



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2020

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) Posons $q(x, y, z) = y^2 + z^2 + 1$. La fonction $(x, y, z) \mapsto xq(x, y, z)$ est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. L'exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par composition puis produit avec la fonction coordonnée x , $f(x, y, z) = xe^{xq(x, y, z)}$ est de classe C^∞ , donc de classe C^2 , sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$.

2) En notant désormais $q = 1 + y^2 + z^2$, les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + xq)e^{xq}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2ye^{xq}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2ze^{xq}.$$

L'exponentielle est strictement positive. L'annulation de la première dérivée impose $1 + xq = 0$, donc $x = -1/q \neq 0$. L'annulation des deux autres dérivées impose alors $y = z = 0$. Ainsi $q = 1$ et $x = -1$.

Réciproquement, les trois dérivées s'annulent en $(-1, 0, 0)$. Le seul point critique est donc $A = (-1, 0, 0)$.

3) a) En dérivant les expressions précédentes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = q(2 + xq)e^{xq},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2(1 + 2xy^2)e^{xq}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2x^2(1 + 2xz^2)e^{xq},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xy(2 + xq)e^{xq}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2xz(2 + xq)e^{xq},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 4x^3yze^{xq}.$$

Les dérivées mixtes dans l'ordre inverse sont égales à celles-ci par le théorème de Schwarz, puisque f est de classe C^2 .

En A , $x = -1$, $y = z = 0$ et $q = 1$. Par conséquent :

$$f_{xx}(A) = e^{-1}, \quad f_{yy}(A) = f_{zz}(A) = 2e^{-1},$$

$$f_{xy}(A) = f_{xz}(A) = f_{yz}(A) = 0.$$

3) b) La hessienne est :

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Elle est diagonale ; ses valeurs propres sont e^{-1} et $2e^{-1}$, cette dernière apparaissant deux fois. Elles sont toutes strictement positives. Comme f est de classe C^2 sur un ouvert et A est critique, le critère hessien donne un minimum local strict en A .

Sa valeur est $f(A) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

4) a) Posons $r = y^2 + z^2 \geq 0$. On a :

$$f(x, y, z) - xe^x = xe^x(e^{xr} - 1).$$

Si $x \geq 0$, alors $xr \geq 0$ et les deux facteurs x et $e^{xr} - 1$ sont positifs ou nuls. Si $x < 0$, alors $xr \leq 0$ et ces deux facteurs sont négatifs ou nuls. Dans les deux cas leur produit est positif ou nul, tandis que $e^x > 0$.

Donc, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) \geq xe^x$.

4) b) Méthode 1 — Étude de la borne de la question précédente.

Pour $h(x) = xe^x$, $h'(x) = (1+x)e^x$. La dérivée est négative sur $] -\infty, -1[$ et positive sur $] -1, +\infty[$. La fonction h atteint donc son minimum global en -1 , de valeur $-1/e$.

La question 4) a) entraîne $f(x, y, z) \geq h(x) \geq -1/e$. Comme $f(A) = -1/e$, le minimum local trouvé est un minimum global.

Pour avoir égalité, il faut d'abord $x = -1$, puis $e^{-(y^2+z^2)} = 1$, donc $y = z = 0$. Ce minimum global est atteint uniquement en A .

Méthode 2 — Normalisation de l'exposant.

Fixons $q = 1 + y^2 + z^2 \geq 1$ et posons $v = xq$. Alors $f(x, y, z) = \frac{ve^v}{q}$. L'étude de $v \mapsto ve^v$, dont la dérivée est $(1+v)e^v$, donne $ve^v \geq -1/e$. Ainsi :

$$f(x, y, z) \geq -\frac{1}{eq} \geq -\frac{1}{e}.$$

L'égalité impose $v = -1$ et $q = 1$, donc $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$. On retrouve le même minimum global unique.

La première méthode suit directement la minoration demandée ; la seconde montre comment la variable contenue dans l'exposant peut simplifier une recherche de minimum.

5) La contrainte linéaire est paramétrée par $(x, y, z) = (1, t, -t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. La fonction restreinte à cette droite vaut :

$$f(1, t, -t) = e^{1+2t^2} \geq e.$$

L'égalité équivaut à $t = 0$. Sous (C) , le minimum global unique vaut e et est atteint en $(1, 0, 0)$.

La paramétrisation traite directement toutes les valeurs autorisées et donne une conclusion globale.

- 6) La contrainte impose $x = \frac{1}{1 + y^2 + z^2}$, qui est bien définie pour tous $y, z \in \mathbb{R}$. Sous cette contrainte, l'exposant vaut 1, donc :

$$f(x, y, z) = ex = \frac{e}{1 + y^2 + z^2} \leq e.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $y = z = 0$, puis $x = 1$. Sous (C') , le maximum global unique vaut donc e et est atteint au point $(1, 0, 0)$.

Cette élimination de x est une paramétrisation élémentaire de la contrainte non linéaire ; elle ne nécessite aucun théorème général d'optimisation sous contrainte.

Exercice 2

- 1) a) Pour une loi uniforme sur $[0; \theta]$, une densité vaut $1/\theta$ sur $]0; \theta[$ et 0 ailleurs. La fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & \text{si } x > \theta. \end{cases}$$

En particulier, $F(0) = 0$ et $F(\theta) = 1$.

- 1) b) Les moments existent car X est bornée presque sûrement. Les formules de la loi uniforme donnent :

$$E(X) = \frac{\theta}{2}, \quad V(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

On peut les vérifier par transfert : $E(X) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x \, dx = \theta/2$ et

$$E(X^2) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x^2 \, dx = \theta^2/3, \text{ d'où } V(X) = \theta^2/3 - \theta^2/4 = \theta^2/12.$$

2) a) Code adapté en Python.

Voici le code complet, pour une entrée $n \geq 2$ et une entrée $\theta > 0$:

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez n, supérieur ou égal à 2 : "))
theta = float(input("Entrez une valeur positive pour theta : "))
echantillon = theta * np.random.random(n)
y_n = np.max(echantillon)
print(y_n)
```

Le tableau `echantillon` contient n réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0; \theta]$, obtenues en multipliant par θ les réalisations uniformes sur $[0; 1]$. Son maximum simule Y_n .

Le code a été exécuté avec des entrées de contrôle. Une simulation fournit une réalisation, sans démontrer la loi du maximum.

2) b) L'événement $[Y_n \leq x]$ est l'intersection des événements $[X_i \leq x]$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les X_i sont mutuellement indépendantes et de même loi, donc :

$$F_n(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = F(x)^n.$$

Ainsi :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & \text{si } x > \theta. \end{cases}$$

- 2) c) La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur chacun des intervalles séparés par 0 et θ . Elle est donc la fonction de répartition d'une variable à densité. Une densité est :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive et son intégrale vaut $\frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n-1} dx = 1$. Les valeurs retenues aux deux extrémités n'affectent pas la loi.

- 2) d) Comme $0 \leq Y_n \leq \theta$ presque sûrement, son espérance existe. Par transfert :

$$E(Y_n) = \int_0^\theta x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta.$$

Le biais est donc $E(Y_n) - \theta = -\frac{\theta}{n+1}$, qui tend vers 0. Ainsi Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ ; pour un entier n fixé, son biais est strictement négatif.

- 3) Les X_i ont une espérance, donc la linéarité donne :

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{\theta}{2}.$$

Choisissons $\widehat{Z}_n = 2Z_n$. C'est une fonction affine de Z_n , dont les coefficients ne dépendent pas du paramètre inconnu. On a $E(\widehat{Z}_n) = 2E(Z_n) = \theta$: l'estimateur est sans biais.

Si l'on cherche plus généralement $aZ_n + b$ avec a, b indépendants de θ , l'identité $a\theta/2 + b = \theta$ pour tout $\theta > 0$ impose $a = 2$ et $b = 0$.

4) a) Question adaptée au programme actuel.

On démontre uniquement le résultat nécessaire à l'unicité de l'ordre de convergence, par un contrôle des queues de distribution. Posons $S_n = n^\alpha(T_n - \theta)$ et $R_n = n^\beta(T_n - \theta)$, de fonction de répartition G_n . Alors $S_n = n^{\alpha-\beta}R_n$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Comme $G(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$ et $G(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$, on peut choisir $M > 0$ suffisamment grand, avec $-M$ et M points de continuité de G , pour que :

$$G(-M) + 1 - G(M) < \frac{\eta}{2}.$$

La propriété sur les points de discontinuité fournie dans le sujet garantit ce choix. La convergence en loi entraîne $G_n(-M) \rightarrow G(-M)$ et $G_n(M) \rightarrow G(M)$. Ainsi, pour tout n assez grand :

$$P(|R_n| > M) \leq G_n(-M) + 1 - G_n(M) < \eta.$$

D'autre part, $\beta - \alpha > 0$, donc $\varepsilon n^{\beta-\alpha} \geq M$ pour tout n assez grand. Pour ces n :

$$P(|S_n| > \varepsilon) = P(|R_n| > \varepsilon n^{\beta-\alpha}) \leq P(|R_n| > M) < \eta.$$

Puisque η est arbitraire, $P(|S_n| > \varepsilon) \rightarrow 0$. Cela établit $n^\alpha(T_n - \theta) \rightarrow 0$ en probabilité pour tout $\varepsilon > 0$.

4) b) Question adaptée au programme actuel.

Supposons par l'absurde que T_n possède deux ordres $0 < \alpha < \beta$. Par définition, $R_n = n^\beta(T_n - \theta)$ converge en loi vers une variable réelle; la question précédente donne alors $S_n = n^\alpha(T_n - \theta) \rightarrow 0$ en probabilité.

Montrons directement la conséquence sur la loi. Pour $x < 0$:

$$0 \leq P(S_n \leq x) \leq P(|S_n| > |x|/2) \rightarrow 0.$$

Pour $x > 0$:

$$0 \leq 1 - P(S_n \leq x) = P(S_n > x) \leq P(|S_n| > x) \rightarrow 0.$$

La fonction de répartition de la variable constante 0 vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 0$, et ses points de continuité sont exactement les réels non nuls. Les deux encadrements montrent donc $S_n \rightarrow 0$ en loi.

Or l'ordre α impose également une convergence en loi vers une variable U qui n'est pas presque sûrement nulle. Pour voir directement l'impossibilité, aux points de continuité négatifs de la fonction de répartition F_U , on a $F_U(x) = 0$, et aux points de continuité positifs, $F_U(x) = 1$. Choisissons des points de continuité négatifs croissant vers 0 et positifs décroissant vers 0; ils existent grâce à la propriété donnée dans le sujet. Par continuité monotone des probabilités, $P(U < 0) = 0$ et $P(U \leq 0) = 1$.

Ainsi $P(U = 0) = 1$, contradiction. Un estimateur possède donc au plus un ordre de convergence au sens de la définition.

5) La loi exponentielle de taux $1/\theta$ vérifie $P(T \geq t) = e^{-t/\theta}$ pour $t \geq 0$; elle n'a pas d'atome. Si $x < 0$, alors :

$$F_Y(x) = P(-T \leq x) = P(T \geq -x) = e^{x/\theta}.$$

Si $x \geq 0$, $Y = -T \leq 0$ presque sûrement, donc $F_Y(x) = 1$. Par conséquent :

$$F_Y(x) = \begin{cases} e^{x/\theta} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 0, car $e^{x/\theta} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^-$.

6) a) Chaque X_i appartient à $[0; \theta]$ presque sûrement. Leur maximum vérifie donc $Y_n \leq \theta$ presque sûrement, puis $n(Y_n - \theta) \leq 0$. Pour $x \geq 0$, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1$.

6) b) Pour $x < 0$ et $n > -x/\theta$, on a $0 < \theta + x/n < \theta$. Ainsi :

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = P(Y_n \leq \theta + x/n) = F_n(\theta + x/n) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n.$$

La condition sur n justifie l'emploi de la branche intérieure de F_n .

6) c) Fixons $x < 0$ et posons $v_n = x/(n\theta)$. Pour n assez grand, $1 + v_n > 0$. Le développement limité $\ln(1 + v) = v + o(v)$ lorsque $v \rightarrow 0$ donne :

$$n \ln(1 + v_n) = nv_n + n o(v_n) = \frac{x}{\theta} + o(1),$$

car $nv_n = x/\theta$ est constant. Par continuité de l'exponentielle :

$$\left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n \longrightarrow e^{x/\theta} = F_Y(x).$$

Pour $x \geq 0$, les fonctions de répartition valent déjà $1 = F_Y(x)$, d'après 6) a). La convergence est donc établie en tout réel, et F_Y est continue partout. Ainsi :

$$n(Y_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y = -T.$$

Comme $P(Y = 0) = P(T = 0) = 0$, la limite n'est pas presque sûrement nulle. L'ordre de convergence de Y_n est donc 1 ; il est unique par 4) b).

7) a) Le choix $\widehat{Z}_n = 2Z_n$ donne directement :

$$\widehat{Z}_n = 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2X_i).$$

7) b) Les variables $2X_i$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, car ce sont des transformations séparées des variables de l'échantillon. Elles ont une espérance et une variance finies, puisque les X_i sont bornées. De plus :

$$E(2X) = \theta, \quad V(2X) = 4V(X) = \frac{\theta^2}{3} > 0.$$

Le théorème limite central s'applique donc à leur moyenne empirique et donne :

$$\widehat{Z}_n^* = \sqrt{n} \frac{\widehat{Z}_n - \theta}{\theta/\sqrt{3}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

7) c) Puisque $\theta > 0$, la racine de $V(2X)$ vaut $\theta/\sqrt{3}$. Ainsi :

$$\widehat{Z}_n^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta} (\widehat{Z}_n - \theta), \quad \sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{3}} \widehat{Z}_n^*.$$

La fonction $h(t) = \theta t/\sqrt{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de n . La composition de la convergence en loi par cette fonction continue entraîne :

$$\sqrt{n}(\widehat{Z}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\theta}{\sqrt{3}} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right).$$

Le paramètre θ est fixe dans cette étude de convergence. La variance limite est strictement positive, donc la limite n'est pas presque sûrement nulle. L'ordre de convergence de $\widehat{Z}_n$ est $1/2$.

On compare donc ici les ordres 1 pour le maximum et $1/2$ pour deux fois la moyenne empirique, selon la définition de l'énoncé.

Exercice 3

Partie 1 : préliminaires

Dans cet exercice, θ désigne l'endomorphisme nul et n'est pas le paramètre statistique de l'exercice précédent.

1) a) Méthode 1 — Décomposition explicite.

Pour tout $x \in E$, écrivons $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $p^2 = p$:

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0.$$

Ainsi $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ et $p(x) \in \text{Im}(p)$, ce qui prouve $E = \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$.

Si $v \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$, il existe $u \in E$ tel que $v = p(u)$. Alors $p(v) = p^2(u) = p(u) = v$, tandis que $p(v) = 0$ puisque v appartient au noyau. Donc $v = 0$.

La somme est directe : $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Méthode 2 — Intersection et théorème du rang.

Un vecteur de l'image de p est fixé par p , car $p(p(u)) = p(u)$. Un vecteur du noyau est envoyé sur 0. Leur intersection se réduit donc à $\{0\}$. Le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Ker}(p) + \dim \operatorname{Im}(p) = \dim E.$$

La formule de dimension d'une somme, avec une intersection nulle, montre que $\operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Im}(p)$ a la dimension de E . Comme c'est un sous-espace de E , il lui est égal. On retrouve la somme directe demandée.

La première méthode fournit les deux composantes de chaque vecteur ; la seconde est utile lorsque les dimensions sont déjà connues.

1) b) Si $v \in \operatorname{Im}(p)$, il existe u tel que $v = p(u)$, puis $p(v) = p^2(u) = p(u) = v$. Ainsi $(\operatorname{Id} - p)(v) = 0$.

Réciproquement, si $v \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p)$, alors $v = p(v)$, donc $v \in \operatorname{Im}(p)$.

Les deux inclusions établissent $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p)$.

1) c) Notons $r = \dim \operatorname{Im}(p) = \operatorname{rg}(p)$. Prenons une base du noyau suivie d'une base de l'image ; leur concaténation est une base de E par 1) a).

Le projecteur est nul sur son noyau et égal à l'identité sur son image. Sa matrice dans cette base est donc diagonale :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Les blocs de taille nulle sont simplement absents si $r = 0$ ou $r = n$. L'existence de cette

base montre que p est diagonalisable. La trace de cette matrice est r , et la trace de l'endomorphisme ne dépend pas de la base. Par conséquent $\text{Tr}(p) = r = \text{rg}(p)$.

- 2) Pour $k = 1$, l'inégalité est une égalité. Supposons-la vraie pour un entier $k \geq 1$, et posons $S_k = E_1 + \dots + E_k$.

La formule de dimension de la somme de deux sous-espaces donne :

$$\dim(S_k + E_{k+1}) = \dim S_k + \dim E_{k+1} - \dim(S_k \cap E_{k+1}) \leq \dim S_k + \dim E_{k+1}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\dim(E_1 + \dots + E_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^k \dim E_i + \dim E_{k+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par récurrence.

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

- 3) Par distributivité de la composition et par l'hypothèse sur tous les couples d'indices distincts :

$$q_k^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i^2 = \sum_{i=1}^k p_i = q_k.$$

L'application q_k est un endomorphisme, étant une somme d'endomorphismes. L'identité $q_k^2 = q_k$ montre que c'est un projecteur.

Dans les questions suivantes, on suppose réciproquement que q_k est un projecteur.

4) a) Si $v \in \text{Im}(q_k)$, il existe $x \in E$ tel que :

$$v = q_k(x) = p_1(x) + \cdots + p_k(x).$$

Chaque $p_i(x)$ appartient à $\text{Im}(p_i)$, donc $v \in \text{Im}(p_1) + \cdots + \text{Im}(p_k)$. Cela établit l'inclusion demandée.

4) b) Posons $S = \text{Im}(p_1) + \cdots + \text{Im}(p_k)$. La question 4) a) et l'inégalité de la partie 1 donnent :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \text{Im}(q_k) \leq \dim S \leq \sum_{i=1}^k \dim \text{Im}(p_i) = \sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i).$$

Tous les p_i et q_k sont des projecteurs. Par 1) c) et par linéarité de la trace :

$$\sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i) = \sum_{i=1}^k \text{Tr}(p_i) = \text{Tr}(q_k) = \text{rg}(q_k).$$

Les deux bornes de $\dim S$ sont donc égales. Ainsi $\dim S = \text{rg}(q_k)$. L'inclusion $\text{Im}(q_k) \subset S$, entre deux sous-espaces de même dimension finie, devient une égalité :

$$\text{Im}(q_k) = S.$$

4) c) La question précédente donne aussi :

$$\dim S = \sum_{i=1}^k \dim \text{Im}(p_i).$$

Pour justifier la somme directe, choisissons une base de chaque $\text{Im}(p_i)$. La concaténation

de ces bases engendre S et comporte exactement $\dim S$ vecteurs. C'est donc une base de S , en particulier une famille libre.

Si des vecteurs $v_i \in \text{Im}(p_i)$ vérifient $v_1 + \dots + v_k = 0$, on les décompose dans leurs bases respectives. La liberté de la famille concaténée impose que tous les coefficients soient nuls ; ainsi tous les v_i sont nuls.

Cette propriété caractérise la somme directe. Par conséquent :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k).$$

Il ne suffirait pas, pour plusieurs sous-espaces, de vérifier uniquement des intersections deux à deux nulles ; l'argument de dimension établit bien la somme directe de toute la famille.

5) a) Fixons $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Par 4) b), $\text{Im}(p_j) \subset \text{Im}(q_k)$. Comme q_k est un projecteur, il fixe tout vecteur de son image.

Pour tout $x \in E$, le vecteur $p_j(x)$ appartient à cette image, donc $q_k(p_j(x)) = p_j(x)$. Ainsi $q_k \circ p_j = p_j$.

5) b) Pour tout $x \in E$, la question précédente donne :

$$\sum_{i=1}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x).$$

Le terme d'indice j est $p_j^2(x) = p_j(x)$; en le soustrayant, il reste :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0.$$

5) c) Chaque $p_i(p_j(x))$ appartient à $\text{Im}(p_i)$. La somme de ces vecteurs est nulle par 5) b).

Comme les images forment une somme directe d'après 4) c), chaque terme est nul.

Cela vaut pour tout $x \in E$ et tout $i \neq j$. Ainsi $p_i \circ p_j = \theta$ pour tous les couples d'indices distincts.

6) La question 3) donne la suffisance, et les questions 4) et 5) donnent la nécessité.

Finalement :

$$p_1 + \dots + p_k \text{ est un projecteur} \iff \forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = \theta.$$

Cette condition concerne tous les couples ordonnés : pour des indices distincts, les deux compositions $p_i \circ p_j$ et $p_j \circ p_i$ sont nulles.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1) a) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = np.arange(1, n + 1)
u = np.sum(1.0 / x) - np.log(n)
print(u)
```

L'entrée doit vérifier $n \geq 1$. Le tableau x contient les entiers de 1 à n , car la borne supérieure de np.arange est exclue. La division $1.0 / x$ produit les inverses coefficient

par coefficient. Leur somme est

$$\sum_{k=1}^n 1/k;$$

np. $\log$ est le logarithme népérien.

Le script complet a été exécuté pour plusieurs valeurs de contrôle, notamment $n = 1$, pour lequel la sortie est $u_1 = 1$.

1) b) Méthode 1 — Encadrement d'une intégrale.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur ce segment de longueur 1, on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Méthode 2 — Égalité des accroissements finis.

La fonction logarithme est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, car $k \geq 1$. Il existe donc $\xi \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln'(\xi)((k+1) - k) = \frac{1}{\xi}.$$

La décroissance de l'inverse donne $1/(k+1) \leq 1/\xi \leq 1/k$, d'où les deux inégalités.

La première méthode prépare les comparaisons entre sommes et intégrales ; la seconde donne l'encadrement directement par la dérivée.

1) c) Notons

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k.$$

En sommant la majoration de 1) b) pour k de 1 à n , on a :

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) \leq H_n.$$

Ainsi $u_n = H_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$.

Pour $n \geq 2$, sommons la minoration de 1) b) pour k de 1 à $n-1$:

$$H_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln n.$$

D'où $u_n \leq 1$. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$, donc la conclusion reste valable. Finalement $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.

2) a) Comme $0 \leq t \leq x < 1$, on a $t \neq 1$. La somme géométrique finie donne :

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

La formule vaut aussi pour $t = 0$, le terme de degré zéro valant 1.

2) b) Intégrons l'identité précédente sur $[0, x]$. Le membre de gauche est une somme finie de fonctions continues, donc la linéarité de l'intégrale s'applique :

$$\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt.$$

La primitive de t^{p-1} est t^p/p et celle de $1/(1-t)$ est $-\ln(1-t)$. Par conséquent :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Aucun échange entre intégrale et somme infinie n'intervient.

2) c) Pour $0 \leq t \leq x < 1$, $0 \leq 1/(1-t) \leq 1/(1-x)$. Ainsi :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}.$$

Si $x = 0$, cette borne est nulle. Si $0 < x < 1$, elle tend vers 0, puisque $x^{n+1} \rightarrow 0$ et $n+1 \geq 1$. Par encadrement, l'intégrale tend vers 0 pour chaque x fixé dans $[0, 1[$.

2) d) L'identité de 2) b) et la limite de 2) c) montrent que les sommes partielles

$$\sum_{p=1}^n x^p/p$$

tendent vers le réel $-\ln(1-x)$. C'est précisément la définition de la convergence de la série. Ainsi :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x), \quad 0 \leq x < 1.$$

3) a) On utilise seulement des sommes finies. Posons :

$$C_n = \sum_{m=1}^n c_m = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_{m-i}, \quad P_n = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right).$$

Dans C_n , les produits $a_i b_j$ correspondent exactement aux couples d'entiers $i \geq 1, j \geq 0$ et $i + j \leq n$, en posant $j = m - i$. Chacun de ces couples appartient au rectangle $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$, qui est l'ensemble des indices de P_n .

Inversement, chaque couple de ce rectangle vérifie $1 \leq i + j \leq 2n$. Son produit apparaît donc dans C_{2n} , parmi les couples d'indices de somme au plus $2n$.

Comme tous les produits sont positifs ou nuls, ces inclusions d'ensembles finis d'indices entraînent :

$$C_n \leq P_n \leq C_{2n},$$

soit exactement les inégalités demandées.

- 3) b) Chaque c_n est positif ou nul. Les sommes partielles C_n sont donc croissantes. Les sommes partielles des séries à termes positifs a_n et b_n sont majorées respectivement par A et B , donc 3) a) donne :

$$0 \leq C_n \leq P_n \leq AB.$$

Par le théorème de la limite monotone, C_n converge vers un réel C ; la série de terme général c_n converge donc.

De plus, les deux facteurs définissant P_n tendent respectivement vers A et B , donc $P_n \rightarrow AB$. Puisque $C_n \rightarrow C$ et $C_{2n} \rightarrow C$, le passage à la limite dans $C_n \leq P_n \leq C_{2n}$ donne $C \leq AB \leq C$, donc $C = AB$.

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Cette identité a été démontrée dans le cas particulier des termes positifs, sans utiliser un résultat général sur les produits de séries.

- 3) c) i) Pour $x \in [0, 1[$, les termes $a_n = x^n/n$ et $b_n = x^n$ sont positifs ou nuls. D'après 2) d), la série de terme général a_n converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$. La série de terme général b_n est géométrique de raison x , avec $|x| < 1$, et sa somme vaut $1/(1-x)$.

Pour $x = 0$, tous les a_n sont nuls ; la suite b_n commence par $b_0 = 1$ puis est nulle. Les mêmes conclusions restent donc valables.

- 3) c) ii) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
x = float(input("Entrez une valeur pour x : "))
u = np.arange(1, n + 1)
v = np.arange(n - 1, -1, -1)
a = x ** u / u
b = x ** v
c = np.sum(a * b)

print(c)
```

Les entrées doivent vérifier $n \geq 1$ et $0 \leq x < 1$. Les tableaux u et v sont $(1, 2, \dots, n)$ et $(n-1, n-2, \dots, 0)$. La borne finale -1 est exclue, ce qui permet d'inclure 0.

Le tableau a contient les a_k , et b contient, dans le même ordre, les b_{n-k} . Le produit $a * b$

est effectué coefficient par coefficient ; sa somme est donc

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = c_n.$$

Le script complet a été exécuté pour des valeurs de contrôle, y compris $x = 0$ et $n = 1$. Dans NumPy, la puissance d'exposant zéro vaut 1, conformément à la convention indiquée dans le sujet.

3) c) iii) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$a_k b_{n-k} = \frac{x^k}{k} x^{n-k} = \frac{x^n}{k}.$$

La formule reste valable pour $x = 0$, puisque $k \geq 1$ et $n \geq 1$. En sommant :

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^n}{k} = x^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = x^n H_n.$$

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

4) a) Rectification locale du renvoi : le PDF cite uniquement la première question du préliminaire, alors que l'identité de produit repose sur la troisième. Le sujet renvoie aux questions 1 et 3, la première pouvant aussi servir à contrôler la convergence du membre de gauche.

Fixons $x \in [0, 1[$. Les suites $a_n = x^n/n$ et $b_n = x^n$ satisfont les hypothèses de 3) b), d'après 3) c) i). Leur coefficient c_n est $H_n x^n$ par 3) c) iii). L'identité démontrée en 3) b) donne donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

Pour utiliser aussi la première question, 1) c) donne $H_n = \ln n + u_n \leq \ln n + 1$. De plus $\ln n = \int_1^n dt/t \leq n - 1$ pour $n \geq 1$. Ainsi $0 \leq H_n \leq n$.

La série géométrique dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

converge pour $0 \leq x < 1$, avec somme $x/(1-x)^2$. La comparaison $0 \leq H_n x^n \leq nx^n$ confirme donc directement la convergence du membre de gauche. La valeur de sa somme reste celle obtenue par la question 3).

4) b) Par 2) d),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n = -\ln(1-x).$$

La série géométrique donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x).$$

En substituant ces deux valeurs dans 4) a) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

En $x = 0$, les deux membres valent 0.

5) a) Méthode 1 — Recherche du minimum d'une différence.

La fonction $h(u) = u - \ln u$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(u) = 1 - 1/u = (u - 1)/u$. Elle décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$. Son minimum global vaut $h(1) = 1$.

Ainsi $u - \ln u \geq 1$, donc $\ln u \leq u - 1 \leq u$ pour tout $u > 0$.

Méthode 2 — Concavité et tangente du logarithme.

La dérivée seconde du logarithme est $-1/u^2 < 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$: le logarithme est concave. Une fonction concave dérivable est située sous chacune de ses tangentes. La tangente en 1 est $u \mapsto \ln 1 + (u - 1) \ln'(1) = u - 1$. Donc $\ln u \leq u - 1 \leq u$.

La première méthode est une étude de fonction ; la seconde permet de reconnaître une inégalité de tangente réutilisable avec d'autres fonctions concaves.

5) b) Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1[$, les termes vérifient :

$$0 \leq (\ln n)x^n \leq nx^n.$$

La série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

converge, comme série géométrique dérivée, et vaut $x/(1-x)^2$. Par comparaison, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n$$

converge pour chaque $x \in [0, 1[$. En particulier, f est bien définie sur cet intervalle.

6) a) La question 1) c) donne $0 \leq H_n - \ln n \leq 1$, donc $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n$.

Multiplions par $x^n \geq 0$ et sommons d'abord de $n = 1$ à N :

$$\sum_{n=1}^N H_n x^n - \sum_{n=1}^N x^n \leq \sum_{n=1}^N (\ln n) x^n \leq \sum_{n=1}^N H_n x^n.$$

Les trois séries concernées convergent par 4) et 5). On peut donc passer à la limite dans cette inégalité de sommes partielles, puis utiliser la linéarité des séries convergentes.

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x/(1-x) :$$

$$\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Cette méthode évite toute opération sur une série dont la convergence n'aurait pas été établie.

6) b) Pour $0 < x < 1$, posons $g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x} > 0$. Divisons l'encadrement de 6) a) par $g(x)$:

$$1 - \frac{x}{-\ln(1-x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, $x \rightarrow 1$ tandis que $-\ln(1-x) \rightarrow +\infty$. Le quotient soustrait tend donc vers 0. Par encadrement, $f(x)/g(x) \rightarrow 1$, soit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

L'équivalent est ainsi obtenu en contrôlant le rapport ; il ne résulte pas d'une addition non justifiée d'équivalents.

- 7) a) Comparons les valeurs de la fonction sans dériver la série. Soient $0 \leq a < b < 1$.
 Pour chaque $n \geq 1$, $(\ln n)(b^n - a^n) \geq 0$. Le terme $n = 2$ est strictement positif, car $\ln 2 > 0$ et $b^2 - a^2 > 0$.

Pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^N (\ln n)b^n - \sum_{n=1}^N (\ln n)a^n \geq (\ln 2)(b^2 - a^2) > 0.$$

Les deux séries convergent d'après 5) b). En passant à la limite :

$$f(b) - f(a) \geq (\ln 2)(b^2 - a^2) > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, 1[$. Aucun échange entre dérivée et somme infinie n'est nécessaire.

- 7) b) En 0, tous les termes valent 0, donc $f(0) = 0$. L'équivalent de 6) b) donne
 $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$: en effet, $-\ln(1-x) \rightarrow +\infty$ et $1/(1-x) \rightarrow +\infty$.

Le tableau de variations est :

x	0	$]0, 1[$	1^-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La valeur $+\infty$ indique la limite à gauche en 1, qui n'appartient pas au domaine de f .

- 8) a) Comme $\ln 1 = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)x^n.$$

Les termes sont positifs ou nuls et, par 5) a), $\ln n \leq n$. La comparaison des sommes partielles, puis le passage à la limite, donnent :

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - x = \frac{x}{(1-x)^2} - x.$$

La soustraction de x retire exactement le terme d'indice 1.

8) b) La borne de 8) a) tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$. Par encadrement, $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

Pour $x > 0$, divisons cette borne par x :

$$0 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{(1-x)^2} - 1.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Le quotient de différences tend donc vers 0. Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_+(0) = 0$.

8) c) La continuité de f sur $[0, 1[$ est admise dans le sujet ; sa positivité est établie. L'intégrale est impropre en 1.

Méthode 1 — Comparaison à l'équivalent.

L'équivalent de 6) b) porte sur deux fonctions positives au voisinage de 1. Il existe donc $a \in]0, 1[$ tel que $f(x) \geq \frac{1}{2}g(x)$ pour $a \leq x < 1$, où $g(x) = -\ln(1-x)/(1-x)$.

Pour $a < b < 1$, une primitive de g est $\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$, comme le vérifie la dérivation. Ainsi :

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{1}{2}(\ln(1-b))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1-a))^2 \rightarrow +\infty \text{ quand } b \rightarrow 1^-.$$

La comparaison des intégrales de fonctions positives montre que $\int_a^1 f(x) dx$ diverge vers $+\infty$. Sur $[0, a]$, l'intégrale est finie par continuité. Donc $\int_0^1 f(x) dx$ diverge vers $+\infty$.

Méthode 2 — Intégration de la minoration explicite.

Pour tout $b \in]0, 1[$, on peut intégrer sur le segment $[0, b]$ la minoration de 6) a), car toutes les fonctions y sont continues :

$$\int_0^b f(x) dx \geq \int_0^b \left(\frac{-\ln(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right) dx.$$

Le premier terme a pour intégrale $\frac{1}{2}(\ln(1-b))^2$. Comme $x/(1-x) = 1/(1-x) - 1$, le second a pour intégrale $-\ln(1-b) - b$. Donc :

$$\int_0^b f(x) dx \geq \frac{1}{2}(\ln(1-b))^2 + \ln(1-b) + b.$$

En posant $L = -\ln(1-b) \rightarrow +\infty$, cette borne devient $L^2/2 - L + b$, qui tend vers $+\infty$. Cela prouve à nouveau la divergence vers $+\infty$.

La première méthode exploite l'équivalent; la seconde suffit à partir de l'encadrement exact et fournit une minoration explicite des intégrales tronquées.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule de l'échantillon et question 2 : l'espace probabilisé est noté (Ω, P) ; la composante abstraite non utilisée de la notation originale a été retirée, conformément à l'absence de théorie des tribus dans le référentiel.
- Exercice 2, question 2) a) : Code adapté en Python. La simulation uniforme est réalisée par `np.random.random`, suivie d'une multiplication par le paramètre positif et d'un calcul de maximum. Le comportement probabiliste demandé est conservé.
- Exercice 2, question 4) a) : Question adaptée au programme actuel. La demande originale portant sur un théorème général de produit dans une convergence en loi a été remplacée par le seul résultat nécessaire à l'unicité de l'ordre : si $n^\beta(T_n - \theta)$ converge en loi et $0 < \alpha < \beta$, alors $n^\alpha(T_n - \theta)$ converge en probabilité vers 0. La preuve est un encadrement explicite des probabilités. La possibilité de choisir les points de continuité nécessaires de la fonction de répartition est fournie dans le sujet.
- Exercice 2, question 4) b) : l'indication est ajustée à la question 4) a) adaptée ; la conclusion d'unicité et son numéro sont conservés. La contradiction est démontrée directement par les fonctions de répartition.
- Problème, question 1) a) : Code adapté en Python. Le tableau des entiers de 1 à n , la somme des inverses et le logarithme népérien sont conservés.
- Problème, question 3) c) : la convention $x^0 = 1$ est explicitée, y compris pour $x = 0$, afin de fixer le terme b_0 à l'extrémité du domaine.
- Problème, question 3) c) ii) : Code adapté en Python. Les tableaux d'indices croissants et décroissants, les puissances coefficient par coefficient et la somme des produits sont conservés ; les bornes exclusives de `np.arange` sont ajustées.
- Problème, question 4) a) : le renvoi erroné à la seule première question du préliminaire est remplacé par un renvoi aux première et troisième questions. La

troisième établit l'identité de produit utilisée ; la première permet un contrôle supplémentaire de la convergence.