence.

5. (a) La question 4. (b) donne $u_n = x_n - n - 1 \rightarrow 0$. La question 2. (c) donne de plus $0 < u_n \leq 1$. Ainsi l'équivalent usuel du logarithme au voisinage de zéro s'applique sans division par zéro :

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n.$$

Pour le second équivalent, on utilise une identité exacte, puis une limite :

$$\ln(1 + n + u_n) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1 + u_n}{n}\right).$$

La seconde quantité tend vers 0, car $0 < (1 + u_n)/n \leq 2/n$. Comme $\ln(n) \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + (1 + u_n)/n)}{\ln(n)} \rightarrow 1.$$

D'où $\ln(1 + n + u_n) \sim \ln(n)$. Cette justification n'utilise aucune composition non justifiée d'équivalents.

5. (b) En remplaçant x_n par $n + 1 + u_n$ dans 4. (a), on obtient

$$\ln(1 + u_n) = (1 + u_n) \frac{\ln(n + 1 + u_n)}{n + 1 + u_n}.$$

Pour exhiber chaque facteur convergent, réécrivons :

$$\frac{u_n}{\ln(n)/n} = \frac{u_n}{\ln(1 + u_n)} (1 + u_n) \frac{\ln(n + 1 + u_n)}{\ln(n)} \frac{n}{n + 1 + u_n}.$$

Les quatre facteurs tendent respectivement vers 1, 1, 1 et 1, par 5. (a), $u_n \rightarrow 0$ et la bornitude de u_n . Tous les dénominateurs sont non nuls pour $n \geq 2$.

Ainsi $u_n \sim \ln(n)/n$.

6. Les termes u_n sont strictement positifs. Leur équivalent donne, pour n assez grand,

$$u_n \geq \frac{\ln(n)}{2n} \geq \frac{1}{2n}.$$

La série harmonique diverge ; par comparaison,

$$\sum_{n \geq 2} u_n$$

diverge vers $+\infty$.

Pour les carrés, $u_n^2 \sim (\ln(n))^2/n^2$. Les croissances comparées donnent

$$\frac{(\ln(n))^2/n^2}{1/n^{3/2}} = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Ainsi $u_n^2 = o(n^{-3/2})$. La série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$ converge, donc

$$\sum_{n \geq 2} u_n^2$$

converge.

Exercice 2.

Pour une projection orthogonale p sur F , on utilise les propriétés $p(x) \in F$, $x - p(x) \in F^\perp$ et $p(x) = x$ lorsque $x \in F$.

1. (a) Si $x \in F$, alors $p(x) = x$, donc $\|p(x)\| = \|x\|$. Cela prouve $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.
1. (b) La décomposition $x = (x - p(x)) + p(x)$ est orthogonale : son premier terme appartient à $F^\perp$ et son second à F . Par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2.$$

1. (c) Si $\|p(x)\| = \|x\|$, l'identité précédente implique $\|x - p(x)\|^2 = 0$. Une norme s'annule seulement au vecteur nul ; donc $x = p(x) \in F$. Avec 1. (a), cela établit l'égalité des ensembles.

Enfin $\|x - p(x)\|^2 \geq 0$ entraîne $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Les normes étant positives, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

2. (a) Prenons $x \in F_1 \cap F_2$. Alors $p_2(x) = x$ et $p_1(x) = x$, d'où

$$p_3(x) = p_1(p_2(x)) = x.$$

Comme $p_3(x) \in F_3$, $x \in F_3$. Ainsi $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

2. (b) Pour $x \in F_3$, $p_3(x) = x$, donc, en utilisant 1. (c) pour p_1 ,

$$\|x\| = \|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|.$$

En appliquant 1. (c) à p_2 , on a aussi $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$. D'où $\|p_2(x)\| = \|x\|$, et la caractérisation de 1. (c) donne $x \in F_2$.

On a alors $p_2(x) = x$, et

$$x = p_3(x) = p_1(p_2(x)) = p_1(x) \in F_1.$$

Ainsi tout vecteur de F_3 appartient à $F_1 \cap F_2$.

2. (c) Les deux inclusions de 2. (a) et 2. (b) donnent $F_3 = F_1 \cap F_2$.

2. (d) La projection orthogonale p_3 est un endomorphisme symétrique, d'après le résultat rappelé dans le sujet. Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle.$$

En utilisant $p_3 = p_1 \circ p_2$ et successivement la symétrie de p_1 puis de p_2 , on obtient

$$\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle x, p_1(p_2(y)) \rangle = \langle p_1(x), p_2(y) \rangle = \langle p_2(p_1(x)), y \rangle.$$

Cela prouve l'égalité demandée.

2. (e) Fixons $x \in E$ et posons $v = (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x)$. La question précédente donne $\langle v, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$.

En prenant $y = v$, $\|v\|^2 = 0$, donc $v = 0$. L'égalité vaut pour tout $x \in E$, d'où $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3. (a) La composée $p = p_1 \circ p_2$ est linéaire. Puisque les deux applications commutent et sont des projecteurs,

$$p^2 = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2 = p.$$

La caractérisation des projecteurs par $p^2 = p$ montre que p est un projecteur de E .

3. (b) Pour tous $x, y \in E$, la symétrie des deux projections donne

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p_1(p_2(x)), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle = \langle x, p_2(p_1(y)) \rangle.$$

Comme elles commutent, $p_2(p_1(y)) = p(y)$; ainsi $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$. Donc p est symétrique.

3. (c) Par 3. (a), 3. (b) et le résultat rappelé dans le sujet, p est une projection orthogonale sur son image. Déterminons celle-ci sans présupposer que l'intersection est non triviale.

Pour tout $x \in E$, $p(x) = p_1(p_2(x)) \in F_1$. En utilisant la commutation, $p(x) = p_2(p_1(x)) \in F_2$. Ainsi $\text{Im}(p) \subset F_1 \cap F_2$.

Inversement, pour $z \in F_1 \cap F_2$, $p(z) = p_1(p_2(z)) = z$, donc $z \in \text{Im}(p)$.

Ainsi $\text{Im}(p) = F_1 \cap F_2$, et $p_1 \circ p_2$ est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$.

Si l'intersection est réduite à $\{0\}$, cette projection est l'endomorphisme nul; le raisonnement reste valable.

4. Pour deux projections orthogonales p_1 et p_2 sur les sous-espaces F_1 et F_2 d'un espace euclidien, leur composée $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale si et seulement si

elles commutent :

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1.$$

Dans ce cas, les deux composées sont la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$.

La nécessité a été démontrée en 2 ; la suffisance et l'identification de l'image ont été démontrées en 3. Ce résultat vaut aussi pour les sous-espaces triviaux, bien que le sujet se place initialement dans un cadre non trivial.

Exercice 3.

Partie 1. Étude d'une variable aléatoire.

1. Pour $x \leq 0$, $-2x \geq 0$ et $e^{-x^2} > 0$, donc $f(x) \geq 0$. Pour $x > 0$, $f(x) = 0$. La fonction est continue sur chaque demi-droite et aussi en 0, car $-2xe^{-x^2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^-$.

Pour $a < 0$, en utilisant la primitive $x \mapsto e^{-x^2}$,

$$\int_a^0 f(x) dx = \left[e^{-x^2} \right]_a^0 = 1 - e^{-a^2}.$$

Lorsque $a \rightarrow -\infty$, $e^{-a^2} \rightarrow 0$. Par conséquent l'intégrale impropre converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Ainsi f est une densité de probabilité.

2. Pour $x \leq 0$, on intègre la densité sur $] -\infty, x]$:

$$F(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{-x^2} - e^{-a^2}) = e^{-x^2}.$$

Pour $x > 0$, la densité est nulle sur $]0, x]$ et toute la masse est dans $] -\infty, 0]$, donc $F(x) = 1$. Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En particulier, $F(0) = 1$ et F est continue en 0.

3. Pour une normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 = 1/2$, on a $\sigma = 1/\sqrt{2}$. La densité usuelle devient

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ici le second paramètre de $\mathcal{N}(0, 1/2)$ désigne bien la variance.

4. Méthode 1 — Second moment de la loi normale.

Soit U de loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$. Ses moments usuels donnent $E(U^2) = 1/2$. Le transfert, et la parité de $x^2 e^{-x^2}$, impliquent

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Ces intégrales positives sont finies. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < +\infty.$$

L'espérance de X existe donc absolument, et

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 -2x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Méthode 2 — Intégration par parties et normalisation gaussienne.

La normalisation de la densité φ et sa parité donnent $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. Pour $a < 0$, on effectue l'intégration par parties sur le segment $[a, 0]$, avec $u(x) = x$ et

$v'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc $v(x) = e^{-x^2}$:

$$\int_a^0 -2x^2 e^{-x^2} dx = \left[x e^{-x^2} \right]_a^0 - \int_a^0 e^{-x^2} dx = -a e^{-a^2} - \int_a^0 e^{-x^2} dx.$$

Par croissance comparée, $a e^{-a^2} \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow -\infty$. On obtient la limite $-\sqrt{\pi}/2$.

Comme l'intégrande est négative, l'intégrale de sa valeur absolue est l'opposée de cette intégrale et vaut $\sqrt{\pi}/2$. Cela justifie l'existence de l'espérance et redonne sa valeur.

La première méthode réutilise un moment normal connu ; la seconde montre directement comment l'intégration par parties ramène le calcul à l'intégrale de normalisation.

5. Pour $x \geq 0$, puisque $X \leq 0$,

$$\{Z \leq x\} = \{X^2 \leq x\} = \{-\sqrt{x} \leq X \leq 0\}.$$

La variable X ayant une densité, $P(X = -\sqrt{x}) = 0$. Il en résulte

$$G(x) = 1 - F(-\sqrt{x}) = 1 - e^{-x}.$$

Pour $x < 0$, $Z \geq 0$ entraîne $G(x) = 0$. Ainsi

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de taux 1. Donc $Z \sim \mathcal{E}(1)$.

6. La loi exponentielle de taux 1 possède une espérance égale à 1. Puisque $X^2 = Z$, $E(X^2) = 1 < +\infty$. Avec l'existence de l'espérance de X déjà établie, la variance existe et la formule de Koenig-Huygens donne

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Cette quantité est strictement positive puisque $\pi < 4$.

7. Comme $X \leq 0$ et $Z = X^2$, on a $X = -\sqrt{Z}$. Pour simuler la loi de X , on tire donc une exponentielle de taux 1, puis on prend l'opposé de sa racine carrée.

L'instruction `rd.exponential(1)` utilise une échelle égale à 1, donc un taux égal à 1. Le code complet est :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(n):
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i] = -np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M

def EsperanceX(n):
    M = simulX(n)
    total = 0.0
    for i in range(n):
        total = total + M[i]
    return total / n
```

La fonction `simulX` renvoie un tableau NumPy à une dimension, de longueur n ; la boucle remplit les indices 0 à $n - 1$. Pour `EsperanceX`, on suppose $n \geq 1$ afin que la division soit définie. La somme est calculée par une boucle, sans fonction de calcul de moyenne issue d'une bibliothèque.

La sortie est la moyenne empirique de n simulations indépendantes. Le modèle mathématique des tirages vérifie les hypothèses de la loi faible des grands nombres : les variables ont la même loi, sont indépendantes et possèdent une variance finie. La moyenne converge donc en probabilité vers $-\sqrt{\pi}/2$. Un tirage particulier donne seulement une approximation aléatoire.

Le code a été exécuté lors du contrôle : les valeurs simulées sont non positives et les moyennes et variances empiriques sont cohérentes avec $-\sqrt{\pi}/2$ et $1 - \pi/4$. Ces observations expérimentales ne remplacent pas les preuves.

Question adaptée au programme actuel : la description « matrice ligne » du PDF est remplacée par « tableau de longueur n », car `np.zeros(n)` produit un tableau à une dimension ; le domaine $n \geq 1$ de la moyenne est explicité. Le code est déjà en Python dans le sujet original.

Partie 2. Étude d'une convergence en loi.

8. Sur $[0, 1]$, $2(1 - x) \geq 0$, et hors de ce segment $h(x) = 0$. La fonction est continue sauf éventuellement en 0 et son intégrale vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \int_0^1 2(1 - x) dx = [2x - x^2]_0^1 = 1.$$

Ainsi h est une densité.

9. Pour $x < 0$, $H(x) = 0$. Pour $x \in [0, 1]$,

$$H(x) = \int_0^x 2(1 - t) dt = 2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2.$$

Pour $x > 1$, $H(x) = 1$. On a donc

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les expressions coïncident aux bornes 0 et 1 : H y est continue.

10. Fixons $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sqrt{n} > 0$,

$$\{T_n \leq x\} = \left\{M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right\} = \bigcap_{k=1}^n \left\{Y_k \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Les Y_k sont mutuellement indépendantes; les événements ci-dessus sont donc indépendants. Elles ont aussi toutes la même fonction de répartition H . Ainsi

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^n H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Cette formule vaut pour tout réel x , y compris lorsque l'argument de H est hors de $[0, 1]$.

11. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $1 + y/n > 0$. Si $y = 0$, la suite est constamment égale à $1 = e^0$.

Si $y \neq 0$, l'équivalent usuel $\ln(1 + t) \sim t$ lorsque $t \rightarrow 0$ donne

$$n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) = y \frac{\ln(1 + y/n)}{y/n} \rightarrow y.$$

En utilisant la continuité de l'exponentielle,

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \rightarrow e^y.$$

Les éventuelles valeurs initiales pour lesquelles la base est négative n'affectent pas la limite; le logarithme n'a été utilisé qu'à partir d'un rang où la base est positive.

12. Étudions la limite de $F_n(x)$ pour tout réel x .

Si $x \geq 0$, $1 + x/\sqrt{n} \geq 1$ et $H(1 + x/\sqrt{n}) = 1$, donc $F_n(x) = 1 = F(x)$ pour tout n .

Si $x < 0$, pour n assez grand on a $0 < 1 + x/\sqrt{n} < 1$. La formule de H sur $[0, 1]$ donne alors

$$H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Donc $F_n(x) = (1 - x^2/n)^n \rightarrow e^{-x^2} = F(x)$, par 11 avec $y = -x^2$.

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0. Les fonctions de répartition F_n convergent ainsi vers F en tous les points de continuité de celle-ci. Par définition de la convergence en loi, T_n converge en loi vers X .

Cette preuve passe uniquement par les fonctions de répartition.

Problème

Les notations de ce problème sont indépendantes de celles des exercices précédents. On a $B_n = 4^{-n} \binom{2n}{n} > 0$ pour tout $n \geq 0$ et $B_0 = 1$.

Partie 1.

1. Pour $n \geq 1$, la formule factorielle du coefficient binomial donne

$$B_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{4k}.$$

En effet, le produit des numérateurs vaut $(n+1)(n+2) \cdots (2n) = (2n)!/n!$, et le produit des dénominateurs vaut $4^n n!$.

Pour $n = 0$, le produit est vide et vaut 1 par convention, ce qui correspond à B_0 .

Le code demandé est donc :

Python

```
def B(n):
    P = 1.0
    for k in range(1, n + 1):
        P = P * (k + n) / (4 * k)
    return P
```

L'initialisation correspond au produit vide. La boucle parcourt exactement les entiers

$1, \dots, n$, car la borne supérieure de range est exclusive. Après le passage à l'indice k , P vaut le produit des k premiers facteurs. La fonction renvoie donc B_n , à l'arrondi numérique près.

Pour $n = 0$, la boucle n'effectue aucune itération et la sortie vaut 1. Le code a été exécuté et comparé à la formule binomiale pour plusieurs valeurs, dont 0, 1 et 2 ; il donne notamment 1, $1/2$ et $3/8$.

Partie 2.

Pour tout $n \geq 0$, $\sin(t)^n$ est continue sur $[0, \pi/2]$, avec la convention $\sin(t)^0 = 1$ pour $n = 0$. Les intégrales W_n sont donc définies. Elles sont strictement positives, puisque l'intégrande est strictement positive sur $]0, \pi/2[$.

2. Par intégration directe,

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \, dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1.$$

3. Pour $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, donc $\sin(t)^{n+1} \leq \sin(t)^n$. La croissance de l'intégrale entraîne $W_{n+1} \leq W_n$.

La suite est même strictement décroissante : pour $t \in]0, \pi/2[$, $0 < \sin(t) < 1$, donc la différence des intégrandes est strictement positive sur cet intervalle.

4. On écrit

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} \sin(t) \, dt.$$

Sur ce segment, posons $u(t) = \sin(t)^{n+1}$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $v(t) = -\cos(t)$ et

$u'(t) = (n+1) \sin(t)^n \cos(t)$. L'intégration par parties donne

$$W_{n+2} = [-\sin(t)^{n+1} \cos(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \cos(t)^2 dt.$$

Le terme de bord est nul : $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(0)^{n+1} = 0$. En utilisant $\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$, on obtient

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

Ainsi $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Cette démonstration est valable aussi pour $n = 0$.

5. Méthode 1 — Itération de la relation de récurrence.

Pour $n \geq 1$, en itérant la relation de 4 sur les indices pairs,

$$W_{2n} = W_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}.$$

Or

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = B_n.$$

$$\text{D'où } W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n.$$

En itérant sur les indices impairs,

$$W_{2n+1} = W_1 \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$

Pour $n = 0$, les deux identités se réduisent à $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$, puisque $B_0 = 1$.

Méthode 2 — Comparaison des récurrences.

La formule factorielle de B_n donne, pour $n \geq 0$,

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Les suites (W_{2n}) et $((\pi/2)B_n)$ ont donc le même terme initial et la même relation de récurrence; une récurrence sur n donne leur égalité.

Pour la suite $C_n = 1/((2n+1)B_n)$, on calcule

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(2n+1)B_n}{(2n+3)B_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+3}.$$

C'est aussi le rapport W_{2n+3}/W_{2n+1} , et $C_0 = W_1 = 1$. Une récurrence donne $W_{2n+1} = C_n$.

La première méthode rend visibles les produits pairs et impairs; la seconde est utile pour vérifier une formule conjecturée en comparant initialisation et récurrence.

6. Pour $n \geq 1$, appliquons 4 à l'indice $2n-1$:

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}.$$

Tous les facteurs sont positifs. D'après 5,

$$W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n} \frac{1}{(2n+1)B_n} = \frac{1}{2nB_n}.$$

7. Par décroissance de (W_n) , pour $n \geq 1$,

$$W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}.$$

Les formules de 5 et 6 donnent exactement

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}.$$

Comme $B_n > 0$, on peut multiplier chaque inégalité par B_n . La première entraîne $B_n^2 \geq 2/(\pi(2n+1))$ et la seconde $B_n^2 \leq 1/(\pi n)$. D'où

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1/2}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Puisque $n+1/2 \leq n+1$, la borne inférieure précédente est au moins $1/(\sqrt{\pi}\sqrt{n+1})$. On obtient bien l'encadrement demandé :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

8. Multiplions l'encadrement demandé par $\sqrt{\pi n} > 0$:

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc $\sqrt{\pi n} B_n \rightarrow 1$. Ainsi

$$B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Cet équivalent est obtenu directement par les intégrales de Wallis, sans formule de Stirling.

Partie 3.

Puisque X_k prend seulement les valeurs -1 et 1 , de probabilités égales, chacune de ces probabilités vaut $1/2$.

9. (a) La variable $Y_k = (X_k + 1)/2$ vaut 0 si $X_k = -1$ et 1 si $X_k = 1$, chaque fois avec probabilité $1/2$. Ainsi Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Ses moments usuels sont

$$E(Y_k) = \frac{1}{2}, \quad V(Y_k) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

9. (b) Par définition,

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Les variables Y_k sont mutuellement indépendantes, car elles sont des fonctions séparées des variables mutuellement indépendantes X_k . Elles sont toutes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Par la loi d'une somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre, $T_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

Donc, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(T_n = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

9. (c) Méthode 1 — Transformation de la binomiale.

L'identité de 9. (b) donne $S_n = 2T_n - n$. La variable T_n prend exactement les valeurs $0, \dots, n$, chacune avec une probabilité strictement positive. Ainsi

$$S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Pour chaque $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(S_n = 2j - n) = P(T_n = j) = \frac{\binom{n}{j}}{2^n}.$$

La probabilité est nulle pour toute autre valeur.

Méthode 2 — Dénombrement des signes.

Si, parmi les n termes, exactement j valent 1, les $n - j$ autres valent -1 et la somme est $j - (n - j) = 2j - n$. Il y a $\binom{n}{j}$ manières de choisir les positions des 1.

Par indépendance, chaque configuration complète de signes a une probabilité $(1/2)^n$. Les configurations correspondant à des choix distincts sont disjointes. Leur réunion a donc une probabilité $\binom{n}{j}/2^n$.

Cette probabilité étant positive pour chaque j , toutes les valeurs annoncées sont effectivement prises. La première méthode réutilise la loi binomiale ; la seconde explique directement l'origine du coefficient combinatoire.

10. (a) D'après 9. (c), S_m prend seulement des valeurs de même parité que m . Pour un indice impair m , aucune valeur possible n'est nulle. Les retours à 0 parmi les instants $1, \dots, 2n$ ont donc lieu uniquement aux instants pairs $2, 4, \dots, 2n$.

La correspondance $k \mapsto 2k$ entre $\llbracket 1, n \rrbracket$ et les instants pairs donne, pour toute réalisation,

$$R_n = \text{Card}(\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_{2k} = 0\}).$$

10. (b) Pour S_{2k} , la valeur 0 correspond dans 9. (c) à $j = k$. Ainsi

$$P(S_{2k} = 0) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = B_k.$$

10. (c) Pour chaque réalisation ω , l'indicatrice $\mathbf{1}_{A_k}(\omega)$ vaut 1 exactement lorsque le retour $S_{2k}(\omega) = 0$ a lieu. En les additionnant, on compte tous ces retours :

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}.$$

10. (d) La variable R_n est comprise entre 0 et n , donc elle admet une espérance. Chaque indicatrice est également bornée et son espérance vaut la probabilité de l'événement associé. Par linéarité d'une somme finie,

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n E(\mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^n B_k.$$

L'indépendance des événements A_k n'est pas requise pour ce calcul.

11. Méthode 1 — Rationalisation des différences.

Pour $k \geq 1$,

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

car $\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}$. De même,

$$2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

car $\sqrt{k-1} \leq \sqrt{k}$. Les dénominateurs sont strictement positifs, y compris pour $k = 1$. Cela prouve les deux inégalités.

Méthode 2 — Comparaison par intégrales.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Sur $[k, k+1]$, elle est au plus $1/\sqrt{k}$, donc

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Sur $[k-1, k]$, elle est au moins $1/\sqrt{k}$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Pour $k = 1$, l'intégrale en 0 est impropre mais converge : $\int_{\varepsilon}^1 t^{-1/2} dt = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 2$.

L'inégalité demeure donc valable.

La rationalisation fournit une preuve algébrique immédiate ; la comparaison intégrale explique pourquoi ces différences de racines sont adaptées à une sommation télescopique.

12. La question 7 donne, pour chaque $k \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}.$$

En utilisant la borne gauche de 11 à l'indice $k+1$ et la borne droite à l'indice k , on obtient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \leq B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Les deux sommes se télescopent. En sommant pour $k = 1, \dots, n$ et en utilisant 10. (d),

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) \leq E(R_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

En divisant par $(2/\sqrt{\pi})\sqrt{n} > 0$, la borne inférieure devient $\sqrt{1+2/n} - \sqrt{2/n}$ et la borne supérieure vaut 1. Les deux tendent vers 1.

Ainsi

$$E(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Cette méthode somme des encadrements valables à chaque rang ; elle ne suppose pas qu'un équivalent puisse être additionné sans justification.

Partie 4.

13. (a) Par définition de B_n ,

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{4^n B_n}.$$

La question 8 donne $B_n \sim 1/\sqrt{\pi n}$. Comme les termes sont strictement positifs, on peut prendre les inverses puis multiplier par 4^{-n} :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}.$$

13. (b) Pour $x = 0$, tous les termes de la série sont nuls : elle converge et sa somme vaut 0.

Supposons $0 < x < 4$ et posons $q = x/4 \in]0, 1[$. La question précédente donne

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \sim \sqrt{\pi} \sqrt{n} q^n.$$

Or $0 \leq \sqrt{n} q^n \leq n q^n$ pour $n \geq 1$. La série géométrique dérivée, résultat du programme, donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2} < +\infty.$$

Par comparaison,

$$\sum \sqrt{n} q^n$$

converge. Par équivalence de séries à termes positifs, la série demandée converge donc également.

Aucun critère général de convergence fondé sur le rapport des termes n'a été utilisé.

14. Fixons $0 \leq x < y < 4$. Pour chaque $n \geq 1$, $x^n \leq y^n$ et $\binom{2n}{n} > 0$. Les sommes partielles vérifient donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^N \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Les deux suites de sommes partielles convergent, d'après 13. (b). Le passage à la limite donne $f(x) \leq f(y)$: f est croissante.

On obtient même la stricte croissance en isolant le terme de rang 1 : pour tout $N \geq 1$, la différence des sommes partielles est au moins $(y - x)/2$. En passant à la limite,

$$f(y) - f(x) \geq \frac{y - x}{2} > 0.$$

La continuité de f sur $]0, 4[$ est admise dans l'énoncé. Elle est utilisée en 17 pour tracer une courbe continue sur cet intervalle, sans dérivation ni passage d'une limite sous une somme infinie.

15. (a) Pour $n \geq 1$, les bornes de 7 s'inversent puisque $B_n > 0$:

$$\sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq \frac{1}{B_n} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}.$$

Pour $x \in [0, 4[$, posons $q = x/4 \geq 0$. En multipliant ces inégalités par q^n , on obtient

$$\sqrt{\pi}\sqrt{n} q^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1} q^n.$$

Or $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \leq n+1$. En affaiblissant les deux bornes, on trouve exactement

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

Pour $x = 0$, les trois termes sont nuls, donc l'encadrement reste valable.

15. (b) Avec $q = x/4 \in [0, 1[$, les séries géométriques usuelles convergent et valent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Sommons d'abord les inégalités de 15. (a) jusqu'au rang N , puis faisons tendre N vers l'infini. Les trois sommes convergent, donc

$$\sqrt{\pi} \frac{q}{1-q} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q} \right).$$

Comme $q/(1-q) = x/(4-x)$, c'est l'encadrement demandé :

$$\sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, les deux bornes tendent vers 0, donc $f(x) \rightarrow 0$. Comme $f(0) = 0$ par la définition de la série, f est continue en 0 relativement à son domaine $[0, 4[$.

Lorsque $x \rightarrow 4^-$, la borne inférieure $\sqrt{\pi}x/(4-x)$ tend vers $+\infty$. Ainsi $f(x) \rightarrow +\infty$. La droite $x = 4$ est une asymptote verticale de la courbe.

16. Le premier terme de la série vaut $x/\binom{2}{1} = x/2$ et tous les autres sont positifs ou nuls. Ainsi

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{x}{2}.$$

Pour $x > 0$, le terme de rang 2 vaut $x^2/6 > 0$, donc $f(x) > x/2$. L'égalité est obtenue seulement en $x = 0$.

17. Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le sujet original :

$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0^+.$$

Puisque $f(0) = 0$, ce développement entraîne $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \rightarrow 1/2$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La courbe admet donc en l'origine une demi-tangente d'équation $y = x/2$.

En réunissant les questions précédentes, la courbe passe par $(0, 0)$, est continue et strictement croissante sur $[0, 4[$, reste strictement au-dessus de la droite $y = x/2$ pour $x > 0$, et tend vers $+\infty$ à l'approche de l'asymptote verticale $x = 4$.

On peut préciser sa convexité sans dériver la série. Chaque monôme $x \mapsto x^n$ est convexe sur $[0, 4[$: il est affine pour $n = 1$ et sa dérivée seconde est positive ou nulle pour $n \geq 2$. Les sommes partielles de la série, à coefficients positifs, sont donc convexes.

Pour $x, y \in [0, 4[$ et $\theta \in [0, 1]$, on applique l'inégalité de convexité à chaque somme partielle, puis on passe à la limite dans les trois valeurs de ces sommes, dont la convergence est établie en 13. (b). On obtient

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

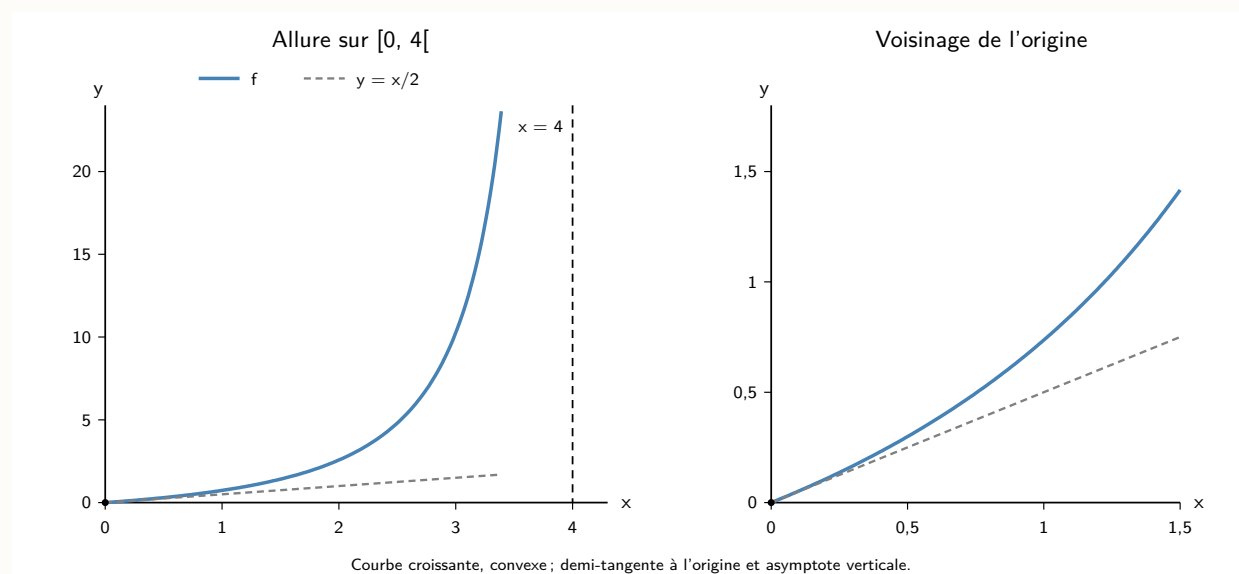
La fonction f est donc convexe. Elle est même strictement convexe : pour $x \neq y$ et $0 < \theta < 1$, le terme $x^2/6$ produit à lui seul un écart strict égal à $\theta(1 - \theta)(x - y)^2/6$, tandis que les autres écarts sont positifs ou nuls.

Le tracé ci-dessous représente la série, sa demi-tangente en 0 et son asymptote verticale. Le panneau de droite agrandit le voisinage de l'origine ; dans le panneau de gauche, la courbe continue au-delà du cadre en croissant vers l'asymptote.

Les ordonnées sont calculées à partir de 1000 termes de la série. Pour $q = x/4 < 1$, le reste après le rang N est majoré, grâce à 15. (a), par

$$\sqrt{\pi} \sum_{n=N+1}^{+\infty} (n+1)q^n = \sqrt{\pi} q^{N+1} \left(\frac{N+2}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2} \right).$$

Cette majoration se déduit des sommes géométriques en écrivant $n = N + 1 + j$. Sur les intervalles représentés, elle est inférieure à 10^{-60} pour $N = 1000$; l'arrondi des coordonnées graphiques domine donc largement l'erreur de troncature.



Relevé des adaptations

Exercice 3, question 7 : rectification de la description de `np.zeros(n)` en « tableau de longueur n », car ce résultat a une seule dimension ; précision $n \geq 1$ pour la fonction calculant la moyenne afin d'éviter une division par zéro. Aucune conversion de langage n'est nécessaire : le code original est déjà en Python.