



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2019

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
- 1) b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A , avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
- 1) c) En Python, la commande `np.linalg.matrix_rank(M)` renvoie le rang de la matrice M , et `np.eye(3)` renvoie la matrice identité d'ordre 3. On a saisi :

Python

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1 = np.linalg.matrix_rank(A - np.eye(3))
r2 = np.linalg.matrix_rank(A - 2 * np.eye(3))
print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

Python a renvoyé $r1 = 1$ et $r2 = 2$.

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

- 1) d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$.
- 2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
- 2) b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b, c , les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) .

Partie 2 : généralisation

Soient n, p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, E un espace vectoriel réel de dimension n , et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E .

- 3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D .

- 3) a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \cdots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

- 3) b) En déduire un polynôme annulateur de f .

Pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit le polynôme :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

4) a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

4) b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

4) c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k.$$

4) d) En déduire que

$$\sum_{i=1}^p L_i = 1.$$

5) a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x par l'endomorphisme $L_k(f)$.

5) b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan , est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1) a) Rappeler l'expression, pour tout réel x , de $\text{Arctan}'(x)$.

1) b) Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \pi/2.$$

1) c) Justifier l'équivalent $\text{Arctan}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

2) a) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) b) Déterminer la fonction de répartition F de X .

3) a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

3) b) Déterminer la fonction de répartition G de T .

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi que X .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie elle aussi sur cet espace probabilisé.

- 4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n .
- 4) b) On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $Y_n = \frac{\pi}{n} M_n$. Justifier que sa fonction de répartition G_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{nx}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \right)^n.$$

- 5) a) Déterminer, pour tout $x \leq 0$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

- 5) b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\pi}{nx} \right) \right)^n.$$

- 5) c) En déduire, pour tout $x > 0$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

- 5) d) Déduire des questions précédentes que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers T .

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n , et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Le produit scalaire de $x, y \in E$ est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E . On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E , noté u^* , qui à tout $y \in E$ associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors, pour tout $y \in E$:

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i.$$

1) b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1) a) est effectivement un endomorphisme de E .

2) b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E , appelé adjoint de u , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normal quand $u \circ u^* = u^* \circ u$. Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E . Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

4) a) Montrer que $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

4) b) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.

5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

6) On suppose que u possède une valeur propre λ , et on note E_λ le sous-espace propre associé.

- 6) a) Montrer que E_λ est stable par u^* .
- 6) b) Établir que $(u^*)^* = u$, puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u .

Problème

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on appelle fonction génératrice de X la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^n P(X = k)t^k.$$

- 1) Calculer $G(1)$.
- 2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G .
- 3) Établir la relation $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Partie 2

On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

- 4) a) Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- 4) b) Montrer alors que $\forall n \geq 2, \quad \ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1.$
- 4) c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty.$
- 5) Montrer que la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- 6) En Python, `np.random.randint(a, b)` simule une variable uniforme sur les entiers de a à $b - 1$, pour des entiers $a < b$. Le tableau `A` est indexé à partir de 0.

Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des cases `A[j]` et `A[p-1]`. Les numéros de lignes sont donnés en commentaires.

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : ")) # (1)
A = np.arange(1, n + 1) # (2)
p = n # (3)
for k in range(n): # (4)
    j = np.random.randint(0, p) # (5)
    aux = ... # (6)
    A[j] = ... # (7)
    A[p - 1] = ... # (8)
    p = p - 1 # (9)
print(A) # (11)
```

- 7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script correctement complété, le tableau `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.

On considère alors les commandes Python suivantes, exécutées à la suite du script précédent. La variable c représente une position numérotée à partir de 1.

Python

```
m = A[0]
c = 1
for k in range(1, n):
    if A[k] > m:
        m = A[k]
        c = k + 1
print(c)
```

- 7) a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable m contient la valeur n .
- 7) b) Quel est le contenu de la variable c affiché à la fin de ces commandes ?
- 7) c) On rappelle que `np.where(test)[0]` renvoie le tableau des indices des cases d'un tableau à une dimension qui satisfont le test booléen `test`. Ces indices commencent à 0 ; `[0]` appliqué à ce tableau extrait son premier indice.

Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable c étudiée plus haut :

Python

```
import numpy as np

c = np.where(...)[0][0] + 1
print(c)
```

On admet que les contenus des cases $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$ sont des variables aléatoires notées $A_1, A_2, \dots, A_n$, et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire notée X_n .

On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace

probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note G_n la fonction génératrice de X_n , E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1 .

9) a) Montrer que $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

9) b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3 .

9) c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j).$$

9) d) Donner la loi de X_4 .

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9) c) reste valable pour $j = 1$.

10) b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \frac{t + n - 1}{n} G_{n-1}(t) \quad (*).$$

10) c) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t + j).$$

11) En dérivant la relation (*), trouver une relation entre E_n et E_{n-1} , puis montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad E_n = u_n.$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n .

12) a) En dérivant une deuxième fois la relation (*), montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

12) b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, V_n en fonction de u_n et h_n .

12) c) Montrer que $V_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln n$.