



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2019

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Partie 1 : étude d'un exemple

1) a) On cherche une relation entre A^2 , A et I_3 . Le produit matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I_3.$$

Ainsi, $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ est donc un polynôme annulateur de degré 2 de A .

1) b) Si λ est une valeur propre et v un vecteur propre non nul, alors

$$P(A)v = P(\lambda)v = 0. \text{ Comme } v \neq 0, P(\lambda) = 0.$$

Les seules valeurs propres possibles sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Leur appartenance effective au spectre sera établie par les noyaux.

1) c) Code adapté en Python. Le théorème du rang suggère :

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) = 3 - 1 = 2, \quad \dim \text{Ker}(f - 2 \text{Id}) = 3 - 2 = 1.$$

On conjecture donc que 1 et 2 sont effectivement valeurs propres, avec des espaces propres de dimensions respectives 2 et 1. Le calcul numérique ne remplace pas la résolution exacte de la question suivante.

Code complet exécuté :

Python

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 0, 0], [-2, 3, -2], [-1, 1, 0]])
r1 = np.linalg.matrix_rank(A - np.eye(3))
r2 = np.linalg.matrix_rank(A - 2 * np.eye(3))
print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

Les sorties obtenues sont $r1 = 1$ et $r2 = 2$.

1) d) Pour $x = (a, b, c)$, le système $(A - I_3)x = 0$ se réduit à $-a + b - c = 0$. Ainsi :

$$\text{Ker}(f - \text{Id}) = \{(a, a + c, c) : a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)).$$

Les deux vecteurs sont indépendants, puisque leurs première et troisième composantes permettent de séparer leurs coefficients. Ils forment une base du premier noyau.

Le système $(A - 2I_3)x = 0$ s'écrit $a = 0, -2a + b - 2c = 0, -a + b - 2c = 0$. Il équivaut à $a = 0$ et $b = 2c$. Donc :

$$\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}((0, 2, 1)).$$

Le vecteur $(0, 2, 1)$ est non nul : il forme une base du second noyau. Les dimensions conjecturées et les deux valeurs propres sont confirmées.

2) a) Posons $u_1 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (0, 1, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$. Ces vecteurs satisfont les contraintes de composantes : les relations des noyaux imposent respectivement les proportions $(a, a, 0)$, $(0, c, c)$ et $(0, 2c, c)$; le plus petit paramètre entier strictement positif est 1.

Méthode 1 — Somme directe des espaces propres.

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Leurs dimensions sont 2 et 1, dont la somme vaut $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Leur somme est donc tout l'espace. La réunion de leurs bases donne une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 — Vérification directe de la liberté.

Si $\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2 = 0$, les composantes donnent $\alpha = 0$, $\alpha + \beta + 2\gamma = 0$, $\beta + \gamma = 0$. En soustrayant les deux dernières égalités avec $\alpha = 0$, on obtient $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$.

Cette famille de trois vecteurs est libre dans un espace de dimension 3 ; c'est donc une base. La première méthode utilise la structure des espaces propres, tandis que la seconde permet une vérification élémentaire sans déterminant.

2) b) Écrivons $x = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2$. Cela donne :

$$a = \alpha, \quad b = \alpha + \beta + 2\gamma, \quad c = \beta + \gamma.$$

La première égalité donne $\alpha = a$. La différence des deux dernières donne $\gamma = b - a - c$. Enfin, $\beta = c - \gamma = a - b + 2c$.

Les coordonnées de x sont donc $(a, a - b + 2c, b - a - c)$ dans la base choisie. En particulier :

$$x = \underbrace{au_1 + (a - b + 2c)v_1}_{\in \text{Ker}(f - \text{Id})} + \underbrace{(b - a - c)v_2}_{\in \text{Ker}(f - 2\text{Id})}.$$

Partie 2 : généralisation

- 3) a) Rectification de l'énoncé : la matrice nulle est celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et non celle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ imprimée dans le PDF, puisque n est quelconque.

Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux de D . Chaque d_r est une valeur propre de f , donc appartient à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Le produit demandé est diagonal, avec pour coefficient diagonal de rang r le nombre

$$\prod_{k=1}^p (d_r - \lambda_k).$$

L'un des facteurs est nul, donc tous les coefficients diagonaux sont nuls. Ainsi :

$$(D - \lambda_1 I_n) \cdots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

- 3) b) Posons

$$Q(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k).$$

Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $Q(f)$ est $Q(D)$, nulle par la question précédente. Par conséquent $Q(f) = 0$, et Q est un polynôme annulateur de f .

- 4) a) Les dénominateurs sont non nuls, car les valeurs propres sont deux à deux distinctes. Si $i = k$, chaque facteur évalué en λ_k vaut 1. Si $i \neq k$, le facteur d'indice $j = i$ a un numérateur nul. Donc :

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

- 4) b) Chaque L_k est un produit de $p - 1$ facteurs affines, de coefficient dominant non nul. Son degré est $p - 1$, donc $L_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Si

$$\sum_{k=1}^p a_k L_k = 0,$$

on évalue cette égalité en λ_i . La question précédente donne $a_i = 0$, pour tout i . La famille est donc libre.

Or $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = p$. Cette famille libre de p polynômes est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

- 4) c) Méthode 1 — Coordonnées dans la base obtenue.

Il existe des scalaires $a_1, \dots, a_p$ tels que

$$P = \sum_{k=1}^p a_k L_k.$$

En évaluant en λ_i , on obtient $P(\lambda_i) = a_i$. Ainsi :

$$P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k.$$

Méthode 2 — Nombre de racines d'un polynôme.

Le polynôme

$$R = P - \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k$$

est de degré au plus $p - 1$ et s'annule en chacun des p nombres distincts λ_i . Un polynôme non nul de degré au plus $p - 1$ ne peut avoir p racines distinctes ; donc $R = 0$.

La première méthode calcule des coordonnées ; la seconde permet de vérifier directement une identité d'interpolation.

- 4) d) Le polynôme constant $P = 1$ appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$. La formule précédente, avec $P(\lambda_k) = 1$, donne

$$\sum_{k=1}^p L_k = 1.$$

- 5) a) Méthode 1 — Utilisation du polynôme annulateur.

Pour k fixé, posons

$$d_k = \prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j),$$

non nul. Alors $(X - \lambda_k)L_k(X) = Q(X)/d_k$.

En évaluant en f , les règles du calcul polynomial donnent :

$$(f - \lambda_k \text{Id}) \circ L_k(f) = \frac{1}{d_k} Q(f) = 0.$$

Pour tout $x \in E$, cela signifie $(f - \lambda_k \text{Id})(L_k(f)(x)) = 0$. Donc

$$L_k(f)(x) \in \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}).$$

Méthode 2 — Action sur une base propre.

Puisque f est diagonalisable, on dispose d'une base de vecteurs propres. Sur un vecteur propre v de valeur propre λ_i , $L_k(f)(v) = L_k(\lambda_i)v$: cette image vaut v si $i = k$, et 0 sinon. En décomposant x dans cette base, $L_k(f)(x)$ est donc une combinaison de vecteurs de l'espace propre associé à λ_k .

Cette seconde approche montre concrètement que $L_k(f)$ conserve la composante de x dans cet espace propre et annule les autres.

5) b) En évaluant

$$\sum_{k=1}^p L_k = 1$$

en f , on obtient

$$\sum_{k=1}^p L_k(f) = \text{Id}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^p L_k(f)(x), \quad L_k(f)(x) \in \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}).$$

Les espaces propres de valeurs propres distinctes sont en somme directe. Cette écriture est donc unique : il s'agit de la décomposition cherchée.

6) Ici $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Les polynômes sont $L_1(X) = 2 - X$ et $L_2(X) = X - 1$.

Pour $x = (a, b, c)$, $f(x) = (a, -2a + 3b - 2c, -a + b)$, donc :

$$L_1(f)(x) = (2\text{Id} - f)(x) = (a, 2a - b + 2c, a - b + 2c) = au_1 + (a - b + 2c)v_1,$$

$$L_2(f)(x) = (f - \text{Id})(x) = (0, -2a + 2b - 2c, -a + b - c) = (b - a - c)v_2.$$

Leur somme vaut bien (a, b, c) et les coefficients sont ceux de la question 2) b).

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) a) La dérivée de l'arc tangente est $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) b) Comme $\tan(\pi/4) = 1$ et $\pi/4 \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\text{Arctan}(1) = \pi/4$.

Méthode 1 — Dérivation d'une somme.

Pour $x > 0$, posons $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1/x^2}{1+1/x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle. Comme $h(1) = 2 \text{Arctan}(1) = \pi/2$, on obtient $h(x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Angles complémentaires.

Posons $\theta = \text{Arctan}(x)$. Pour $x > 0$, $\theta \in]0, \pi/2[$. Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$ et $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$. Ainsi :

$$\tan(\pi/2 - \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{x}.$$

Comme $\pi/2 - \theta \in]0, \pi/2[$, l'inversion de la tangente donne $\text{Arctan}(1/x) = \pi/2 - \theta$. On retrouve la même identité. La première preuve ne requiert qu'une dérivation ; la seconde explique son sens trigonométrique.

1) c) La dérivabilité en 0, avec $\text{Arctan}(0) = 0$ et $\text{Arctan}'(0) = 1$, donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} = 1.$$

Donc $\text{Arctan}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

2) a) La fonction $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $a < b$, une primitive donne :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)).$$

Les limites de l'arc tangente en $-\infty$ et $+\infty$ sont $-\pi/2$ et $\pi/2$. Les deux intégrales impropres convergent, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Les conditions d'une densité sont satisfaites.

2) b) Pour tout réel x , l'intégrale de la densité donne :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}.$$

3) a) La fonction g est positive sur $]0, +\infty[$, nulle ailleurs, et continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Une éventuelle discontinuité en 0 ne gêne pas la définition d'une densité.

Pour $0 < a < b$, la dérivée de $e^{-1/x}$ vaut $x^{-2}e^{-1/x}$, donc :

$$\int_a^b g(x) dx = e^{-1/b} - e^{-1/a}.$$

Lorsque $a \rightarrow 0^+$, $e^{-1/a} \rightarrow 0$; lorsque $b \rightarrow +\infty$, $e^{-1/b} \rightarrow 1$. L'intégrale impropre sur $]0, +\infty[$ converge et vaut 1. Ainsi g est une densité, et $P(T > 0) = 1$.

3) b) Pour $x \leq 0$, $G(x) = 0$. Pour $x > 0$, le calcul précédent donne :

$$G(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x g(t) dt = e^{-1/x}.$$

Ainsi $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$ Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0

puisque $e^{-1/x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

4) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{M_n \leq x\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x\}$. L'indépendance mutuelle des variables implique celle de ces événements. Comme elles ont toutes pour fonction de répartition F :

$$F_{M_n}(x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) = F(x)^n = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \right)^n.$$

4) b) Le coefficient π/n est strictement positif, donc $\{Y_n \leq x\} = \{M_n \leq nx/\pi\}$. En utilisant la question précédente :

$$G_n(x) = F_{M_n}(nx/\pi) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(nx/\pi) + \frac{1}{2} \right)^n.$$

5) a) Si $x \leq 0$, alors $nx/\pi \leq 0$. L'arc tangente est croissante, donc

$$0 \leq F(nx/\pi) \leq F(0) = 1/2. \text{ Ainsi } 0 \leq G_n(x) \leq 2^{-n}.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$, y compris $x = 0$ où $G_n(0) = 2^{-n}$.

5) b) Pour $x > 0$, on applique la question 1) b) à $nx/\pi > 0$:

$$\operatorname{Arctan}(nx/\pi) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\pi/(nx)).$$

En substituant cette égalité dans $G_n(x)$, on obtient :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(\pi/(nx)) \right)^n.$$

- 5) c) Pour $x > 0$ fixé, posons $a_n = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(\pi/(nx))$. On a $0 < a_n < 1/2$, donc $\ln(1 - a_n)$ est défini.

Comme $\pi/(nx) \rightarrow 0$, la question 1) c) donne $a_n \sim 1/(nx)$. Par conséquent $a_n \rightarrow 0$ et $na_n \rightarrow 1/x$.

L'équivalent usuel $\ln(1 - u) \sim -u$ lorsque $u \rightarrow 0$ donne $n \ln(1 - a_n) \rightarrow -1/x$. En passant par la fonction exponentielle, continue :

$$G_n(x) = \exp(n \ln(1 - a_n)) \rightarrow e^{-1/x}.$$

Le passage au logarithme traite explicitement la puissance dont l'exposant varie ; aucun échange de limite ni théorème de convergence de variables aléatoires supplémentaire n'est nécessaire.

- 5) d) Les questions 5) a) et 5) c) montrent que $G_n(x) \rightarrow G(x)$ pour tout réel x . La fonction G , fonction de répartition de T , est continue partout, comme établi en 3) b).

La définition de la convergence en loi par les fonctions de répartition donne donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T$.

Exercice 3

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E

- 1) a) Dans une base orthonormale, tout vecteur $z \in E$ s'écrit

$$z = \sum_{i=1}^n \langle e_i, z \rangle e_i.$$

Si u^* satisfait l'identité demandée, on peut l'appliquer avec $x = e_i$:

$$\langle e_i, u^*(y) \rangle = \langle u(e_i), y \rangle.$$

En développant $u^*(y)$ dans la base orthonormale, on en déduit

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

pour tout $y \in E$.

1) b) Méthode 1 — Formule imposée par les coordonnées.

La formule de 1) a) ne dépend que de u , de la base fixée et de y . Deux applications satisfaisant l'identité ont donc la même image de chaque y , et sont égales. L'adjoint, s'il existe, est unique.

Méthode 2 — Positivité du produit scalaire.

Si v et w sont deux solutions, alors pour tous $x, y \in E$, $\langle x, v(y) - w(y) \rangle = 0$. Pour y fixé, choisissons $x = v(y) - w(y)$. Il vient $\|v(y) - w(y)\|^2 = 0$, donc $v(y) = w(y)$.

Cette seconde preuve établit l'unicité sans choisir de base ; la première exploite directement la formule demandée.

2) a) Définissons

$$v(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $y, z \in E$, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$v(ay + bz) = \sum_{i=1}^n (a \langle u(e_i), y \rangle + b \langle u(e_i), z \rangle) e_i = av(y) + bv(z).$$

Ainsi v est linéaire de E dans E , donc un endomorphisme. C'est l'application notée u^* dans l'énoncé.

2) b) Écrivons

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

avec $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Pour tout $y \in E$, l'orthonormalité et la linéarité donnent :

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle u(e_i), y \rangle = \left\langle u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right), y \right\rangle = \langle u(x), y \rangle.$$

L'application construite satisfait donc l'identité. Son existence et sa linéarité sont établies ; l'unicité résulte de 1) b). Tout endomorphisme de E possède ainsi un unique adjoint.

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux

3) Un endomorphisme symétrique f vérifie $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Par unicité de l'adjoint, $f^* = f$. On a alors $f \circ f^* = f^2 = f^* \circ f$, donc f est normal.

4) a) L'identité de l'adjoint donne :

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle.$$

La normalité permet de remplacer $u^* \circ u$ par $u \circ u^*$. Ainsi :

$$\|u(x)\|^2 = \langle x, u(u^*(x)) \rangle = \langle u(u^*(x)), x \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2.$$

Les normes sont positives ou nulles. En prenant leurs racines carrées, on obtient $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout $x \in E$.

4) b) Un vecteur est nul si et seulement si sa norme est nulle. Donc, pour tout $x \in E$:

$$x \in \text{Ker } u \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff x \in \text{Ker } u^*.$$

On conclut que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$.

5) Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, la stabilité donne $u(x) \in F$. Par conséquent :

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = 0.$$

Cela signifie que $u^*(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de F , donc appartient à $F^\perp$. Ainsi $F^\perp$ est stable par u^* . Cette propriété n'utilise pas la normalité.

6) a) Si $x \in E_\lambda$, $u(x) = \lambda x$. En utilisant la normalité et la linéarité de u^* :

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x).$$

Donc $u^*(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = E_\lambda$, même si $u^*(x) = 0$. Le sous-espace E_λ est stable par u^* .

6) b) Pour tous $x, y \in E$, la symétrie du produit scalaire et la définition de u^* donnent :

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle = \langle u(y), x \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Ainsi u satisfait l'identité définissant l'adjoint de u^* . Par unicité, $(u^*)^* = u$.

La question 5), valable pour tout endomorphisme, s'applique à u^* et au sous-espace E_λ , stable par u^* d'après 6) a). Elle montre que $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

Problème

Partie 1

- 1) Comme X prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $\{X = k\}$, pour $1 \leq k \leq n$, forment un système complet. Ainsi

$$G(1) = \sum_{k=1}^n P(X = k) = 1.$$

- 2) La variable X est bornée, donc possède une espérance. La fonction G est un polynôme, somme finie, que l'on dérive terme à terme :

$$G'(t) = \sum_{k=1}^n kP(X = k)t^{k-1}.$$

En évaluant en 1, on obtient

$$G'(1) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = E(X).$$

- 3) La variable X étant bornée, X^2 possède une espérance et X une variance. Pour $n \geq 2$,

$$G''(1) = \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X = k) = E(X(X-1)).$$

Pour $n = 1$, ces deux expressions sont nulles et l'égalité reste vraie.

Donc $E(X^2) = G''(1) + G'(1)$. La formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Partie 2

4) a) Méthode 1 — Encadrement d'une intégrale.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in [k, k+1]$, $1/(k+1) \leq 1/t \leq 1/k$. En intégrant sur ce segment de longueur 1 :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Méthode 2 — Égalité des accroissements finis.

La fonction $\ln$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. Il existe donc $\xi_k \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln k = 1/\xi_k$. Comme $k < \xi_k < k+1$, l'encadrement demandé en résulte, avec même des inégalités strictes.

La première méthode est une comparaison somme-intégrale ; la seconde est utile pour contrôler directement une différence de valeurs d'une fonction.

4) b) Sommons 4) a) pour k allant de 1 à $n-1$, avec $n \geq 2$. Les logarithmes se télescopent, d'où :

$$u_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n}.$$

L'inégalité de gauche donne $u_n \leq \ln n + 1$; celle de droite donne $u_n \geq \ln n + 1/n$. Ainsi $\ln n + 1/n \leq u_n \leq \ln n + 1$.

4) c) Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc on peut diviser l'encadrement précédent par $\ln n$:

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement, $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln n$.

5) Méthode 1 — Série de Riemann.

La série

$$\sum_{k \geq 1} 1/k^2$$

est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc converge. Ses sommes partielles h_n forment une suite convergente. La valeur de sa limite n'est pas nécessaire.

Méthode 2 — Suite croissante et majorée.

On a $h_{n+1} - h_n = 1/(n+1)^2 > 0$. Pour $k \geq 2$, $1/k^2 \leq 1/(k(k-1)) = 1/(k-1) - 1/k$. Ainsi, pour $n \geq 2$:

$$h_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

La borne vaut aussi pour $n = 1$, puisque $h_1 = 1$. La suite est croissante et majorée, donc converge par le théorème de la limite monotone. Cette preuve fournit en plus une borne explicite sans connaître la somme de la série.

Partie 3

6) Code adapté en Python. Il faut sauvegarder l'ancienne valeur de $A[j]$ avant de l'écraser. Le script complet est :

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
A = np.arange(1, n + 1)
```

```

p = n
for k in range(n):
    j = np.random.randint(0, p)
    aux = A[j]
    A[j] = A[p - 1]
    A[p - 1] = aux
    p = p - 1
print(A)

```

La variable p est le nombre de cases encore disponibles. Les indices possibles pour j sont $0, \dots, p - 1$, car la borne supérieure de `randint` est exclue. L'échange place une des valeurs disponibles dans la dernière case disponible. La variable `aux` conserve la valeur déplacée.

Avant les n passages, p vaut successivement $n, n - 1, \dots, 1$; aucun appel n'est effectué avec $p = 0$. Au dernier passage, `randint(0, 1)` renvoie 0, et l'échange est sans effet. Le script fonctionne aussi pour $n = 1$.

Ce code a été exécuté pour plusieurs valeurs de n ; le résultat reste toujours une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. L'équiprobabilité est admise par la question suivante et n'est pas déduite des essais.

7) a) Code adapté en Python. Après l'initialisation, m contient le maximum du préfixe réduit à $A[0]$. Supposons qu'avant de traiter l'indice k , m soit le maximum de $A[0], \dots, A[k-1]$.

Si $A[k] > m$, l'affectation met m à la valeur du nouveau maximum; sinon le maximum reste inchangé. Après ce passage, m est donc le maximum de $A[0], \dots, A[k]$.

Par récurrence, à la fin de la boucle m est le maximum de tout le tableau. Ce tableau contient exactement les entiers de 1 à n , donc m vaut n . Pour $n = 1$, la boucle est vide et l'initialisation donne directement le même résultat.

7) b) La variable c est initialisée à 1, position du premier élément. À chaque nouveau maximum, on lui affecte la position $k + 1$ de ce maximum. Les valeurs du tableau sont distinctes, donc le maximum de chaque préfixe occupe une unique position.

À la fin, c contient la position du nombre n dans la permutation, numérotée entre 1 et n .
Si n est dans la case d'indice Python r , c vaut $r + 1$.

Code complet pour effectuer le mélange puis cette recherche, exécuté :

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez une valeur pour n : "))
A = np.arange(1, n + 1)
p = n
for k in range(n):
    j = np.random.randint(0, p)
    aux = A[j]
    A[j] = A[p - 1]
    A[p - 1] = aux
    p = p - 1

m = A[0]
c = 1
for k in range(1, n):
    if A[k] > m:
        m = A[k]
        c = k + 1
print(c)
```

- 7) c) Code adapté en Python. Le test à compléter est $A == n$. Il y a exactement une case satisfaisant ce test; `np.where(A == n)[0][0]` fournit son indice, puis on ajoute 1 pour retrouver la position de 7) b).

Le bloc de réponse, à exécuter après la création de A , est :

Python

```
import numpy as np
```

```
c = np.where(A == n)[0][0] + 1
print(c)
```

Ce bloc a été exécuté à la suite du mélange et donne la même position que la boucle de 7). Pour une vérification autonome sur un exemple fixé :

Python

```
import numpy as np

A = np.array([2, 4, 1, 3])
n = 4
c = np.where(A == n)[0][0] + 1
print(c)
```

Le code exécuté affiche 2, puisque 4 est le deuxième élément du tableau.

- 8) Si $n = 1$, le tableau contient uniquement 1. La variable c subit sa seule affectation d'initialisation. Ainsi $X_1 = 1$ sûrement : $P(X_1 = 1) = 1$. En particulier $G_1(t) = t$, $E_1 = 1$ et $V_1 = 0$.
- 9) a) La variable X_n compte les records successifs de la permutation lue de gauche à droite : le premier élément est compté, puis chaque élément strictement supérieur à tous ses prédécesseurs ajoute une affectation.

Il y a au moins une affectation et au plus n , donc X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Réciproquement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, considérons la permutation $(1, 2, \dots, j-1, n, j, j+1, \dots, n-1)$, avec les listes vides omises. Les $j-1$ premiers éléments sont des records, puis n est le j -ième et dernier record. Pour $j = 1$, cette permutation commence par n ; pour $j = n$, elle est croissante.

Chaque permutation a la probabilité strictement positive $1/n!$. Chaque valeur j est donc atteinte : $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 9) b) L'événement $X_n = 1$ se produit exactement lorsque le premier élément vaut n . En effet, dans ce cas aucun élément suivant n'est un record ; réciproquement, si le

premier élément est inférieur à n , l'apparition de n crée un nouveau record. Il existe $(n-1)!$ permutations commençant par n , donc $P(X_n = 1) = 1/n$.

L'événement $X_n = n$ signifie que chaque élément est un nouveau record, donc que la permutation est strictement croissante. La seule possibilité est $(1, 2, \dots, n)$, d'où $P(X_n = n) = 1/n!$.

Pour $n = 2$, les deux valeurs possibles ont chacune la probabilité $1/2$.

j	1	2
$P(X_2 = j)$	$1/2$	$1/2$

Pour $n = 3$, $P(X_3 = 1) = 1/3$ et $P(X_3 = 3) = 1/6$. La probabilité restante vaut $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.

j	1	2	3
$P(X_3 = j)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

Les formules des probabilités extrêmes valent aussi pour $n = 1$, où elles désignent le même événement certain.

9) c) Posons $B = \{A_n = n\}$. Par équiprobabilité des permutations, $P(B) = 1/n$ et $P(B^c) = (n-1)/n$. Pour $n \geq 2$, ces deux probabilités sont non nulles.

Conditionnellement à B , les $n-1$ premiers éléments forment une permutation uniforme de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$: chacune correspond à une unique permutation terminée par n . Leur nombre de records a donc la loi de X_{n-1} . Le dernier élément n est un record supplémentaire. Ainsi :

$$P(X_n = j \mid B) = P(X_{n-1} = j - 1).$$

Conditionnellement à $A_n = a$, avec $a < n$, le préfixe est une permutation uniforme de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a\}$. Remplaçons chaque valeur du préfixe par son rang dans cet ensemble, de 1 à $n-1$. Cette transformation est strictement croissante, donc conserve

toutes les comparaisons et le nombre de records. Elle met les $(n-1)!$ préfixes possibles en bijection avec les permutations de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, toutes équiprobables.

Le nombre de records du préfixe a donc la loi de X_{n-1} , quel que soit $a < n$. Le dernier élément a n'est pas un record, puisque n apparaît dans le préfixe. En regroupant les cas $a < n$, on obtient :

$$P(X_n = j \mid B^c) = P(X_{n-1} = j).$$

Il s'agit d'égalités de lois conditionnelles ; on ne suppose pas d'égalité entre variables définies pour deux tailles différentes.

La formule des probabilités totales sur (B, B^c) donne finalement, pour $2 \leq j \leq n$:

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j).$$

Les probabilités hors du support de X_{n-1} sont nulles, notamment $P(X_{n-1} = n) = 0$.

9) d) En utilisant la loi de X_3 et la récurrence, on obtient :

$$P(X_4 = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{3}{8} = \frac{11}{24},$$

$$P(X_4 = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \times 0 = \frac{1}{24}.$$

j	1	2	3	4
$P(X_4 = j)$	1/4	11/24	1/4	1/24

La somme vaut $(6 + 11 + 6 + 1)/24 = 1$, comme attendu.

10) a) Comme $X_{n-1} \geq 1$, $P(X_{n-1} = 0) = 0$. D'après 9) b), $P(X_{n-1} = 1) = 1/(n-1)$.

Pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n}P(X_{n-1} = 0) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = 1) = 0 + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} = P(X_n = 1).$$

La récurrence reste donc valable pour $j = 1$, y compris lorsque $n = 2$.

10) b) Les sommes sont finies : on peut appliquer la récurrence terme à terme et les réindexer sans problème de convergence. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X_{n-1} = j-1)t^j + \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n P(X_{n-1} = j)t^j.$$

Dans la première somme, posons $r = j-1$. Son terme d'indice $r = 0$ est nul, donc elle vaut

$$t \sum_{r=1}^{n-1} P(X_{n-1} = r)t^r = tG_{n-1}(t).$$

Dans la seconde somme, le terme d'indice $j = n$ est nul, donc elle vaut $G_{n-1}(t)$.

Ainsi $G_n(t) = \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t)$. L'égalité vaut aussi en $t = 0$: il n'a pas été nécessaire de diviser par t .

10) c) On procède par récurrence. Pour $n = 1$,

$$G_1(t) = t = \frac{1}{1!} \prod_{j=0}^0 (t+j).$$

Si la formule est vraie au rang $n - 1$, avec $n \geq 2$, la question 10) b) donne :

$$G_n(t) = \frac{t + n - 1}{n} \frac{1}{(n - 1)!} \prod_{j=0}^{n-2} (t + j) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t + j).$$

La formule est donc vraie pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

11) Les variables X_n sont bornées, donc leurs espérances et variances existent. D'après la partie 1, $G_n(1) = 1$ et $G'_n(1) = E_n$.

Méthode 1 — Dérivation de la récurrence, comme demandé.

En dérivant l'identité polynomiale (*), on obtient :

$$G'_n(t) = \frac{1}{n} G_{n-1}(t) + \frac{t + n - 1}{n} G'_{n-1}(t).$$

En évaluant en 1, $E_n = 1/n + E_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Avec $E_1 = 1$, la sommation donne :

$$E_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = u_n.$$

Méthode 2 — Probabilité d'un record à une position donnée.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons I_k l'indicatrice de l'événement « l'élément de position k est le maximum des k premiers éléments ». Alors

$$X_n = \sum_{k=1}^n I_k.$$

Pour n'importe quel ensemble fixé de k valeurs constituant le préfixe, ses $k!$ ordres sont équiprobables : chaque ordre a $(n - k)!$ prolongements. Parmi eux, $(k - 1)!$ placent le maximum en dernière position. La probabilité conditionnelle d'un record à la position k vaut donc $1/k$, indépendamment de l'ensemble choisi. Ainsi $P(I_k = 1) = 1/k$.

Par linéarité de l'espérance d'une somme finie, sans aucune hypothèse d'indépendance entre les indicatrices :

$$E_n = \sum_{k=1}^n E(I_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n.$$

La première méthode répond à la consigne et se réutilise pour la variance. La seconde relie directement l'espérance à la fréquence des records.

12) a) En dérivant une deuxième fois (*), on obtient :

$$G_n''(t) = \frac{2}{n} G_{n-1}'(t) + \frac{t + n - 1}{n} G_{n-1}''(t).$$

Posons $D_n = G_n''(1)$. L'évaluation en 1 donne $D_n = D_{n-1} + \frac{2}{n} E_{n-1}$. Par la partie 1, $V_n = D_n + E_n - E_n^2$.

Écrivons $e = E_{n-1}$ et utilisons $E_n = e + 1/n$. Alors :

$$V_n - V_{n-1} = (D_n - D_{n-1}) + (E_n - E_{n-1}) - (E_n^2 - E_{n-1}^2),$$

$$V_n - V_{n-1} = \frac{2e}{n} + \frac{1}{n} - \left(\left(e + \frac{1}{n} \right)^2 - e^2 \right) = \frac{2e}{n} + \frac{1}{n} - \frac{2e}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$.

12) b) Méthode 1 — Sommation de la récurrence.

Avec $V_1 = 0$, la question précédente donne, pour $n \geq 2$:

$$V_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) = (u_n - 1) - (h_n - 1) = u_n - h_n.$$

Pour $n = 1$, $u_1 - h_1 = 1 - 1 = 0 = V_1$, donc $V_n = u_n - h_n$ pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Dérivées du logarithme de la fonction génératrice.

Pour $t > 0$, la formule de 10) c) montre que $G_n(t) > 0$. La fonction $\ell_n(t) = \ln G_n(t)$ est donc deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\ell_n(t) = -\ln(n!) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln(t+j),$$

$$\ell'_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{t+j}, \quad \ell''_n(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(t+j)^2}.$$

En $t = 1$, on a $\ell'_n(1) = u_n$ et $\ell''_n(1) = -h_n$. Par ailleurs, la dérivation du logarithme donne :

$$\ell''_n(1) = \frac{G''_n(1)}{G_n(1)} - \left(\frac{G'_n(1)}{G_n(1)} \right)^2 = G''_n(1) - E_n^2,$$

puisque $G_n(1) = 1$. Ainsi $V_n = \ell''_n(1) + E_n^2 = -h_n + u_n^2$.

La première méthode utilise les incréments de variance ; la seconde transforme le produit de la fonction génératrice en une somme et évite de développer ses coefficients.

- 12)** c) La question 5) montre que (h_n) est convergente, donc bornée. Ainsi $h_n / \ln n \rightarrow 0$.
La question 4) c) donne $u_n / \ln n \rightarrow 1$.

Pour $n \geq 2$, on utilise l'égalité exacte $V_n = u_n - h_n$, puis on divise par $\ln n > 0$:

$$\frac{V_n}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln n} - \frac{h_n}{\ln n} \longrightarrow 1.$$

Par conséquent $V_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln n$. La soustraction est justifiée par ces limites de rapports, et ne repose pas sur une soustraction automatique d'équivalents.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 1) c) : code adapté en Python avec `np.array`, `np.eye`, `np.linalg.matrix_rank` et `print`, conformément au référentiel informatique. Les matrices et les rangs affichés sont conservés.
- Exercice 1, question 3) a) : rectification de $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, car les matrices du produit sont d'ordre n .
- Problème, question 6) : code adapté en Python. Les cases sont indexées à partir de 0, le tirage est `np.random.randint(0, p)` et la dernière case disponible est `A[p-1]`. Les trois blancs sont conservés dans le sujet et complétés dans le corrigé ; le comportement du mélange est préservé.
- Problème, question 7), script initial et question c) : code adapté en Python. La position affichée reste numérotée à partir de 1 grâce à `k + 1` et à `np.where(...)[0][0] + 1`. La syntaxe et le rôle de `np.where` sont explicités dans le sujet. La correspondance entre les cases Python et les variables $A_1, \dots, A_n$ est précisée.