



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2020

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = xe^{x(y^2+z^2+1)}.$$

- 1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.
- 2) Déterminer le seul point critique A de f .
- 3) a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A .
- 3) b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A . Préciser la valeur de ce minimum.
- 4) a) Montrer que, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) \geq xe^x$.
- 4) b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3) b) ?
- 5) On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire $(C) : x = 1$ et $y + z = 0$. Montrer que, sous la contrainte (C) , f présente un minimum global au point $(1, 0, 0)$. Quelle est sa valeur ?
- 6) On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte $(C') :$
 $x(y^2 + z^2 + 1) = 1$. Montrer que f possède un maximum global sous la contrainte (C') . En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0; \theta]$, où θ désigne un réel strictement positif.

1) On note f une densité de X , F sa fonction de répartition, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

1) a) Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x et θ .

1) b) Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Dans la suite, on suppose que le réel θ est inconnu et on en propose deux estimateurs. Pour construire ces estimateurs, on dispose d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de X : les variables $X_1, \dots, X_n$ sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) , mutuellement indépendantes et de même loi que X .

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, elle aussi définie sur (Ω, P) .

2) a) On rappelle qu'en Python, après `import numpy as np`, `np.random.random(n)` renvoie un tableau de n réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0; 1]$. Écrire des commandes Python permettant de renseigner les valeurs nécessaires et de simuler Y_n . Pour la simulation, une valeur positive de θ est fixée.

2) b) On note F_n la fonction de répartition de Y_n . Pour tout réel x , écrire $F_n(x)$ à l'aide de $F(x)$ puis déterminer explicitement $F_n(x)$.

2) c) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n .

2) d) Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ .

3) On pose maintenant

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Déterminer $E(Z_n)$, puis proposer un estimateur $\hat{Z}_n$, construit de façon affine à partir de Z_n , qui soit un estimateur sans biais de θ .

Définition

On dit qu'un estimateur T_n de θ est d'ordre de convergence $\alpha > 0$ lorsque la suite $(n^\alpha(T_n - \theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas presque sûrement nulle.

4) a) Soient $0 < \alpha < \beta$ et une suite d'estimateurs (T_n) . On suppose que $R_n = n^\beta(T_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle R , de fonction de répartition G . En choisissant $M > 0$ tel que $-M$ et M soient des points de continuité de G , et en majorant $P(|R_n| > M)$ à l'aide des fonctions de répartition, montrer que $n^\alpha(T_n - \theta)$ converge en probabilité vers 0.

On pourra utiliser la propriété suivante : une fonction de répartition admet au plus un ensemble dénombrable de points de discontinuité ; on peut donc choisir de tels nombres M arbitrairement grands.

4) b) En déduire l'unicité de l'ordre de convergence d'un estimateur. On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'un estimateur T_n de θ possède deux ordres distincts, α et β , avec $0 < \alpha < \beta$, et montrer directement qu'une suite convergeant en probabilité vers 0 ne peut converger en loi vers une variable qui n'est pas presque sûrement nulle.

5) On considère, dans cette question, une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ et on pose $Y = -T$. Déterminer la fonction de répartition, que l'on notera F_Y , de Y .

- 6) a) Justifier que, pour tout réel x positif ou nul, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1$.
- 6) b) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n supérieur à $-\frac{x}{\theta}$, on a :

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n.$$

- 6) c) Établir enfin que $n(Y_n - \theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y . Conclure quant à l'ordre de convergence de Y_n .

- 7) a) Justifier que

$$\hat{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2X_i),$$

où $\hat{Z}_n$ est l'estimateur présenté à la troisième question.

- 7) b) On pose $\hat{Z}_n^* = \sqrt{n} \frac{\hat{Z}_n - E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}$. En appliquant le théorème limite central à la suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $\hat{Z}_n^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

- 7) c) Vérifier que $\hat{Z}_n^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta} (\hat{Z}_n - \theta)$ et en déduire que $\sqrt{n}(\hat{Z}_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$. Donner l'ordre de convergence de $\hat{Z}_n$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$. On note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f le réel $\text{Tr}(f)$ égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

- 1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
 - 1) a) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
 - 1) b) Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$.
 - 1) c) En déduire que p est diagonalisable et que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.
- 2) Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k).$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel $k \geq 2$. On considère des projecteurs de E , notés $p_1, p_2, \dots, p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

- 3) Montrer que, si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- 4) a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.

- 4) b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.

- 4) c) Établir finalement l'égalité :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k).$$

- 5) a) Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $q_k \circ p_j = p_j$.

- 5) b) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a :

$$\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0.$$

- 5) c) Montrer alors que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

- 6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

1) a) Compléter le script Python suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = np.arange(1, n + 1)
u = ...
print(u)
```

1) b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

1) c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0; 1[$.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0; x]$, simplifier la somme

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1}.$$

2) b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

2) c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

2) d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

et

$$B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

3) b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

3) c) Soit $x \in [0; 1[$. On suppose dans cette question que $a_k = \frac{x^k}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $b_k = x^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. On adopte la convention $x^0 = 1$, y compris lorsque $x = 0$.

3) c) i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

3) c) ii) Compléter le script Python suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = float(input("Entrez une valeur pour x : "))
u = np.arange(1, n + 1)
v = np.arange(n - 1, -1, -1)
```

```
a = ...
b = ...
c = ...
print(c)
```

3) c) iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

Dans cette partie, x désigne toujours un réel de $[0; 1[$.

4) a) Utiliser les première et troisième questions du préliminaire pour établir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

4) b) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

5) a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, $\ln u \leq u$.

5) b) En déduire que la série de terme général $(\ln n)x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6) On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n.$$

6) a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1) c), que :

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

6) b) Montrer finalement l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

7) a) Étudier les variations de la fonction f .

7) b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8) a) En remarquant que

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n,$$

montrer que :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2} - x.$$

8) b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f .

8) c) On admet que f est continue sur $[0; 1[$. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.