



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EDHEC**

Mathématiques

**2024**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Corrigé

## Exercice 1

---

- 1) a) Toutes les colonnes de  $J_n$  sont égales au vecteur non nul  $V_n = {}^t(1, \dots, 1)$ . L'espace engendré par les colonnes est donc la droite  $\text{Vect}(V_n)$ , d'où :

$$\text{rg}(J_n) = 1.$$

Le théorème du rang donne  $\dim \text{Ker}(J_n) = n - 1$ . Puisque  $n \geq 2$ , le noyau contient un vecteur non nul : 0 est donc valeur propre, et son espace propre a pour dimension  $n - 1$ .

Plus explicitement, pour  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ , on a

$$J_n X = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) V_n.$$

Ainsi :

$$E_0(J_n) = \text{Ker}(J_n) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}.$$

- b) Chaque composante de  $J_n V_n$  est la somme de  $n$  termes égaux à 1. Par conséquent :

$$J_n V_n = n V_n.$$

Le vecteur  $V_n$  est non nul : c'est un vecteur propre associé à la valeur propre  $n$ .

- c) Les espaces propres  $E_0(J_n)$  et  $E_n(J_n)$  sont en somme directe, car les valeurs propres 0 et  $n$  sont distinctes. Le premier a pour dimension  $n - 1$  et le second contient la droite  $\text{Vect}(V_n)$ . Ces dimensions épuisent la dimension  $n$  de l'espace. Il n'existe donc aucune autre valeur propre et  $E_n(J_n) = \text{Vect}(V_n)$ .

$$\operatorname{Sp}(J_n) = \{0, n\}, \quad \dim E_0(J_n) = n - 1, \quad \dim E_n(J_n) = 1.$$

Autre méthode : en multipliant les matrices, on constate que  $J_n^2 = nJ_n$ . Si  $J_n X = \lambda X$  avec  $X \neq 0$ , alors  $\lambda^2 X = n\lambda X$ , donc  $\lambda(\lambda - n) = 0$ . Toute valeur propre est 0 ou  $n$  ; les questions a) et b) ont établi que les deux existent.

2) La fonction  $f_n$  est un polynôme en les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ . Ses dérivées partielles de tout ordre existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^n$ .

3) a) Posons

$$S(x) = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Comme  $\partial_i S(x) = 1$ , on obtient :

$$\partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} S(x) = \frac{2}{n} \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

b) Le gradient s'annule exactement lorsque, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = S(x)/n$ . Toutes les coordonnées sont alors égales.

Réciproquement, si  $x = (a, \dots, a)$ , alors  $S(x) = na$  et chaque dérivée partielle s'annule. Ainsi, l'ensemble des points critiques est :

$$\{(a, \dots, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

4) a) En dérivant l'expression précédente, pour tout  $i$ , on trouve :

$$\partial_{ii}^2 f_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

Pour  $i \neq j$ , on a :

$$\partial_{ij}^2 f_n(x) = -\frac{2}{n^2}.$$

Ces dérivées ne dépendent pas de  $x$ .

- b)** La matrice  $nI_n - J_n$  a pour coefficients diagonaux  $n-1$  et pour coefficients hors diagonale  $-1$ . Les calculs de a) donnent donc, en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\nabla^2 f_n(x) = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n).$$

Cette identité vaut notamment en chaque point critique  $(a, \dots, a)$ .

- c)** La commande `np.eye(n)` construit la matrice identité, tandis que `np.ones((n, n))` construit une matrice carrée dont chaque coefficient vaut 1.

### Python

```
import numpy as np

n = int(input('entrez la valeur de n:'))

I = np.eye(n)
J = np.ones((n, n))

Hessienne = (2 / n**2) * (n * I - J)

print(Hessienne)
```

Le programme suppose, comme l'exercice, que l'utilisateur entre un entier  $n \geq 2$ . Il affiche la hessienne sous forme d'un tableau NumPy de dimensions  $n \times n$ . Les opérations sont ici des additions et des multiplications par des scalaires.

Code exécuté pour  $n = 2$  et  $n = 3$ . Pour  $n = 2$ , la matrice affichée est :

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

d) Si  $J_n X = \lambda X$ , alors :

$$\nabla^2 f_n(a, \dots, a)X = \frac{2}{n^2}(n - \lambda)X.$$

Ainsi, sur  $\text{Vect}(V_n)$ , la hessienne a pour valeur propre 0, et sur  $E_0(J_n)$ , elle a pour valeur propre  $2/n$ . Ces sous-espaces forment une somme directe de dimension  $n$ , donc :

$$\text{Sp}(\nabla^2 f_n(a, \dots, a)) = \left\{ 0, \frac{2}{n} \right\}.$$

Les dimensions des espaces propres correspondants sont respectivement 1 et  $n - 1$ . La hessienne possède une valeur propre nulle, sans valeurs propres de signes opposés : le critère local par la hessienne ne permet pas de conclure. On ne peut pas déduire un minimum local de ce seul critère.

5) a) On applique Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $v = (1, \dots, 1)$  du produit scalaire canonique :

$$\langle x, v \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|v\|^2.$$

Comme

$$\langle x, v \rangle = \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et  $\|v\|^2 = n$ , on obtient :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

L'égalité a lieu exactement lorsque  $x$  et  $v$  sont colinéaires, donc lorsque toutes les coordonnées de  $x$  sont égales.

**b)** L'inégalité précédente donne  $f_n(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Or, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$f_n(a, \dots, a) = \frac{na^2}{n} - \left( \frac{na}{n} \right)^2 = 0.$$

Le minimum global est donc 0, et il est atteint en chaque point critique, exactement sur la droite des vecteurs à coordonnées égales. Ces minima ne sont pas stricts, car une infinité d'autres points de cette droite sont arbitrairement proches de chacun d'eux.

Autre méthode : posons

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

En développant une somme de carrés :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 = f_n(x).$$

Cette écriture établit directement la positivité et montre que  $f_n(x) = 0$  si et seulement si  $x_k = \bar{x}$  pour tout  $k$ .

6) a) Pour  $n = 2$ , une simplification donne :

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{(x - y)^2}{4}.$$

La fonction complétée est :

### Python

```
def f_2(x, y):
    z = (x - y)**2 / 4
    return z
```

Le code a été exécuté : il renvoie 0 pour  $(x, y) = (1, 1)$  et 4 pour  $(x, y) = (2, -2)$ , conformément à la formule.

b) La surface cherchée est la Surface 1.

En effet,  $f_2$  est positive et s'annule sur toute la droite  $x = y$ . Sur le carré représenté  $[-2, 2]^2$ , son maximum vaut 4, atteint en  $(2, -2)$  et  $(-2, 2)$  : ce sont les deux sommets où  $|x - y| = 4$ . La Surface 1 présente précisément une vallée nulle suivant la diagonale et deux relèvements opposés culminant à 4.

La Surface 2 a un minimum isolé, alors que  $f_2$  possède toute une droite de minima. La Surface 3 comporte des valeurs négatives, impossibles pour  $f_2$ .

## Exercice 2

---

1) a) La dérivée de la fonction arctangente est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

b) Posons  $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$  pour  $x > 0$ . Cette fonction est dérivable et :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+1/x^2} = 0.$$

Elle est constante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Comme  $h(1) = 2 \operatorname{Arctan}(1) = \pi/2$ , on obtient :

$$\forall x > 0, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}.$$

Autre méthode : si  $\theta = \operatorname{Arctan}(x) \in ]0, \pi/2[$ , les formules du sinus et du cosinus donnent  $\tan(\pi/2 - \theta) = 1/\tan \theta = 1/x$ . Puisque  $\pi/2 - \theta$  appartient aussi à l'intervalle où la tangente est bijective,  $\operatorname{Arctan}(1/x) = \pi/2 - \theta$ .

- c) La fonction arctangente est dérivable en 0, avec  $\operatorname{Arctan}(0) = 0$  et  $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$ . Par définition de la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} = 1.$$

Ainsi  $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

- 2) a) La fonction  $f$  est continue, positive et paire sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \geq 0$ , on a  $e^x + e^{-x} \geq e^x$ , donc :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi} e^{-x}.$$

L'intégrale de cette majorante sur  $[0, +\infty[$  vaut  $2/\pi$ . Par comparaison,  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge. La parité assure aussi la convergence sur  $] -\infty, 0]$ , d'où la convergence de l'intégrale sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Posons  $A(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x)$ . On vérifie :

$$A'(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})} = f(x).$$

Pour tous réels  $a < b$ , le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a). \text{ Or :}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} A(a) = 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} A(b) = 1.$$

Par passage aux limites dans les intégrales impropres déjà convergentes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \text{ La fonction } f \text{ est positive, continue et normalisée : elle est une densité.}$$

**3)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la définition de la fonction de répartition et la primitive précédente donnent :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = A(x) - \lim_{a \rightarrow -\infty} A(a) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(e^x).$$

**4)** a) La fonction  $F$  est continue et  $F'(x) = f(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle est strictement croissante, avec limites 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ . Le théorème de la bijection montre que  $F$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$ .

**b)** Pour  $u \in ]0, 1[$ , la stricte croissance de  $F$  entraîne :

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

De plus,  $U \in ]0, 1[$  presque sûrement. Sa fonction de répartition est donc 0 pour  $u \leq 0$ ,  $u$  pour  $0 < u < 1$ , et 1 pour  $u \geq 1$ .

$$U \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

Le choix des extrémités de l'intervalle ne change pas cette loi à densité.

c) Pour  $u \in ]0, 1[$  et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x) = u \iff \text{Arctan}(e^x) = \frac{\pi u}{2} \iff e^x = \tan\left(\frac{\pi u}{2}\right).$$

La tangente est strictement positive et finie pour cet argument, donc :

$$F^{-1}(u) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right).$$

Un script de simulation est :

### Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

u = rd.random()
while u == 0:
    u = rd.random()
x = np.log(np.tan(np.pi * u / 2))
print(x)
```

La commande `rd.random()` renvoie un réel dans  $[0, 1[$ . La boucle évite la valeur informatique 0, pour laquelle le logarithme n'est pas défini ; 1 n'est pas une valeur renvoyée. La variable `x` est obtenue par inversion de la fonction de répartition.

Dans le modèle d'une uniforme continue, pour tout réel  $a$ ,  
 $P(F^{-1}(U) \leq a) = P(U \leq F(a)) = F(a)$  : la variable simulée suit bien la loi de  $X$ . Le programme utilise une approximation numérique de ce modèle continu.

Code exécuté pour vérifier que la simulation produit des valeurs réelles finies. Cette exécution vérifie le fonctionnement du code ; elle ne remplace pas la preuve de la loi.

5) a) Il faut d'abord vérifier l'intégrabilité absolue. La majoration de 2) a) et la parité donnent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx \leq \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx < +\infty.$$

Pour justifier la dernière convergence, sur  $[0, A]$ , une intégration par parties donne

$$\int_0^A xe^{-x} dx = 1 - (A+1)e^{-A}, \text{ qui tend vers } 1.$$

L'espérance de  $X$  existe. Comme  $f$  est paire,  $x \mapsto xf(x)$  est impaire et son intégrale est absolument convergente. Les contributions des deux demi-droites se compensent :

$$E(X) = 0.$$

b) De même :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \leq \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Sur  $[0, A]$ , deux intégrations par parties donnent :

$$\int_0^A x^2 e^{-x} dx = 2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}.$$

Le terme de droite tend vers 2 par croissance comparée. Le théorème de transfert montre que  $X^2$  admet une espérance finie. Par conséquent,  $X$  admet une variance.

6) a) Fixons  $n \geq 1$ . Sur  $[0, A]$ , deux intégrations par parties donnent :

$$\int_0^A t^2 e^{-nt} dt = -\frac{A^2 e^{-nA}}{n} + \frac{2}{n} \int_0^A t e^{-nt} dt.$$

Puis :

$$\int_0^A t e^{-nt} dt = -\frac{A e^{-nA}}{n} + \frac{1 - e^{-nA}}{n^2}.$$

Ainsi :

$$\int_0^A t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3} - e^{-nA} \left( \frac{A^2}{n} + \frac{2A}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right).$$

Pour  $n$  fixé, tous les termes du produit par  $e^{-nA}$  tendent vers 0. L'intégrale impropre converge donc et vaut :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}.$$

Les intégrations par parties ont été effectuées sur un segment avant le passage à la limite.

b) Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \geq 0$ , la formule de la somme géométrique finie donne :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k e^{-(2k+1)t} = e^{-t} \frac{1 - (-e^{-2t})^{p+1}}{1 + e^{-2t}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. En séparant les deux termes :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k e^{-(2k+1)t} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} + (-1)^p \frac{e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}}.$$

On multiplie par  $t^2$  et on intègre. Chaque terme de la somme finie est intégrable par a),  $I$  est fini par 5) b), et le dernier terme est majoré en valeur absolue par  $t^2 e^{-(2p+3)t}$ , intégrable par a). La linéarité pour une somme finie d'intégrales convergentes donne exactement :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt.$$

Aucun échange entre une somme infinie et une intégrale n'est utilisé.

c) Puisque  $1 + e^{-2t} \geq 1$ , on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)t} dt = \frac{2}{(2p+3)^3}.$$

Le majorant tend vers 0, donc le théorème d'encadrement donne la limite demandée.

d) La série

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k / (2k+1)^3$$

est absolument convergente : pour  $k \geq 1$ , son terme absolu est majoré par  $1/k^3$ , terme d'une série de Riemann convergente.

Par b), a), puis c), en passant à la limite dans les sommes partielles :

$$I = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Comme  $E(X) = 0$ , la formule de Koenig-Huygens donne  $V(X) = E(X^2)$ . La parité et la définition de  $f$  conduisent à :

$$V(X) = \frac{4}{\pi} I = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

La valeur de cette somme est admise dans l'énoncé. Elle donne :

$$V(X) = \frac{8}{\pi} \frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7) a) On a  $Y = e^X > 0$  presque sûrement. Pour  $y \leq 0$ ,  $G(y) = 0$ . Pour  $y > 0$ , la stricte croissance de l'exponentielle donne :

$$G(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = F(\ln y) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(y).$$

Ainsi :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(y) & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ , y compris en 0 puisque  $\text{Arctan}(0) = 0$ , et de classe  $C^1$  sur chacune des demi-droites ouvertes. La caractérisation par la fonction de répartition montre que  $Y$  est à densité; on peut choisir :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+y^2)} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

La valeur de la densité en 0 est sans effet sur la loi. La positivité est immédiate et son intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut  $(2/\pi)[\text{Arctan}(y)]_0^{+\infty} = 1$ .

- b) Pour tout réel  $y$ , l'événement  $\{M_n \leq y\}$  est l'intersection des événements  $\{Y_i \leq y\}$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . L'indépendance des variables  $Y_i$  entraîne celle de ces événements. Comme leurs lois sont identiques :

$$G_n(y) = P(M_n \leq y) = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq y) = G(y)^n.$$

En utilisant a), on obtient :

$$G_n(y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(y)\right)^n & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

- c) Posons  $T_n = n/M_n$  et notons  $H_n$  sa fonction de répartition. Le maximum  $M_n$  est strictement positif presque sûrement ;  $T_n$  est donc bien défini et strictement positif presque sûrement.

Pour  $x \leq 0$ ,  $H_n(x) = 0$ . Pour  $x > 0$ , en utilisant l'absence d'atomes de  $M_n$  :

$$H_n(x) = P\left(M_n \geq \frac{n}{x}\right) = 1 - G_n\left(\frac{n}{x}\right).$$

La question 1) b) permet d'écrire :

$$G_n\left(\frac{n}{x}\right) = \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

Fixons  $x > 0$  et posons  $a_n = (2/\pi) \text{Arctan}(x/n)$ . Alors  $0 < a_n < 1$ ,  $a_n \rightarrow 0$  et, par 1) c),  $na_n \rightarrow 2x/\pi$ . Le développement limité du logarithme en 0 donne  $\ln(1-u)/u \rightarrow -1$ , donc :

$$n \ln(1 - a_n) = (na_n) \frac{\ln(1 - a_n)}{a_n} \longrightarrow -\frac{2x}{\pi}.$$

En exponentiant,  $G_n(n/x) \rightarrow e^{-2x/\pi}$ . Par conséquent, pour tout réel  $x$  :

$$H_n(x) \longrightarrow H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x/\pi} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La fonction  $H$  est la fonction de répartition, continue sur  $\mathbb{R}$ , d'une loi exponentielle de taux  $2/\pi$ . La définition de la convergence en loi donne :

$$\frac{n}{M_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} T, \quad T \sim \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

### Exercice 3

---

#### Partie 1 : étude de $f$

---

- 1) Pour tous  $x, y \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la linéarité du produit scalaire dans sa seconde variable donne :

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (\alpha \langle u_i, x \rangle + \beta \langle u_i, y \rangle) u_i = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

L'application  $f$  est à valeurs dans  $E$ , donc c'est un endomorphisme de  $E$ .

Pour tous  $x, y \in E$ , par bilinéarité et symétrie du produit scalaire réel :

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Ainsi  $f$  est un endomorphisme symétrique.

2) Si  $\lambda_i = 1$  pour tout  $i$ , alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \langle u_i, x \rangle u_i.$$

La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  étant une base orthonormale de  $U$ , cette expression est celle de la projection orthogonale sur  $U$ .

On peut aussi vérifier directement sa caractérisation :  $f(x) \in U$  et, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\langle x - f(x), u_j \rangle = 0$ . Ainsi  $x - f(x) \in U^\perp$ . Le vecteur  $f(x)$  est donc la composante de  $x$  dans la décomposition orthogonale  $E = U \oplus U^\perp$ .

3) a) Puisque la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre :

$$f(x) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0.$$

Tous les  $\lambda_i$  étant non nuls, cette condition équivaut à  $\langle u_i, x \rangle = 0$  pour tout  $i$ , donc à  $x \in U^\perp$ . Par conséquent :

$$\text{Ker}(f) = U^\perp, \quad \dim \text{Ker}(f) = \dim E - p.$$

La dimension de  $U$  vaut bien  $p$  puisque les  $p$  vecteurs sont orthonormaux.

b) Le théorème du rang donne :

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = p.$$

La définition de  $f$  montre que  $\text{Im}(f) \subset U$ . Ces deux sous-espaces ont la même dimension  $p$ , donc :

$$\text{Im}(f) = U.$$

Autre vérification : pour tout  $j$ , l'orthonormalité donne  $f(u_j) = \lambda_j u_j$ . Comme  $\lambda_j \neq 0$ ,  $u_j = f(u_j/\lambda_j) \in \text{Im}(f)$ . Les générateurs de  $U$  appartiennent donc à l'image, ce qui établit l'inclusion réciproque.

4) Pour chaque  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on calcule :

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle u_i = \lambda_j u_j.$$

Le vecteur  $u_j$  est non nul puisque sa norme vaut 1. Ainsi  $\lambda_j$  est une valeur propre de  $f$ , avec vecteur propre associé  $u_j$ .

Aucune hypothèse de distinction des  $\lambda_j$  n'est nécessaire. Si plusieurs sont égaux, les vecteurs correspondants appartiennent au même espace propre. De plus, 0 est aussi valeur propre puisque  $p < \dim E$  et  $\text{Ker}(f) = U^\perp \neq \{0\}$ .

## Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de $E$

---

5) Supposons que  $(y_n)$  converge à la fois vers  $y$  et vers  $z$ . L'inégalité triangulaire donne, pour tout  $n$  :

$$0 \leq \|y - z\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - z\|.$$

Les deux termes du majorant tendent vers 0. On en déduit  $\|y - z\| = 0$ , donc  $y = z$ . La limite est unique.

- 6) Par orthonormalité, le carré de la norme d'une combinaison des  $u_i$  est la somme des carrés de ses coefficients. Ainsi :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2.$$

Cauchy-Schwarz et  $\|u_i\| = 1$  donnent  $|\langle u_i, x \rangle| \leq \|x\|$ . En multipliant par les coefficients positifs  $\lambda_i^2$  puis en sommant :

$$\|f(x)\|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \right) \|x\|^2 = K^2 \|x\|^2.$$

Les deux membres étant positifs, le passage aux racines carrées donne :

$$\|f(x)\| \leq K \|x\|.$$

- 7) a) On raisonne par récurrence. Pour  $n = 0$ ,  $\|x_0\| \leq K^0 \|x_0\|$  est une égalité. Si l'inégalité est établie au rang  $n$ , la question 6) donne :

$$\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq K \|x_n\| \leq K^{n+1} \|x_0\|.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|.$$

- b) Puisque les  $\lambda_i$  sont non nuls et  $p \geq 1$ , on a  $K > 0$  ; l'hypothèse fournit donc  $0 < K < 1$ . La suite géométrique  $K^n$  tend vers 0, et l'encadrement précédent donne  $\|x_n\| \rightarrow 0$ .

Comme  $\|x_n - 0_E\| = \|x_n\|$ , la définition donnée dans l'énoncé montre que  $x_n \rightarrow 0_E$ .

Autre méthode : pour  $n \geq 1$ , l'orthonormalité et la relation  $f(u_i) = \lambda_i u_i$  permettent d'établir par récurrence :

$$x_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \langle u_i, x_0 \rangle u_i.$$

Chaque  $|\lambda_i| \leq K < 1$ , donc  $\lambda_i^n \rightarrow 0$ . L'inégalité triangulaire fournit

$$\|x_n\| \leq \sum_{i=1}^p |\lambda_i|^n |\langle u_i, x_0 \rangle| \rightarrow 0,$$

car la somme contient un nombre fini de termes. On retrouve la convergence vers  $0_E$ .

c) La série

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$$

est à termes positifs. La question a) donne :

$$0 \leq \|x_n\| \leq \|x_0\| K^n.$$

La série géométrique majorante converge puisque  $K < 1$ . Par comparaison, la série demandée converge, et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| \leq \frac{\|x_0\|}{1-K}.$$

## Problème

---

### Partie 1

---

- 1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in [0, 1]$ , le nombre  $1 + t^2$  est supérieur ou égal à 1. On a donc :

$$0 < \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n}.$$

L'intégration sur  $[0, 1]$  donne  $0 < u_{n+1} \leq u_n$ . La suite est positive et décroissante.

Elle est même strictement décroissante, puisque la différence des deux intégrandes est strictement positive pour tout  $t \in ]0, 1]$ .

- b) La suite est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .

- 2) a) Posons  $h(x) = \ln(1 + x) - x/2$  sur  $[0, 1]$ . La fonction est dérivable,  $h(0) = 0$ , et :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} = \frac{1-x}{2(1+x)} \geq 0.$$

Ainsi  $h(x) \geq 0$ , soit  $x/2 \leq \ln(1 + x)$ . La stricte croissance de l'exponentielle donne :

$$e^{x/2} \leq 1 + x.$$

Autre méthode : la fonction logarithme est concave sur  $]0, +\infty[$  puisque sa dérivée seconde vaut  $-1/x^2$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , la concavité donne  $\ln(1 + x) \geq x \ln 2$ . Or

$\ln 2 = \int_1^2 dt/t \geq 1/2$ . On obtient encore  $\ln(1 + x) \geq x/2$  et donc l'inégalité demandée.

- b) Pour  $t \in [0, 1]$ ,  $t^2 \in [0, 1]$ . En appliquant a),  $1 + t^2 \geq e^{t^2/2}$ . Les deux membres sont strictement positifs ; pour tout entier naturel  $n$ , on peut prendre leurs puissances inverses :

$$\frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment  $[0, 1]$  :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

Pour  $n = 0$ , les deux intégrandes valent 1, donc l'inégalité reste valable.

- c) Fixons  $n \geq 1$ . La densité d'une loi normale de moyenne 0 et de variance  $1/n$  est :

$$t \mapsto \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nt^2/2}.$$

Son intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut 1. Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On peut également effectuer le changement de variable affine  $s = \sqrt{n} t$  et utiliser la normalisation de la densité normale centrée réduite.

- d) La fonction intégrée est positive et paire. Pour  $n \geq 1$ , b) et c) donnent :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Le majorant tend vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Autre méthode : fixons  $\delta \in ]0, 1[$  et coupons l'intégrale en  $\delta$ . Sur  $[0, \delta]$ , l'intégrande est majoré par 1 ; sur  $[\delta, 1]$ , il est majoré par  $(1 + \delta^2)^{-n}$ . Ainsi :

$$0 \leq u_n \leq \delta + (1 - \delta)(1 + \delta^2)^{-n}.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $0 < \delta < \min(1, \varepsilon/2)$ , puis  $n$  assez grand pour que le second terme soit inférieur à  $\varepsilon/2$ . Alors  $u_n < \varepsilon$ . Cette preuve évite tout échange entre limite et intégrale.

## Partie 2

---

3) Fixons  $n \geq 1$ . L'intégrande est continue sur  $[0, +\infty[$  ; il n'y a donc aucune difficulté sur  $[0, 1]$ . Pour  $t \geq 1$  :

$$0 \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}.$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} t^{-2n} dt$  converge puisque  $2n > 1$ . Le critère de comparaison établit donc la convergence de l'intégrale demandée, et en particulier l'existence de  $I_n$  et de  $J_n$ .

4) a) En intégrant la majoration précédente sur  $[1, +\infty[$  :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} t^{-2n} dt = \left[ \frac{t^{1-2n}}{1-2n} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2n-1}.$$

b) Le majorant  $1/(2n - 1)$  tend vers 0, donc le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) Par la relation de Chasles pour ces intégrales convergentes :

$$J_n = u_n + I_n.$$

Les deux termes tendent vers 0 d'après la partie 1 et la question b). Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

5) a) Fixons  $n \geq 1$  et  $A > 0$ . Effectuons une intégration par parties sur le segment  $[0, A]$ , en dérivant  $(1 + t^2)^{-n}$  et en prenant  $t$  comme primitive de 1 :

$$\int_0^A \frac{dt}{(1 + t^2)^n} = \frac{A}{(1 + A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt.$$

Le terme de bord tend vers 0 : pour  $A \geq 1$ , il est compris entre 0 et  $A^{1-2n}$ , qui tend vers 0. On réécrit l'intégrande de droite :

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1 + t^2)^n} - \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}}.$$

Les deux intégrales du second membre sont convergentes d'après 3). Le passage à la limite  $A \rightarrow +\infty$  donne donc :

$$J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

On en tire les deux formes utiles :

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n, \quad \frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1}).$$

**b)** La fonction arctangente est une primitive de  $1/(1+t^2)$ , donc :

$$J_1 = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

**c)** Pour tout entier  $N \geq 1$ , la relation de a) fournit une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = 2 \sum_{n=1}^N (J_n - J_{n+1}) = 2(J_1 - J_{N+1}).$$

Comme  $J_{N+1} \rightarrow 0$  par 4) c), les sommes partielles convergent vers  $2J_1 = \pi$ . Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi.$$

**d)** La boucle doit calculer successivement  $J_2, \dots, J_n$  à partir de  $J_1 = \pi/2$ . En remplaçant l'indice de a) par  $k-1$ , on obtient  $J_k = \frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1}$ .

### Python

```
import numpy as np

def suiteJ(n):
    J = np.pi / 2
    for k in range(2, n + 1):
        J = ((2 * k - 3) / (2 * k - 2)) * J
    return J
```

La fonction suppose  $n \geq 1$ . La variable  $J$  contient initialement  $J_1$ , puis  $J_k$  après l'itération d'indice  $k$ . La borne supérieure exclusive  $n + 1$  permet de terminer à  $k = n$ . Pour  $n = 1$ , la boucle est vide et la fonction renvoie directement  $J_1$ .

Code exécuté pour  $n = 1, 2, 3, 10$  et contrôlé par intégration numérique. Pour les trois premières valeurs, on obtient respectivement  $\pi/2$ ,  $\pi/4$  et  $3\pi/16$ .

6) Pour  $n = 0$ , la formule donne  $J_1 = (\pi/2) \binom{0}{0} = \pi/2$ , conformément à 5) b).

Pour  $n \geq 1$ , on itère la récurrence de 5) a) :

$$J_{n+1} = J_1 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$$

Le produit des entiers pairs vaut  $2^n n!$ . En séparant les facteurs pairs et impairs de  $(2n)!$ , le produit des entiers impairs vaut  $(2n)! / (2^n n!)$ . Ainsi :

$$J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

La formule est donc valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Partie 3

---

7) a) Chaque lancer constitue une épreuve de Bernoulli dont le succès est « pile », de probabilité  $1/2$ . Les  $2n$  lancers sont indépendants. Le nombre total de succès suit donc la loi binomiale :

$$X_n \sim \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right).$$

En particulier, pour  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$  :

$$P(X_n = k) = \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}}.$$

- b)** Puisque chaque lancer donne soit pile soit face,  $X_n + Y_n = 2n$ . Ainsi  $X_n = Y_n$  si et seulement si  $X_n = n$ . La loi binomiale donne :

$$P(X_n = Y_n) = P(X_n = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

La question 6) permet alors d'écrire :

$$P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}.$$

D'après 4) c),  $J_{n+1} \rightarrow 0$ , donc  $P(X_n = Y_n) \rightarrow 0$ .

- c)** Si l'on échange « pile » et « face » dans chaque résultat des  $2n$  lancers, une réalisation ayant strictement moins de piles que de faces devient une réalisation ayant strictement plus de piles que de faces, et réciproquement.

La pièce étant équilibrée, cet échange préserve la probabilité de chaque réalisation. Les deux événements ont donc la même probabilité :

$$P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n).$$

- d)** Les trois événements  $\{X_n < Y_n\}$ ,  $\{X_n = Y_n\}$  et  $\{X_n > Y_n\}$  constituent une partition de l'univers. En utilisant c) :

$$2P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) = 1.$$

Ainsi :

$$P(X_n < Y_n) = \frac{1 - P(X_n = Y_n)}{2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

puisque la probabilité d'égalité tend vers 0 d'après b).

- 8) a) La variable  $Z_k$  est l'indicatrice de l'événement « pile au  $k$ -ième lancer ». La somme des  $2n$  indicatrices compte donc exactement le nombre de piles parmi les  $2n$  premiers lancers :

$$\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n.$$

- b) Les variables  $Z_k$  sont indépendantes, car les lancers le sont, et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . Leurs moments sont :

$$E(Z_k) = \frac{1}{2}, \quad V(Z_k) = \frac{1}{4} > 0.$$

Les hypothèses du théorème limite central sont satisfaites. La somme centrée réduite des  $2n$  premières variables donne :

$$T_n = \frac{\sum_{k=1}^{2n} Z_k - 2n \times (1/2)}{\sqrt{2n \times (1/4)}} = \frac{X_n - n}{\sqrt{n/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N,$$

avec  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Le théorème s'applique à toutes les tailles d'échantillon, et donc également aux tailles paires  $2n$ .

Comme  $Y_n = 2n - X_n$ , on a les équivalences :

$$X_n \leq Y_n \iff X_n \leq n \iff T_n \leq 0.$$

La fonction de répartition  $\Phi$  de  $N$  est continue en 0. La convergence en loi donne donc :

$$P(X_n \leq Y_n) = P(T_n \leq 0) \longrightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

c) Première méthode : on retire l'événement d'égalité. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$P(X_n < Y_n) = P(X_n \leq Y_n) - P(X_n = Y_n).$$

La première probabilité tend vers  $1/2$  par b), et la seconde tend vers 0 par 7) b). On retrouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}.$$

Seconde méthode : on exploite directement la convergence en loi, en prenant soin de traiter l'inégalité stricte. Pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P(T_n \leq -\varepsilon) \leq P(T_n < 0) \leq P(T_n \leq 0).$$

Comme la loi limite est continue, les probabilités extérieures tendent respectivement vers  $\Phi(-\varepsilon)$  et  $\Phi(0) = 1/2$ . Pour tout  $\eta > 0$ , on choisit  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $\Phi(-\varepsilon) > 1/2 - \eta$ , puis  $n$  assez grand pour que les deux probabilités extérieures soient à moins de  $\eta$  de leurs limites. Il vient :

$$\frac{1}{2} - 2\eta < P(T_n < 0) < \frac{1}{2} + \eta.$$

On en déduit  $P(T_n < 0) \rightarrow 1/2$ . Or  $T_n < 0$  équivaut à  $X_n < Y_n$ . Cette preuve retrouve la limite sans utiliser la formule de la probabilité d'égalité.

## Relevé des adaptations

---

Exercice 1, question 6) b) : la figure des trois surfaces est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original. Ses contours, couleurs, axes, graduations et légendes sont relevés directement sur la figure source et conservés ensemble dans le même bloc ; aucune formule n'est attribuée aux surfaces distractrices.

Exercice 2, question 4) c) : le script de simulation écarte la valeur informatique 0 que `rd.random()` peut renvoyer, afin de rester dans le domaine de définition de  $F^{-1}$ .