



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie 1

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à sa colonne de coordonnées dans la base canonique. On pose $\tau = \text{Tr}(M)$.

- 1) Le théorème du rang s'applique à l'endomorphisme f de l'espace $\mathbb{R}^n$, de dimension n . Comme $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 1$, il donne :

$$\dim \text{Ker}(f) = n - 1.$$

Puisque $n \geq 2$, ce noyau contient un vecteur non nul u . L'égalité $f(u) = 0 = 0u$ montre que 0 est une valeur propre de f et que son espace propre est $\text{Ker}(f)$.

- 2) a) Notons C_j la j -ième colonne de M . Le rang de M est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Cet espace est de dimension 1 et contient la colonne non nulle $C = C_1$; il est donc égal à $\text{Vect}(C)$.

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel ℓ_j tel que $C_j = \ell_j C$. Pour $j = 1$, l'égalité $C_1 = C$ impose $\ell_1 = 1$.

Le produit CL , avec $L = (1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$, a précisément pour colonnes $C, \ell_2 C, \dots, \ell_n C$. Ainsi $M = CL$.

- 2) b) Écrivons $C = {}^t(c_1, \dots, c_n)$. Le coefficient diagonal d'indice j de CL vaut $c_j \ell_j$. Par définition de la trace :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{j=1}^n c_j \ell_j = LC.$$

Le produit LC est ici une matrice d'ordre 1, identifiée à son unique coefficient réel.

- 2) c) L'associativité du produit matriciel, avec les dimensions compatibles $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donne :

$$M^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \tau CL = \tau M.$$

Ainsi $M^2 = \text{Tr}(M)M$.

3) Méthode 1 — Utiliser la colonne C .

La factorisation de la question 2) donne :

$$MC = CLC = (LC)C = \tau C.$$

Comme $C \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à τ . Par conséquent, $\text{Tr}(M)$ est une valeur propre de f , y compris lorsque cette trace est nulle.

Méthode 2 — Utiliser l'image et la relation quadratique.

Puisque f est de rang 1, il existe u tel que $v = f(u) \neq 0$. La relation matricielle de la question 2) c) se traduit par $f^2 = \tau f$. Elle donne :

$$f(v) = f^2(u) = \tau f(u) = \tau v.$$

Le vecteur v est donc propre pour la valeur τ . Cette méthode s'applique à un endomorphisme présenté sans matrice ; la première fournit immédiatement un vecteur propre en coordonnées.

4) On suppose $\tau = 0$. La question 2) c) donne $M^2 = 0$, tandis que $M \neq 0$ puisque son rang vaut 1.

Méthode 1 — Examiner les valeurs propres.

Si $Mu = \lambda u$ avec $u \neq 0$, alors $M^2u = \lambda^2u$. Comme $M^2 = 0$, on obtient $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$.

Si M était diagonalisable, une matrice diagonale semblable à M n'aurait que des coefficients diagonaux nuls. Elle serait donc la matrice nulle, et M serait nulle, en contradiction avec son rang. Ainsi M n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Examiner la dimension des espaces propres.

Le même calcul $\lambda^2 u = 0$ montre que 0 est la seule valeur propre. Son espace propre a pour dimension $n - 1$ d'après la question 1). Il ne peut donc pas fournir une base de $\mathbb{R}^n$. Le critère de diagonalisation par la somme des dimensions des espaces propres montre que M n'est pas diagonalisable.

La première méthode utilise directement la forme d'une matrice diagonale ; la seconde met en évidence le manque d'un vecteur propre dans une base.

5) On suppose $\tau \neq 0$. Si $Mu = \lambda u$ avec $u \neq 0$, la relation $M^2 = \tau M$ donne :

$$\lambda^2 u = \tau \lambda u, \text{ donc } \lambda(\lambda - \tau) = 0.$$

Toute valeur propre appartient donc à $\{0, \tau\}$. Les questions 1) et 3) montrent que ces deux nombres sont effectivement valeurs propres. Ainsi $\text{Sp}(f) = \{0, \tau\}$.

L'espace propre associé à 0 a pour dimension $n - 1$. Celui associé à τ contient C , donc est non nul. Si $Mu = \tau u$, alors $u = \tau^{-1}Mu$ appartient à $\text{Im}(M) = \text{Vect}(C)$. Ce deuxième espace propre est donc exactement $\text{Vect}(C)$, de dimension 1.

Les deux valeurs propres étant distinctes, leurs espaces propres sont en somme directe. La somme de leurs dimensions vaut n . Il existe donc une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres : f est diagonalisable.

Partie 2

6) a) On raisonne par l'absurde conformément à l'énoncé. Supposons $ac \neq b$. Les paramètres a, b, c étant non nuls, le système $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + y/a + z/b = 0, \\ ax + y + z/c = 0, \\ bx + cy + z = 0. \end{cases}$$

En retranchant à la deuxième équation la première multipliée par a , on obtient :

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right)z = \frac{b-ac}{bc}z = 0.$$

Le coefficient étant non nul, $z = 0$. La première équation donne alors $x = -y/a$. En remplaçant dans la troisième :

$$\left(c - \frac{b}{a}\right)y = \frac{ac-b}{a}y = 0.$$

On obtient $y = 0$, puis $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Une matrice carrée d'ordre 3 de noyau nul est inversible, par le théorème du rang. Cela contredit l'hypothèse sur A .

On conclut que $ac = b$.

6) b) Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A . Puisque $b = ac$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{a}C_1, \quad C_3 = \frac{1}{b}C_1.$$

La première colonne est non nulle, et les deux autres sont ses multiples. Ainsi $\text{rg}(A) = 1$.

7) a) La matrice A satisfait les hypothèses de la partie 1 : ordre $3 \geq 2$, rang 1, première colonne non nulle. De plus $\text{Tr}(A) = 3 \neq 0$.

La question 5) donne donc $\text{Sp}(g) = \{0, 3\}$ et la diagonalisabilité de g . L'espace propre associé à 0 est de dimension 2 et celui associé à 3 de dimension 1.

7) b) La question 2) c), appliquée à A , donne $A^2 = 3A$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$A^n = 3^{n-1}A.$$

Pour $n = 1$, cette égalité vaut $A = A$. Si elle est vraie à un rang $n \geq 1$, alors :

$$A^{n+1} = A^n A = 3^{n-1} A^2 = 3^n A.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$. Chaque puissance A^n appartient à $\text{Vect}(A)$. La restriction $n \geq 1$ est essentielle : $A^0 = I_3$ n'appartient pas à cet espace de matrices de rang au plus 1.

Exercice 2

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

- 1) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, car $c > 2$ et $x^{c+1} > 0$ pour $x \geq 1$. Elle est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$; sa seule éventuelle discontinuité est en 1.

Pour $T \geq 1$, l'intégration sur un segment donne :

$$\int_1^T \frac{c}{x^{c+1}} dx = [-x^{-c}]_1^T = 1 - T^{-c}.$$

Comme $c > 0$, $T^{-c} \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. L'intégrale impropre converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Toutes les conditions requises sont satisfaites : f est une densité de probabilité.

- 2) Comme $X \geq 1$, l'existence de son moment d'ordre $m \in \{1, 2\}$ revient à la convergence de l'intégrale positive :

$$\int_1^{+\infty} x^m f(x) dx = c \int_1^{+\infty} x^{m-c-1} dx.$$

Pour $m = 1$ et $m = 2$, on a $c - m > 0$. Sur $[1, T]$:

$$c \int_1^T x^{m-c-1} dx = \frac{c}{c-m} (1 - T^{m-c}).$$

En passant à la limite, on obtient des moments finis :

$$E(X) = \frac{c}{c-1}, \quad E(X^2) = \frac{c}{c-2}.$$

La formule de Koenig-Huygens est donc applicable :

$$V(X) = \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} = \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2} = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}.$$

Les dénominateurs sont strictement positifs puisque $c > 2$.

- 3) Pour $x < 1$, l'événement $(X \leq x)$ est impossible. Pour $x \geq 1$, on intègre la densité entre 1 et x comme à la question 1). Ainsi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En particulier $F(1) = 0$: une variable à densité ne possède pas de masse ponctuelle en 1.

- 4) a) Rectification locale de l'énoncé : Y est définie sur le même espace probabilisé que X ; la fonction f n'est pas une variable aléatoire.

L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et inverse du logarithme sur $]0, +\infty[$.

Comme $X \geq 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\ln X \leq x) = (X \leq e^x).$$

Ainsi $G(x) = F(e^x)$ pour tout réel x .

- 4) b) Si $x < 0$, alors $e^x < 1$ et $G(x) = 0$. Si $x \geq 0$, la question 3) donne :

$$G(x) = 1 - (e^x)^{-c} = 1 - e^{-cx}.$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de taux c . Donc $Y \sim \mathcal{E}(c)$.

- 4) c) Dans NumPy, le paramètre `scale` de `rd.exponential` est l'espérance de la loi exponentielle, soit l'inverse du taux. Pour simuler $Y \sim \mathcal{E}(c)$, il faut donc `scale=1/c`. Puis $X = e^Y$.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Y = rd.exponential(scale=1 / c)
    return np.exp(Y)
```

Pour $c > 2$, cette fonction renvoie une réalisation de la loi de Pareto définie dans l'énoncé. Le code a été exécuté pour vérifier son fonctionnement ; la justification de la loi repose sur la question 4) b), et non sur une simulation.

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

- 5) On simule deux réalisations indépendantes de la même loi avec deux appels distincts, puis on les multiplie. On ne doit pas prendre le carré d'une seule réalisation, car cela ne représenterait pas le produit de deux variables indépendantes.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX(c):
    Y = rd.exponential(scale=1 / c)
    return np.exp(Y)

def simulZ(c):
    X1 = simulX(c)
    X2 = simulX(c)
    return X1 * X2
```

La fonction renvoie une réalisation de $Z = X_1 X_2$. Ce code a été exécuté.

- 6) Les questions précédentes montrent que X_1, X_2 ont des moments d'ordre 1 et 2 finis. Leur indépendance permet de multiplier leurs espérances ; les variables X_1^2 et X_2^2 sont également indépendantes par le lemme des coalitions. Les moments du produit existent et :

$$E(Z) = E(X_1)E(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2},$$

$$E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}.$$

Par Koenig-Huygens :

$$V(Z) = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} = \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

Pour simplifier le numérateur, on développe :

$$(c-1)^4 = c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1,$$

$$c^2(c-2)^2 = c^4 - 4c^3 + 4c^2.$$

Leur différence est $2c^2 - 4c + 1$. Ainsi :

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.$$

- 7) a) Pour $j \in \{1, 2\}$, on a $Y_j \sim \mathcal{E}(c)$. Comme $c > 0$, pour $t \geq 0$:

$$P(cY_j \leq t) = P(Y_j \leq t/c) = 1 - e^{-t}.$$

Pour $t < 0$, cette probabilité est nulle. Ainsi cY_1 et cY_2 suivent toutes deux la loi exponentielle de taux 1, également notée $\gamma(1)$.

- 7) b) Méthode 1 — Stabilité des lois gamma.

L'indépendance de X_1, X_2 implique celle de $c \ln X_1$ et $c \ln X_2$ par le lemme des coalitions. Les deux lois gamma ont la même valeur du taux, égale à 1, et des paramètres de forme égaux à 1.

La stabilité des gamma indépendantes de même taux donne donc :

$$cY_1 + cY_2 \sim \gamma(2).$$

Sa densité peut s'écrire $k(t) = te^{-t}$ pour $t \geq 0$, et $k(t) = 0$ pour $t < 0$, puisque $\Gamma(2) = 1$.

Méthode 2 — Convolution des densités.

Posons $U_j = cY_j$. Ces deux variables indépendantes possèdent la densité $u(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$, nulle ailleurs. La formule de convolution s'applique à ces densités continues par morceaux. Pour $t < 0$, aucun réel s ne peut vérifier simultanément $s \geq 0$ et $t - s \geq 0$, donc la densité de $U_1 + U_2$ est nulle. Pour $t \geq 0$:

$$k(t) = \int_0^t e^{-s} e^{-(t-s)} ds = e^{-t} \int_0^t 1 ds = te^{-t}.$$

On retrouve la densité de $\gamma(2)$. La première méthode est immédiate lorsque la stabilité gamma est reconnue ; la seconde explique la présence du facteur t dans la densité.

8) a) Posons $S = Y_1 + Y_2$. Puisque $c > 0$, l'événement $(S \leq x)$ est égal à $(cS \leq cx)$ pour tout réel x . Ainsi :

$$H(x) = K(cx).$$

Pour $x > 0$, la densité k de la question 7) b) est continue en cx , et la dérivation donne :

$$H'(x) = cK'(cx) = ck(cx) = c(cx)e^{-cx} = c^2xe^{-cx}.$$

Pour $x < 0$, H est nulle. Elle est continue en 0 puisque K l'est. On peut choisir une densité de S égale à :

$$h(x) = \begin{cases} c^2xe^{-cx} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La valeur choisie en 0 est 0 et n'affecte pas la loi. Pour expliciter la fonction de répartition, une primitive donne :

$$H(x) = 1 - (1 + cx)e^{-cx} \quad \text{pour } x \geq 0.$$

8) b) On a $Z = e^{Y_1+Y_2} = e^S$ et $S \geq 0$, donc $Z \geq 1$. Pour tout $x < 1$, $F_Z(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, la stricte croissance du logarithme donne :

$$F_Z(x) = P(e^S \leq x) = P(S \leq \ln x) = H(\ln x).$$

En particulier, la formule $H(\ln x)$ ne doit pas être utilisée pour $x \leq 0$, où le logarithme n'est pas défini.

Pour $x > 1$, la dérivée vaut :

$$F'_Z(x) = \frac{1}{x} h(\ln x) = \frac{c^2 \ln x}{x} e^{-c \ln x} = \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}}.$$

La fonction de répartition est continue en 1, puisque $H(0) = 0$. Une densité de Z est donc :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

On peut également écrire, pour $x \geq 1$, $F_Z(x) = 1 - (1 + c \ln x)x^{-c}$.

9) a) Fixons $\alpha > 1$. On effectue d'abord l'intégration par parties sur le segment $[1, T]$, avec $T > 1$, en prenant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^{-\alpha}$. Une primitive est $v(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

Les fonctions utilisées sont de classe C^1 sur ce segment. On obtient :

$$\int_1^T \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha} \ln x}{1-\alpha} \right]_1^T - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^T x^{-\alpha} dx.$$

En posant $\beta = \alpha - 1 > 0$, cela devient :

$$\int_1^T \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = -\frac{T^{-\beta} \ln T}{\beta} + \frac{1 - T^{-\beta}}{\beta^2}.$$

Les croissances comparées donnent $T^{-\beta} \ln T \rightarrow 0$, et $T^{-\beta} \rightarrow 0$. Ainsi l'intégrale impropre converge, et sa valeur est :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha - 1)^2}.$$

Aucun passage à la limite n'a été fait avant le calcul sur un segment.

- 9) b) Les variables Z et Z^2 sont positives. La question 9) a), appliquée respectivement à $\alpha = c > 1$ et à $\alpha = c - 1 > 1$, justifie la convergence des intégrales de leurs moments. Par transfert :

$$E(Z) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^c} dx = \frac{c^2}{(c - 1)^2},$$

$$E(Z^2) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{c-1}} dx = \frac{c^2}{(c - 2)^2}.$$

La formule $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$ redonne :

$$V(Z) = \frac{c^2}{(c - 2)^2} - \frac{c^4}{(c - 1)^4} = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c - 2)^2(c - 1)^4}.$$

On retrouve exactement les résultats de la question 6), cette fois à partir de la densité du produit.

Exercice 3

Les lancers sont indépendants et $p \in]0, 1[$; ainsi $q = 1 - p \in]0, 1[$. L'indépendance des lancers, nécessaire pour déterminer les lois, a été explicitée dans l'énoncé adapté.

- 1) a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $(X = k)$ correspond à k faces suivies d'un pile :

$$(X = k) = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}.$$

Pour $k = 0$, on comprend cette égalité comme $(X = 0) = P_1$. Les événements concernant des lancers distincts étant indépendants :

$$P(X = k) = q^k p.$$

L'événement « ne jamais obtenir pile » est l'intersection décroissante des événements $F_1 \cap \dots \cap F_m$. Par continuité monotone des probabilités, sa probabilité est $\lim_{m \rightarrow +\infty} q^m = 0$. Le premier pile arrive donc presque sûrement.

Enfin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} pq^k = p/(1-q) = 1.$$

On obtient la loi $BN(p)$ sur $\mathbb{N}$, définie par $P(X = k) = pq^k$. Elle compte les échecs avant le premier succès, contrairement à la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, qui compte le rang du premier succès.

1) b) Méthode 1 — Décaler une variable géométrique.

Le rang du premier pile est $T = X + 1$. Il suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p . Comme $p \in]0, 1[$, les moments usuels existent et :

$$E(T) = \frac{1}{p}, \quad V(T) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Par transformation affine, $X = T - 1$ possède une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Méthode 2 — Utiliser les séries géométriques dérivées.

Puisque $0 < q < 1$, les séries géométriques dérivées du cours convergent et donnent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Les termes étant positifs, leurs valeurs finies justifient l'existence des moments correspondants. Ainsi :

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p},$$

$$E(X(X-1)) = p \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^k = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Comme $X^2 = X(X-1) + X$, le moment d'ordre 2 est fini et :

$$E(X^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q(1+q)}{p^2}.$$

Koenig-Huygens donne alors $V(X) = q(1+q)/p^2 - q^2/p^2 = q/p^2$. Le décalage géométrique est la méthode la plus rapide ; les séries donnent en plus le moment d'ordre 2 et s'étendent à des lois non usuelles.

- 2) a) Dans la division euclidienne $X = 3Q + R$ avec $R \in \{0, 1, 2\}$, le quotient vaut k exactement lorsque X est l'un des trois entiers $3k, 3k+1, 3k+2$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(Q = k) = (X = 3k) \cup (X = 3k+1) \cup (X = 3k+2).$$

Cette union est disjointe. On peut aussi écrire $(Q = k) = (3k \leq X \leq 3k+2)$.

- 2) b) Par additivité sur la réunion disjointe de la question précédente :

$$P(Q = k) = p(q^{3k} + q^{3k+1} + q^{3k+2}) = p(1 + q + q^2)(q^3)^k.$$

Comme $p = 1 - q$, l'identité $(1 - q)(1 + q + q^2) = 1 - q^3$ donne :

$$P(Q = k) = (1 - q^3)(q^3)^k.$$

Le nombre $1 - q^3$ appartient à $]0, 1[$, et le paramètre complémentaire est q^3 . Par définition de la loi introduite en 1) a), $Q \sim BN(1 - q^3)$.

- 3) Pour $r \in \{0, 1, 2\}$, l'événement $(R = r)$ est la réunion disjointe, pour $k \in \mathbb{N}$, des événements $(X = 3k + r)$. Par additivité dénombrable :

$$P(R = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k+r} = pq^r \sum_{k=0}^{+\infty} (q^3)^k = \frac{pq^r}{1 - q^3}.$$

La série est convergente puisque $0 < q^3 < 1$. En utilisant $1 - q^3 = p(1 + q + q^2)$ et $p > 0$, on conclut :

$$P(R = 0) = \frac{1}{1 + q + q^2}, \quad P(R = 1) = \frac{q}{1 + q + q^2}, \quad P(R = 2) = \frac{q^2}{1 + q + q^2}.$$

Ces trois probabilités sont positives et leur somme vaut 1.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \{0, 1, 2\}$, l'unicité de la division euclidienne donne :

$$(Q = k) \cap (R = r) = (X = 3k + r).$$

La loi conjointe est donc $P(Q = k, R = r) = pq^{3k+r}$. D'autre part, les questions 2) b) et 3) donnent :

$$P(Q = k)P(R = r) = (1 - q^3)(q^3)^k \frac{pq^r}{1 - q^3} = pq^{3k+r}.$$

La loi conjointe est le produit des lois marginales sur tout le support. Le critère d'indépendance de deux variables discrètes prouve que Q et R sont indépendantes.

5) a) La commande `rd.geometric(p)` simule le rang T du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p . Sa valeur appartient à $\mathbb{N}^*$.

Pour l'expérience de l'énoncé, on assimile le succès à pile. Le nombre de faces avant ce premier pile est $T - 1$, d'où le code complet :

Python

```
import numpy.random as rd

def simulX(p):
    X = rd.geometric(p) - 1
    return X
```

La fonction renvoie donc une réalisation de $X \sim BN(p)$. Ce code a été exécuté. Le paramètre requis est bien p , et non q .

- 5) b) Le quotient entier de X par 3 se calcule avec `//`; le reste se calcule avec `%`. Ces deux opérateurs renvoient les entiers Q et R tels que $X = 3Q + R$ et $0 \leq R < 3$.

Python

```
import numpy.random as rd

def simulX(p):
    X = rd.geometric(p) - 1
    return X

def div(p):
    X = simulX(p)
    Q = X // 3
    R = X % 3
    return (X, Q, R)
```

La sortie est le triplet demandé, obtenu à partir d'une même réalisation de X . Ce code a été exécuté et l'égalité $X = 3Q + R$, ainsi que les bornes du reste, ont été vérifiées.

Problème

Les espaces F_n contiennent des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, avec $n \geq 3$. Toutes les sommes utilisées dans ce problème sont finies.

- 1) Pour tout entier k , la périodicité de la fonction cosinus donne :

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = h(k).$$

Ainsi h est n -périodique, donc $h \in F_n$.

- 2) L'ensemble F_n est une partie de l'espace vectoriel E . La fonction nulle appartient à F_n .

Soient $f, g \in F_n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(\alpha f + \beta g)(k + n) = \alpha f(k + n) + \beta g(k + n) = \alpha f(k) + \beta g(k) = (\alpha f + \beta g)(k).$$

Ainsi F_n est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle : c'est un sous-espace vectoriel de E .

3) La périodicité donne $f(j + n) = f(j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En remplaçant j par $j - n$, elle donne aussi $f(j - n) = f(j)$.

Par répétition de ces deux égalités, on obtient $f(j + mn) = f(j)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$: on utilise la première si $m \geq 0$ et la seconde si $m < 0$.

Pour la division euclidienne $k = nq + r$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in I_n$, on en déduit $f(k) = f(r + nq) = f(r)$. Une fonction de F_n est donc entièrement déterminée par ses valeurs sur I_n .

4) a) Fixons $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$, puis écrivons $k = nq + r$ avec $r \in I_n$. La question 3), appliquée à f et aux fonctions e_i , donne :

$$f(k) = f(r), \quad e_i(k) = e_i(r).$$

Par définition, parmi les nombres $e_i(r)$, seul celui d'indice $i = r$ vaut 1 ; les autres sont nuls. Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r) = f(r) = f(k).$$

Cette égalité étant vraie pour tout k , on a aussi l'égalité de fonctions

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i.$$

4) b) La question 4) a) montre que B_n engendre F_n . Pour établir sa liberté, supposons :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i = 0.$$

En évaluant cette égalité de fonctions en un entier $j \in I_n$, on obtient $\alpha_j = 0$. Cela vaut pour tout j , donc tous les coefficients sont nuls.

La famille B_n est libre et génératrice : c'est une base de F_n . En particulier $\dim(F_n) = n$.

4) c) Dans la décomposition obtenue en 4) a), le coefficient de e_i est $f(i)$. Comme la décomposition dans une base est unique, la colonne des coordonnées de f dans B_n est :

$$[f]_{B_n} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n-1) \end{pmatrix}.$$

5) a) Vérifions les propriétés d'un produit scalaire réel. La somme finie

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$$

est symétrique et bilinéaire, par les règles usuelles de calcul sur les réels.

Pour tout $f \in F_n$:

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0.$$

Si cette somme est nulle, chacun de ses termes positifs est nul, donc $f(k) = 0$ pour tout $k \in I_n$. La question 3) implique alors que f est la fonction nulle sur tout $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, la fonction nulle a un carré scalaire nul.

La forme est donc définie positive. C'est un produit scalaire sur F_n , et la norme associée vérifie :

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2.$$

5) b) Pour $i, j \in I_n$:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k).$$

Si $i = j$, seul le terme $k = i$ vaut 1 et la somme vaut 1. Si $i \neq j$, les deux fonctions ne valent jamais simultanément 1 sur I_n , donc la somme vaut 0.

Ainsi chaque e_i est de norme 1 et deux vecteurs distincts sont orthogonaux. La base B_n est orthonormale.

5) c) On somme l'identité admise de l'énoncé pour $k = 0, \dots, n-1$:

$$2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right].$$

Le terme positif d'indice k est le terme négatif d'indice $k+1$. La somme télescopique se réduit donc au dernier terme positif et au premier terme négatif :

$$2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right).$$

Puisque $b \in]0, 2\pi[$, on a $b/2 \in]0, \pi[$ et $\sin(b/2) > 0$. La division est licite et fournit exactement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

- 5) d) Comme $n \geq 3$, le nombre $b = 4\pi/n$ appartient à $]0, 2\pi[$. Dans la formule de 5) c), le premier argument du sinus au numérateur dépasse le second de $nb = 4\pi$. Les deux sinus sont donc égaux par périodicité, et leur différence est nulle.

En prenant d'abord $a = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0.$$

En prenant ensuite $a = 2\pi/n$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0.$$

- 5) e) La formule rappelée $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$ donne $\cos^2 u = (1 + \cos(2u))/2$. Par conséquent :

$$\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}.$$

La première égalité de 5) d) a été utilisée. La norme étant positive, $\|h\| = \sqrt{n/2}$.

- 6) a) Soient $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Par n -périodicité de f :

$$Df(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n) = f(k+1) - f(k) = Df(k).$$

La fonction Df est donc n -périodique, ce qui prouve $Df \in F_n$.

6) b) La question 6) a) montre que D est une application de F_n dans F_n . Pour $f, g \in F_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$D(\alpha f + \beta g)(k) = \alpha(f(k+1) - f(k)) + \beta(g(k+1) - g(k)).$$

Il en résulte $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$. L'application D est linéaire de F_n dans lui-même : c'est un endomorphisme.

6) c) Posons $\theta = \pi/n$ et $u = 2k\pi/n$. On a :

$$Dh(k) = \cos(u + 2\theta) - \cos u.$$

En utilisant la formule d'addition, puis $\cos(2\theta) - 1 = -2\sin^2 \theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta$, on obtient :

$$Dh(k) = \cos u (\cos(2\theta) - 1) - \sin u \sin(2\theta),$$

$$Dh(k) = -2\sin \theta (\sin \theta \cos u + \cos \theta \sin u) = -2\sin \theta \sin(u + \theta).$$

L'identité pour $\sin(2\theta)$ découle de la formule d'addition du sinus en prenant deux arguments égaux. Ainsi :

$$Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).$$

6) d) On élève l'expression de 6) c) au carré, puis on utilise $\sin^2 v = (1 - \cos(2v))/2$:

$$\|Dh\|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$\|Dh\|^2 = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \left[n - \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(4k+2)\pi}{n} \right) \right] = 2n \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

La deuxième égalité de 5) d) annule la somme. Comme $0 < \pi/n < \pi$ et donc $\sin(\pi/n) > 0$, on conclut :

$$\|Dh\| = \sqrt{2n} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

7) a) On établit l'identité en développant le produit scalaire, puis en décalant les indices. Pour des fonctions $f, g \in F_n$, la périodicité permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) = \sum_{j=1}^n f(j)g(j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)g(j).$$

En effet le terme d'indice n égale celui d'indice 0. De même :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) = \sum_{j=1}^n f(j)g(j-1) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)g(j-1),$$

car $f(n)g(n-1) = f(0)g(-1)$ par périodicité. En développant :

$$\begin{aligned} -\langle Df, Dg \rangle &= -\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k). \end{aligned}$$

Avec les deux décalages précédents, cela devient :

$$-\langle Df, Dg \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k-1) + g(k+1) - 2g(k)) = \langle f, \Delta g \rangle.$$

Les termes aux extrémités se compensent grâce à la périodicité. L'identité est donc vraie pour tout couple $(f, g) \in F_n^2$.

7) b) La question 7) a) et la symétrie du produit scalaire donnent :

$$\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle = -\langle Dg, Df \rangle = \langle g, \Delta f \rangle = \langle \Delta f, g \rangle.$$

L'application Δ étant un endomorphisme de F_n , comme admis dans l'énoncé, cette égalité est exactement la définition d'un endomorphisme symétrique. Ainsi Δ est symétrique sur l'espace euclidien F_n .

7) c) Soit λ une valeur propre de Δ et soit $f \neq 0$ un vecteur propre associé. En prenant $g = f$ dans 7) a), on obtient :

$$\lambda \|f\|^2 = \langle f, \Delta f \rangle = -\|Df\|^2 \leq 0.$$

Comme $\|f\|^2 > 0$, on peut diviser et conclure $\lambda \leq 0$. Toutes les valeurs propres réelles de Δ sont donc négatives ou nulles. De plus, par le théorème spectral appliqué à cet endomorphisme symétrique réel, une base orthonormale de vecteurs propres existe.

8) a) La fonction constante ε_0 appartient à F_n . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta \varepsilon_0(k) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Elle appartient donc à $\text{Ker}(\Delta)$; comme $\varepsilon_0 \neq 0$, le nombre 0 est effectivement une valeur propre de Δ .

8) b) Méthode 1 — Utiliser l'identité de la question 7) a).

Soit $f \in \text{Ker}(\Delta)$. La question 7) a) donne :

$$0 = \langle f, \Delta f \rangle = -\|Df\|^2.$$

La norme étant définie positive, $Df = 0$. Pour tout entier k , $f(k+1) = f(k)$. En répétant cette égalité dans les deux sens sur $\mathbb{Z}$, on obtient $f(k) = f(0)$ pour tout k . Ainsi $f = f(0)\varepsilon_0$.

Réciproquement, la question 8) a) et la linéarité donnent $\Delta(a\varepsilon_0) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On conclut :

$$\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(\varepsilon_0).$$

Méthode 2 — Résoudre la relation de différences finies.

Si $\Delta f = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1).$$

Les différences $d(k) = f(k+1) - f(k)$ sont donc constantes ; notons d leur valeur. En sommant sur $k = 0, \dots, n-1$:

$$nd = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = f(n) - f(0) = 0.$$

Comme $n \neq 0$, on a $d = 0$. Ainsi f est constante, et appartient à $\text{Vect}(\varepsilon_0)$. L'inclusion réciproque est celle de 8) a), donc le même noyau est obtenu.

La première méthode utilise une identité d'énergie ; la seconde décrit directement les solutions d'une équation de différences finies et le rôle de la périodicité.

9) a) L'espace F_n est euclidien de dimension n , et Δ est symétrique d'après 7) b). Le théorème spectral réel fournit une base orthonormale de vecteurs propres.

La question 8) b) montre que l'espace propre associé à 0 est de dimension 1 et engendré par ε_0 . Or :

$$\|\varepsilon_0\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

On peut donc prendre comme premier vecteur propre unitaire $u_0 = \varepsilon_0/\sqrt{n}$. Les autres

espaces propres sont orthogonaux à celui de 0 ; en choisissant une base orthonormale dans chacun d'eux, on obtient une base de la forme :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \right).$$

Les fonctions ε_i de cette base propre sont distinctes des fonctions e_i de la base B_n .

Notons λ_i la valeur propre de ε_i pour $i \geq 1$. Puisque le noyau est de dimension 1, toutes les λ_i sont non nulles ; elles sont donc strictement négatives par 7) c).

En particulier, l'ensemble des valeurs propres non nulles est fini et non vide, puisque $n \geq 3$. Le minimum c introduit dans l'énoncé est bien défini et strictement positif.

Décomposons maintenant f dans cette base orthonormale :

$$f = \alpha_0 u_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i.$$

La coordonnée α_0 vaut $\langle f, u_0 \rangle = \langle f, \varepsilon_0 \rangle / \sqrt{n} = 0$ par hypothèse. On obtient donc :

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i.$$

9) b) Par orthonormalité de la base propre et par linéarité de Δ :

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i \varepsilon_i.$$

La question 7) a) donne :

$$\|Df\|^2 = -\langle f, \Delta f \rangle = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i| \alpha_i^2.$$

Par définition de c , on a $|\lambda_i| \geq c$ pour chaque i . Tous les α_i^2 étant positifs ou nuls, on conclut :

$$\|Df\|^2 \geq c \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 = c\|f\|^2.$$

L'égalité a lieu lorsque toutes les coordonnées correspondant à une valeur propre de valeur absolue strictement supérieure à c sont nulles. En particulier, le coefficient c est atteint par un vecteur propre non nul associé à une valeur propre de valeur absolue c .

10) a) On prend $n = 3$. La première colonne de la matrice de Δ dans B_3 est la colonne des coordonnées de Δe_0 . D'après 4) c), ce sont ses valeurs en 0, 1, 2.

La fonction e_0 vérifie $e_0(0) = 1$, $e_0(1) = e_0(2) = 0$ et est 3-périodique. Ainsi $e_0(-1) = e_0(2) = 0$ et $e_0(3) = e_0(0) = 1$. On calcule :

$$\Delta e_0(0) = e_0(1) - 2e_0(0) + e_0(-1) = -2,$$

$$\Delta e_0(1) = e_0(2) - 2e_0(1) + e_0(0) = 1,$$

$$\Delta e_0(2) = e_0(3) - 2e_0(2) + e_0(1) = 1.$$

La première colonne est donc bien $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On utilise ensuite la matrice complète admise dans l'énoncé.

10) b) Méthode 1 — Calculer directement le carré de A .

Le produit matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A.$$

En effet, un coefficient diagonal est $(-2)^2 + 1^2 + 1^2 = 6$; un coefficient hors diagonale est $(-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -3$.

Ainsi le polynôme réel de degré 2 $P(x) = x^2 + 3x = x(x + 3)$ annule A . Si $Av = \lambda v$ avec $v \neq 0$, alors $P(A)v = P(\lambda)v = 0$, donc $\lambda \in \{0, -3\}$.

Ces deux nombres sont effectivement valeurs propres :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $\text{Sp}(\Delta) = \{0, -3\}$ et $c = 3$.

Méthode 2 — Séparer la direction constante et les vecteurs de somme nulle.

Notons J la matrice d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A = J - 3I_3$. Chaque coefficient de J^2 est la somme de trois termes égaux à 1, donc $J^2 = 3J$. Ainsi :

$$A^2 + 3A = (J - 3I_3)^2 + 3(J - 3I_3) = J^2 - 3J = 0.$$

On retrouve le polynôme annulateur $P(x) = x(x + 3)$. De plus ${}^t(J(1, 1, 1)) = 3{}^t(1, 1, 1)$, donc A est nul sur la direction constante.

Pour un vecteur $v = {}^t(v_0, v_1, v_2)$ dont les coordonnées ont une somme nulle, $Jv = 0$ et $Av = -3v$. Cet ensemble est un sous-espace de dimension 2, puisqu'il est défini par une unique équation linéaire non nulle. La direction constante ne l'intersecte qu'en 0, donc ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Cette décomposition confirme que les seules valeurs propres sont 0 et -3 . Elle montre aussi que -3 agit sur tout l'orthogonal des constantes. La première méthode vérifie le polynôme par un produit explicite; la seconde explique la structure de la matrice.

Dans les deux cas, l'inégalité de 9) b) s'écrit, pour toute fonction $f \in F_3$ telle que $f(0) + f(1) + f(2) = 0$:

$$\|Df\|^2 \geq 3\|f\|^2.$$

En termes de valeurs de la fonction, elle devient :

$$(f(1) - f(0))^2 + (f(2) - f(1))^2 + (f(0) - f(2))^2 \geq 3(f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2).$$

La décomposition de la seconde méthode montre même que l'on a égalité pour toutes ces fonctions.

10) c) Pour $n = 3$, les valeurs de h sur I_3 sont :

$$h(0) = 1, \quad h(1) = \cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}, \quad h(2) = \cos(4\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

Leur somme est nulle, donc $\langle h, \varepsilon_0 \rangle = 0$, et $h \neq 0$. Les questions 5) e) et 6) d) donnent :

$$\|h\|^2 = \frac{3}{2}, \quad \|Dh\|^2 = 6 \sin^2(\pi/3) = \frac{9}{2} = 3\|h\|^2.$$

L'égalité est donc atteinte par une fonction non nulle : le coefficient 3 est optimal. En effet, si un coefficient C vérifiait $\|Df\|^2 \geq C\|f\|^2$ pour toutes les fonctions de somme nulle, l'application à h imposerait $C \leq 3$.

Plus généralement, la même fonction h permet une comparaison pour tout $n \geq 3$. La

formule de 5) c), utilisée avec $a = 0$ et $b = 2\pi/n \in]0, 2\pi[$, donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} h(k) = 0,$$

car les deux sinus au numérateur ont des arguments différant de 2π .

Ainsi 9) b) s'applique à h et, comme $\|h\|^2 = n/2 > 0$:

$$c \leq \frac{\|Dh\|^2}{\|h\|^2} = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Pour $n = 3$, cette borne vaut 3 et coïncide avec le coefficient obtenu. Pour un n quelconque, cette comparaison seule fournit une borne supérieure ; elle ne prouve pas à elle seule l'égalité.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 4), préambule : remplacement de « sur le même espace probabilisé que f » par « sur le même espace probabilisé que X ». La fonction f est une densité, et la variable $Y = \ln X$ est construite à partir de X .
- Exercice 3, préambule et question 1) a) : ajout explicite de l'indépendance des lancers. Cette hypothèse est nécessaire pour la loi $P(X = k) = pq^k$ et pour toutes les lois qui en découlent.