



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Tous les indices n sont des entiers strictement positifs.

- 1) Pour $n \geq 1$, la fonction $f_n(x) = 1 - x - x^n$ est continue sur $[0, +\infty[$, en tant que fonction polynomiale. On a $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = -1 < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une solution dans $]0, 1[$.

Sur $[0, +\infty[$, sa dérivée vaut $f'_n(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$; pour $n = 1$, on a simplement $f'_1(x) = -2$. La fonction est donc strictement décroissante et ne peut avoir deux zéros distincts.

L'équation possède une unique solution u_n , qui vérifie :

$$u_n + u_n^n = 1.$$

- 2) a) L'existence dans $]0, 1[$, établie à la question 1), et l'unicité donnent directement $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$.

- 2) b) Puisque $0 < u_n < 1$, on a $u_n^{n+1} < u_n^n$. En utilisant $1 - u_n = u_n^n$:

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n) > 0.$$

Or f_{n+1} est strictement décroissante et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. L'inégalité

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}) \text{ impose } u_n < u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- 2) c) La suite est croissante et majorée par 1. Le théorème de convergence des suites monotones montre qu'elle converge vers un réel ℓ . Comme $0 < u_n < 1$ pour tout n , le passage à la limite dans ces encadrements donne $\ell \in [0, 1]$.

On peut préciser que $u_1 = 1/2$, donc $\ell \in [1/2, 1]$.

- 2) d) On raisonne par l'absurde comme demandé. Supposons $\ell < 1$. La suite étant croissante de limite ℓ , on a $u_n \leq \ell$ pour tout n . Ainsi :

$$0 < u_n^n \leq \ell^n.$$

Comme $0 \leq \ell < 1$, la suite géométrique (ℓ^n) tend vers 0. Par encadrement, $u_n^n \rightarrow 0$. Dans l'identité $u_n + u_n^n = 1$, le passage à la limite donne alors $\ell = 1$, en contradiction avec $\ell < 1$.

La limite de (u_n) est donc 1. Le raisonnement ne repose pas sur un passage injustifié à la limite dans une puissance dont l'exposant dépend de n : cette puissance a été contrôlée par une suite géométrique fixe.

3) a) Par 2) a), $v_n = 1 - u_n$ vérifie $0 < v_n < 1$. Par 2) d), $v_n \rightarrow 0$. L'identité définissant u_n devient :

$$v_n = u_n^n = (1 - v_n)^n.$$

Les deux membres sont strictement positifs ; on peut donc prendre leur logarithme :

$$\ln v_n = n \ln(1 - v_n).$$

Méthode 1 — Utiliser un équivalent usuel du logarithme.

Le développement limité au voisinage de 0 donne $\ln(1 - x) = -x + o(x)$. Appliqué à la suite $v_n \rightarrow 0$, il implique :

$$\frac{\ln v_n}{-nv_n} = \frac{\ln(1 - v_n)}{-v_n} \rightarrow 1.$$

Ainsi $\ln v_n \sim -nv_n$.

Méthode 2 — Utiliser un encadrement intégral.

Pour tout $v \in]0, 1[$, le théorème fondamental du calcul intégral donne :

$$-\ln(1 - v) = \int_0^v \frac{1}{1 - s} ds.$$

Sur $[0, v]$, l'intégrande vérifie $1 \leq 1/(1 - s) \leq 1/(1 - v)$. En intégrant :

$$v \leq -\ln(1-v) \leq \frac{v}{1-v}.$$

Avec $v = v_n$ et $-\ln v_n = -n \ln(1 - v_n)$, on obtient :

$$1 \leq \frac{-\ln v_n}{nv_n} \leq \frac{1}{1-v_n}.$$

Le membre de droite tend vers 1 ; l'encadrement donne le même équivalent. La première méthode est rapide lorsque les équivalents usuels sont reconnus ; la seconde fournit une majoration explicite valable pour chaque n .

3) b) Posons $w_n = -\ln v_n$. Comme $0 < v_n < 1$ et $v_n \rightarrow 0$, on a $w_n > 0$ et $w_n \rightarrow +\infty$. La question 3) a) donne :

$$\frac{w_n}{nv_n} \rightarrow 1.$$

Par continuité du logarithme en 1, $\ln(w_n/(nv_n)) \rightarrow 0$. Le dénominateur w_n tendant vers $+\infty$, on en déduit :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{-\ln v_n} = \frac{\ln\left(\frac{w_n}{nv_n}\right)}{w_n} \rightarrow 0.$$

Pour exploiter cette limite, on développe exactement le logarithme, sans effectuer d'opération sur une somme d'équivalents :

$$\ln\left(\frac{w_n}{nv_n}\right) = \ln w_n - \ln n - \ln v_n = \ln w_n - \ln n + w_n.$$

En divisant par w_n :

$$\frac{\ln\left(\frac{w_n}{nv_n}\right)}{w_n} = \frac{\ln w_n}{w_n} - \frac{\ln n}{w_n} + 1.$$

Les croissances comparées donnent $\ln w_n/w_n \rightarrow 0$. Le membre de gauche tend lui aussi vers 0 ; l'égalité précédente impose donc $\ln n/w_n \rightarrow 1$.

Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, et l'on peut inverser ce quotient pour obtenir $w_n / \ln n \rightarrow 1$. Ainsi $\ln v_n = -w_n \sim -\ln n$.

3) c) Les questions 3) a) et 3) b) donnent respectivement :

$$\frac{nv_n}{w_n} \rightarrow 1, \quad \frac{w_n}{\ln n} \rightarrow 1.$$

En multipliant ces quotients, pour $n \geq 2$:

$$\frac{nv_n}{\ln n} = \frac{nv_n}{w_n} \frac{w_n}{\ln n} \rightarrow 1.$$

On conclut que $v_n \sim \frac{\ln n}{n}$.

4) Les deux séries sont à termes positifs. Pour la première, l'équivalent de 3) c) donne, à partir d'un certain rang :

$$v_n \geq \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n}.$$

Pour n assez grand, $\ln n \geq 2$, donc $v_n \geq 1/n$. La série harmonique diverge ; par comparaison, la série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

diverge vers $+\infty$.

Pour la seconde, la compatibilité des équivalents avec les puissances donne :

$$v_n^2 \sim \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

Par croissances comparées, $(\ln n)^2 / \sqrt{n} \rightarrow 0$. Par conséquent :

$$\frac{v_n^2}{n^{-3/2}} = \frac{v_n^2}{(\ln n)^2 / n^2} \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

À partir d'un certain rang, $0 \leq v_n^2 \leq n^{-3/2}$. La série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$

converge, donc

$$\sum_{n \geq 1} v_n^2$$

converge.

Exercice 2

1) On utilise l'hypothèse avec $y = x$:

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire réel, $\langle x, f(x) \rangle = \langle f(x), x \rangle$. Ainsi $2\langle f(x), x \rangle = 0$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), x \rangle = 0.$$

2) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : l'endomorphisme f considéré possède au moins une valeur propre réelle. Cette admission est limitée à l'endomorphisme étudié et sert à garantir l'existence d'une valeur propre, puis d'un vecteur non nul du noyau.

Soit μ une valeur propre de f et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. La question 1) donne :

$$0 = \langle f(x), x \rangle = \langle \mu x, x \rangle = \mu \|x\|^2.$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x\|^2 > 0$, donc $\mu = 0$. Toute valeur propre réelle est donc nulle. Puisqu'il en existe au moins une par le résultat admis, 0 est effectivement une valeur propre, et c'est la seule : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

En particulier $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

3) Méthode 1 — Montrer l'orthogonalité puis utiliser les dimensions.

Soient $u \in \text{Ker}(f)$ et $v \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(x)$. L'hypothèse donne :

$$\langle v, u \rangle = \langle f(x), u \rangle = -\langle x, f(u) \rangle = 0.$$

Le noyau et l'image sont donc orthogonaux. Leur intersection est réduite à $\{0\}$: si z appartient aux deux, il est orthogonal à lui-même, donc $\|z\|^2 = 0$ et $z = 0$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 3$. Leur somme directe est donc tout $\mathbb{R}^3$. Ce sont des supplémentaires orthogonaux, et :

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp.$$

Méthode 2 — Identifier directement l'orthogonal de l'image.

Pour $y \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$y \in \text{Im}(f)^\perp \iff \forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x), y \rangle = 0,$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^3, \langle x, f(y) \rangle = 0 \iff f(y) = 0.$$

Pour la dernière implication, on prend $x = f(y)$ et on utilise la positivité définie du produit scalaire. Ainsi $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f)$.

Dans un espace euclidien, tout sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires ; on obtient directement la conclusion. La première méthode met en œuvre le théorème du rang ; la seconde utilise la caractérisation par orthogonalité d'un vecteur à tous les éléments d'un sous-espace.

- 4) Si $\dim \text{Ker}(f) = 3$, alors $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme nul. Sa matrice est donc nulle dans toute base, en particulier dans une base orthonormale.

La forme demandée est obtenue avec $\alpha = 0$.

- 5) a) On raisonne sous l'hypothèse $\dim \text{Ker}(f) = 2$. Le théorème du rang donne $\dim \text{Im}(f) = 1$. Choisissons un vecteur non nul v de l'image et posons $e_1 = v/\|v\|$. C'est un vecteur unitaire qui engendre l'image.

Le noyau, sous-espace euclidien de dimension 2, possède une base orthonormale

(e_2, e_3) . La question 3) assure que e_1 est orthogonal à e_2 et e_3 . La famille (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormale ; elle comporte trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base.

- 5) b) Comme $e_2, e_3 \in \text{Ker}(f)$, les deux dernières colonnes de la matrice de f dans B sont nulles. Écrivons $f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$. Alors :

$$[f]_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes contiennent les coordonnées des images des vecteurs de la base.

- 5) c) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par lui-même : si $v = f(x)$ appartient à l'image, alors $f(v) = f(f(x))$ est encore l'image d'un vecteur, donc appartient à $\text{Im}(f)$.

Ici $e_1 \in \text{Im}(f)$, donc $f(e_1) \in \text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1)$. Dans l'écriture $f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$, l'unicité des coordonnées dans la base B impose $b = c = 0$.

- 5) d) La question 1) donne $\langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$. Comme $f(e_1) = ae_1$ et $\|e_1\| = 1$, ce produit scalaire vaut a . Ainsi $a = 0$.

Les trois images $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sont donc nulles. Puisque B est une base, $f = 0$, et le noyau est de dimension 3. Cela contredit l'hypothèse de dimension 2.

Le cas $\dim \text{Ker}(f) = 2$ est impossible.

- 6) a) Si le noyau est de dimension 1, l'image est de dimension 2 par le théorème du rang. Choisissons une base orthonormale (e_1, e_2) de l'image, ce qui est possible dans tout sous-espace euclidien de dimension finie.

Choisissons un vecteur non nul v du noyau et posons $e_3 = v/\|v\|$. Par 3), e_3 est orthogonal à l'image. La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant les conditions demandées.

- 6) b) L'image est stable par f , comme établi en 5) c). Ainsi $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à $\text{Vect}(e_1, e_2)$; leurs coordonnées selon e_3 sont nulles. De plus $f(e_3) = 0$ car e_3 appartient au noyau.

En écrivant $f(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $f(e_2) = be_1 + de_2$, on obtient :

$$[f]_B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6) c) La base étant orthonormale, $a = \langle f(e_1), e_1 \rangle$ et $d = \langle f(e_2), e_2 \rangle$. La question 1) donne donc $a = d = 0$.

L'hypothèse initiale, utilisée avec $(x, y) = (e_1, e_2)$, donne :

$$c = \langle f(e_1), e_2 \rangle = -\langle e_1, f(e_2) \rangle = -b.$$

La matrice a donc la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6) d) La question 2) garantit que la dimension du noyau est au moins 1; elle est au plus 3. Le cas de dimension 2 est exclu par 5) d).

Si cette dimension vaut 3, on a obtenu la forme demandée avec $\alpha = 0$. Si elle vaut 1, les questions 6) a) à 6) c) donnent la forme demandée avec $\alpha = b$. Dans ce dernier cas $b \neq 0$, car sinon f serait nul et le noyau serait de dimension 3.

Dans tous les cas, il existe donc une base orthonormale dans laquelle la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec α réel. L'endomorphisme nul correspond à $\alpha = 0$, et les autres cas à $\alpha \neq 0$.

Exercice 3

La variable X suit une loi exponentielle de taux $1/2$. Elle est presque sûrement positive et sa fonction de répartition est $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_X(x) = 1 - e^{-x/2}$ pour $x \geq 0$.

1) Code adapté en Python.

Dans NumPy, `scale` est l'inverse du taux de la loi exponentielle. Ici le taux vaut $1/2$, donc `scale=2`. On simule X , puis on prend sa racine carrée.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

X = rd.exponential(scale=2)
Y = np.sqrt(X)
```

La variable Python `Y` contient une réalisation de la variable demandée. Le code a été exécuté. La commande utilise le paramètre d'échelle 2, et non le taux $1/2$ comme paramètre d'échelle.

2) a) Comme $Y = \sqrt{X} \geq 0$ presque sûrement, $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y \geq 0$, la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, donc :

$$P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = 1 - e^{-y^2/2}.$$

Ainsi :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 - e^{-y^2/2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

En particulier $F_Y(0) = 0$, et Y ne possède pas de masse en 0.

- 2) b) La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur les deux intervalles ouverts séparés par 0. Pour $y > 0$, sa dérivée est $ye^{-y^2/2}$; pour $y < 0$, elle est nulle.

On peut donc choisir comme densité :

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y^2/2} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

La normalisation se vérifie aussi directement : pour $T > 0$,

$$\int_0^T ye^{-y^2/2} dy = 1 - e^{-T^2/2}, \text{ dont la limite vaut } 1.$$

- 3) a) Une variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ possède une espérance nulle et une variance égale à 1.

Par Koenig-Huygens :

$$E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 1.$$

En particulier, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \varphi(z) dz$ converge et vaut 1, où $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ est la densité normale centrée réduite.

- 3) b) Méthode 1 — Utiliser le moment normal demandé en 3) a).

La variable Y est positive. Pour prouver l'existence de son espérance, on étudie l'intégrale positive :

$$\int_0^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} y^2 \varphi(y) dy.$$

La fonction $y \mapsto y^2 \varphi(y)$ est paire. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est finie et vaut $E(Z^2) = 1$. Son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut donc 1/2.

L'intégrale de $y f_Y(y)$ est ainsi finie : Y possède une espérance et :

$$E(Y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Méthode 2 — Intégrer par parties sur un segment.

Pour $T > 0$, on prend $u(y) = y$ et $v'(y) = ye^{-y^2/2}$, dont une primitive est $v(y) = -e^{-y^2/2}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[0, T]$, et :

$$\int_0^T y^2 e^{-y^2/2} dy = -Te^{-T^2/2} + \int_0^T e^{-y^2/2} dy.$$

Les croissances comparées donnent $Te^{-T^2/2} \rightarrow 0$. La normalisation et la parité de la densité normale donnent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Le membre de droite admet une limite finie. L'intégrale de gauche converge donc, ce qui prouve de nouveau l'existence de l'espérance et sa valeur $\sqrt{\pi/2}$.

La première méthode relie l'intégrale à un moment connu ; la seconde la ramène à l'intégrale normalisante de la loi normale par intégration par parties.

4) a) Question adaptée au programme actuel.

Une loi ne détermine pas l'ensemble exact des valeurs prises sur un univers particulier. On établit donc l'encadrement presque sûr nécessaire pour les questions suivantes.

Comme $X \geq 0$ presque sûrement, on a $0 < e^{-X/2} \leq 1$ presque sûrement. En soustrayant ces inégalités à 1 :

$$0 \leq U = 1 - e^{-X/2} < 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

On peut choisir une version de X qui soit positive sur tout l'univers ; la transformation est alors définie partout. La loi obtenue ne dépend pas d'une éventuelle modification sur un événement négligeable.

4) b) Pour $u < 0$, $F_U(u) = 0$. Pour $u \geq 1$, $F_U(u) = 1$ par 4) a). Pour $u \in [0, 1[$, le nombre $1 - u$ est strictement positif et :

$$(U \leq u) = (1 - e^{-X/2} \leq u) = (e^{-X/2} \geq 1 - u),$$

$$= (X \leq -2 \ln(1 - u)).$$

Le seuil $-2 \ln(1 - u)$ est positif ou nul. On utilise donc la fonction de répartition exponentielle :

$$F_U(u) = 1 - \exp\left(-\frac{-2 \ln(1 - u)}{2}\right) = 1 - (1 - u) = u.$$

Ainsi :

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ u & \text{si } 0 \leq u < 1, \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Les valeurs aux extrémités n'ont pas de masse : on parle indifféremment, pour cette loi, d'une uniforme sur $[0, 1]$, $[0, 1[$ ou $]0, 1]$.

4) c) Code adapté en Python.

L'identité $1 - U = e^{-X/2} > 0$ permet de prendre le logarithme et donne :

$$X = -2 \ln(1 - U), \quad Y = \sqrt{-2 \ln(1 - U)}.$$

La commande `rd.random()` simule une uniforme sur $[0, 1[$. On applique la transformation précédente :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

U = rd.random()

X = -2 * np.log(1 - U)

Y = np.sqrt(X)
```

Le seul tirage aléatoire est celui de U . Puisque U est strictement inférieur à 1, l'argument $1 - U$ du logarithme est positif. Puisque U est positif ou nul, X est positif ou nul, donc la racine carrée est définie.

Pour vérifier que cette construction retrouve bien la loi de X , soit $x \geq 0$. La monotonie de la transformation donne :

$$P(-2 \ln(1 - U) \leq x) = P(U \leq 1 - e^{-x/2}) = 1 - e^{-x/2}.$$

Pour $x < 0$, cette probabilité est nulle. La variable simulée suit donc la bonne loi exponentielle, puis sa racine carrée la loi de Y . Le code a été exécuté ; la preuve de sa validité est le calcul de fonction de répartition.

Problème

On fixe $\lambda > 0$. Les temps t et u sont réels, positifs ou nuls, avec les restrictions précisées dans chaque question.

- 1) La convention initiale de l'énoncé adapté précise que l'on ne compte aucun appel à l'instant 0. L'intervalle $[0, 0]$ ne contient donc aucun appel compté, et $N_0 = 0$.

On obtient $p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1$ et $p_n(0) = P(N_0 = n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. La variable N_0 suit la loi certaine de valeur 0.

Cette condition initiale est indispensable : l'indépendance des nombres d'appels sur des intervalles disjoints ne détermine pas, à elle seule, le nombre d'appels à l'instant initial.

- 2) a) La fonction p_0 est dérivable d'après l'hypothèse admise. Par dérivation du produit :

$$f'_0(t) = \lambda e^{\lambda t} p_0(t) + e^{\lambda t} p'_0(t) = e^{\lambda t} (\lambda p_0(t) - \lambda p_0(t)) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Ainsi f_0 est constante sur $[0, +\infty[$, et cette constante vaut $f_0(0) = p_0(0) = 1$.

Donc $f_0(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

2) b) Pour $n \geq 1$, on dérive de même et on utilise la deuxième relation admise :

$$f'_n(t) = e^{\lambda t}(\lambda p_n(t) + p'_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) = \lambda f_{n-1}(t).$$

Cette identité vaut pour tout $t \geq 0$.

2) c) (i) On suppose $f_{n-1}(t) = (\lambda t)^{n-1}/(n-1)!$ pour tout $t \geq 0$. La question 2) b) donne :

$$f'_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Or la dérivée de $t \mapsto (\lambda t)^n/n!$ est précisément :

$$\frac{n\lambda^n t^{n-1}}{n!} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La différence entre ces deux fonctions a donc une dérivée nulle sur $[0, +\infty[$; elle est constante. Il existe un réel K tel que :

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + K \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

2) c) (ii) Comme $n \geq 1$, le terme $(\lambda t)^n/n!$ vaut 0 en $t = 0$. La question 1) donne aussi $f_n(0) = p_n(0) = 0$. L'égalité de 2) c) (i) impose donc $K = 0$.

Ainsi $f_n(t) = (\lambda t)^n/n!$ pour tout $t \geq 0$.

3) a) La question 2) a) donne $f_0(t) = 1$. Les questions 2) c) (i) et (ii) montrent que, si la formule $f_{n-1}(t) = (\lambda t)^{n-1}/(n-1)!$ est vraie à un rang $n-1$, elle l'est au rang n .

Par récurrence, $f_n(t) = (\lambda t)^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, avec la convention que l'expression pour $n = 0$ est la constante 1.

Puisque $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$ et que $e^{\lambda t} > 0$, on conclut :

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

À $t = 0$, on interprète cette formule comme $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$, sans avoir besoin d'attribuer une valeur générale à 0^0 .

3) b) Question adaptée au programme actuel pour le cas limite $t = 0$.

Pour $t > 0$, le paramètre λt est strictement positif et les probabilités de 3) a) sont exactement celles de la loi de Poisson de paramètre λt . Ainsi :

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \quad \text{pour } t > 0.$$

Pour $t = 0$, la variable est certaine de valeur 0 d'après 1). On peut aussi appeler cette loi la loi de Poisson de paramètre 0 si l'on adopte cette extension de convention ; la version adaptée traite explicitement ce cas limite.

4) a) Le premier appel survient après t exactement lorsqu'aucun appel n'a été reçu jusqu'au temps t . Donc, pour $t \geq 0$:

$$(S_1 > t) = (N_t = 0).$$

La question 3) a) donne $P(S_1 > t) = e^{-\lambda t}$. Comme les instants d'arrivée sont positifs, la fonction de répartition vaut 0 pour $t < 0$ et $1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Ainsi $S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Sa probabilité de dépasser t tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui confirme que le premier appel arrive presque sûrement en un temps fini.

4) b) Pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$, dire que le n -ième appel n'est pas encore survenu au temps t signifie qu'il y a eu au plus $n - 1$ appels jusqu'à cet instant. Ainsi :

$$(S_n > t) = (N_t \leq n - 1).$$

Le comptage comprend les appels arrivés exactement à t : c'est pourquoi le membre de gauche comporte une inégalité stricte et celui de droite une borne $n - 1$.

4) c) Notons G_n la fonction de répartition de S_n . Pour $t < 0$, $G_n(t) = 0$. Pour $t \geq 0$, les

questions 4) b) et 3) a) donnent :

$$G_n(t) = 1 - P(N_t \leq n-1) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, et $G_n(0) = 0$, donc elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.
Pour $t > 0$, il s'agit d'une somme finie de fonctions dérivables. Sa dérivation donne :

$$G'_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

La deuxième somme est nulle si $n = 1$. Sinon, en posant $j = k - 1$, elle est égale à

$$\sum_{j=0}^{n-2} (\lambda t)^j / j!.$$

Tous les termes se compensent sauf celui de degré $n - 1$. Ainsi :

$$G'_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

La fonction G_n est donc continue et de classe C^1 sauf éventuellement en 0. La variable S_n est à densité, et une densité est :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Ici la notation f_n désigne la densité demandée, et non la fonction auxiliaire $e^{\lambda t} p_n(t)$ introduite en 2).

Pour vérifier le comportement à l'infini, chacun des termes $e^{-\lambda t} t^k$ de la somme finie tend vers 0 par croissances comparées. Ainsi $G_n(t) \rightarrow 1$. La densité est donc normalisée et le

n -ième appel survient presque sûrement en un temps fini. On reconnaît également que λS_n suit la loi $\gamma(n)$ de taux 1.

- 5) a) La variable N_u compte les appels reçus dans $[0, u]$, tandis que $N_t - N_u$ compte ceux reçus dans $]u, t]$. Ces intervalles sont disjoints : un appel à l'instant u appartient seulement au premier.

L'hypothèse d'indépendance des nombres d'appels sur des intervalles disjoints assure donc, sans calcul, que N_u et $N_t - N_u$ sont indépendantes. Pour $u = 0$, N_u est en outre une variable certaine, ce qui est cohérent avec cette indépendance.

- 5) b) Posons $W = N_t - N_u$. Les deux variables N_u et W sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $N_t = N_u + W$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(N_t = n) = \bigcup_{i=0}^n ((N_u = i) \cap (W = n - i)).$$

Cette union est disjointe, car les valeurs de N_u sont distinctes. Par additivité finie et indépendance de 5) a) :

$$P(N_t = n) = \sum_{i=0}^n P(N_u = i, W = n - i) = \sum_{i=0}^n P(N_u = i)P(W = n - i).$$

On obtient exactement l'égalité demandée.

- 5) c) Pour $n = 0$, l'égalité de 5) b) se réduit à :

$$P(N_t = 0) = P(N_u = 0)P(W = 0).$$

Les lois obtenues en 3) a) donnent $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u}P(W = 0)$. Comme $e^{-\lambda u} > 0$, on peut diviser et obtenir :

$$P(W = 0) = e^{-\lambda(t-u)}.$$

Pour $n = 1$, la même égalité donne :

$$\lambda t e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u}P(W = 1) + \lambda u e^{-\lambda u}P(W = 0).$$

En remplaçant la probabilité précédente, le dernier terme vaut $\lambda u e^{-\lambda t}$. Ainsi :

$$e^{-\lambda u} P(W = 1) = \lambda(t - u)e^{-\lambda t},$$

et, en divisant par $e^{-\lambda u}$:

$$P(W = 1) = \lambda(t - u)e^{-\lambda(t-u)}.$$

Ces calculs restent valables pour $u = 0$.

5) d) Fixons $0 \leq u < t$ et posons $a_n = P(W = n)$, avec $W = N_t - N_u$. On prouve par récurrence forte sur n la formule :

$$a_n = e^{-\lambda(t-u)} \frac{[\lambda(t-u)]^n}{n!}.$$

L'initialisation au rang 0 est celle de 5) c). Supposons maintenant $n \geq 1$ et la formule vraie pour tous les indices $0, \dots, n-1$.

En isolant le terme $i = 0$ dans 5) b), on obtient :

$$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda u} a_n + \sum_{i=1}^n e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} a_{n-i}.$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, le rang $n-i$ est strictement inférieur à n , donc l'hypothèse de récurrence s'applique. Le produit des facteurs exponentiels devient $e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} = e^{-\lambda t}$.

Après multiplication par $e^{\lambda t}$:

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-u)} a_n + \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i}}{i!(n-i)!}.$$

La formule du binôme, avec $\lambda t = \lambda u + \lambda(t-u)$, donne :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i}}{i!(n-i)!}.$$

La différence entre cette somme et celle commençant à $i = 1$ est le terme $i = 0$, soit $[\lambda(t-u)]^n/n!$. On en déduit :

$$e^{\lambda(t-u)}a_n = \frac{[\lambda(t-u)]^n}{n!},$$

puis la formule au rang n . La récurrence est établie et :

$$N_t - N_u \sim \mathcal{P}(\lambda(t-u)).$$

La loi de l'incrément a été obtenue à partir des lois de N_t, N_u et de leur indépendance avec l'incrément; on n'a pas supposé à l'avance qu'elle ne dépendait que de la longueur de l'intervalle.

- 6) a) Si $N_t \geq 1$, l'indice N_t est le nombre total d'appels arrivés jusqu'au temps t . Le temps S_{N_t} est donc l'instant du dernier de ces appels.

Ainsi R_t représente l'instant du dernier appel reçu au plus tard à t , avec la convention $R_t = 0$ si aucun appel n'a été reçu. Dans tous les cas $0 \leq R_t \leq t$.

- 6) b) Fixons $t > 0$ et $u \in [0, t]$. Les événements $((N_t = n))_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système complet. Par la formule des probabilités totales sous forme d'intersections :

$$P(R_t > u) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((R_t > u) \cap (N_t = n)).$$

Sur $(N_t = 0)$, on a $R_t = 0 \leq u$, donc le terme d'indice 0 est nul. Sur $(N_t = n)$, avec $n \geq 1$, on a $R_t = S_n$. Par conséquent :

$$P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((S_n > u) \cap (N_t = n)).$$

La série de probabilités converge : ses événements sont disjoints et sa somme vaut une probabilité, donc est au plus 1.

- 6) c) La question 4) b), utilisée au temps u , donne $(S_n > u) = (N_u \leq n - 1)$. Pour $n \geq 1$, on décompose ce dernier événement selon les valeurs possibles $i = 0, \dots, n - 1$:

$$(S_n > u) \cap (N_t = n) = \bigcup_{i=0}^{n-1} ((N_u = i) \cap (N_t = n)).$$

L'union est disjointe. Sur $(N_u = i)$, la condition $N_t = n$ équivaut à $N_t - N_u = n - i$. Ainsi :

$$P((S_n > u) \cap (N_t = n)) = \sum_{i=0}^{n-1} P((N_u = i) \cap (N_t - N_u = n - i)).$$

En reportant dans 6) b), on obtient :

$$P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P((N_u = i) \cap (N_t - N_u = n - i)).$$

Les termes correspondent à des événements disjoints, et la somme reste bornée par 1.

- 6) d) Méthode 1 — Exploiter la somme de la question 6) c).

Fixons d'abord $0 \leq u < t$. Par indépendance de N_u et $W = N_t - N_u$, chaque terme de 6) c) vaut $P(N_u = i)P(W = n - i)$.

On rappelle qu'une série absolument convergente peut être regroupée ou réordonnée sans changer sa somme. Ici tous les termes sont positifs et la somme est une probabilité au plus égale à 1, comme établi en 6) c) : le regroupement est donc licite.

Le changement d'indices $j = n - i$ établit une correspondance entre les couples $n \geq 1$, $0 \leq i \leq n - 1$ et les couples $i \geq 0$, $j \geq 1$. On peut ainsi écrire :

$$P(R_t > u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P(N_u = i)P(W = j).$$

Pour chaque i , la somme intérieure est $P(N_u = i)P(W \geq 1)$. En sommant sur i :

$$P(R_t > u) = P(W \geq 1) \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_u = i) = P(W \geq 1).$$

La somme des probabilités de la loi de N_u vaut 1. Par 5) c), $P(W \geq 1) = 1 - e^{-\lambda(t-u)}$, donc :

$$F_t(u) = P(R_t \leq u) = e^{-\lambda(t-u)} \quad \text{pour } 0 \leq u < t.$$

À $u = t$, on a $R_t \leq t$ et donc $F_t(t) = 1 = e^0$. Pour $u < 0$, la variable est positive ou nulle, donc $F_t(u) = 0$. Pour $u > t$, elle est au plus égale à t , donc $F_t(u) = 1$.

On obtient la fonction demandée :

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0, \\ e^{-\lambda(t-u)} & \text{si } 0 \leq u \leq t, \\ 1 & \text{si } u > t. \end{cases}$$

Méthode 2 — Décrire directement l'événement complémentaire.

Pour $u \in [0, t]$, le dernier appel reçu avant t a lieu au plus tard à u si et seulement si aucun appel n'arrive dans $]u, t]$. Si aucun appel n'a eu lieu du tout, la convention $R_t = 0$ rend aussi cette équivalence vraie. Donc :

$$(R_t \leq u) = (N_t - N_u = 0).$$

Pour $u < t$, la question 5) c) donne immédiatement $F_t(u) = e^{-\lambda(t-u)}$. Pour $u = t$, l'incrément est nul avec certitude et la même formule vaut 1. Les valeurs hors de $[0, t]$ résultent à nouveau de l'encadrement $0 \leq R_t \leq t$.

La première méthode suit le chemin imposé par les questions précédentes et justifie les regroupements de probabilités ; la seconde donne une interprétation directe de la

fonction de répartition.

- 6) e) On suppose d'abord $t > 0$, comme dans les questions précédentes. La fonction de répartition a un saut à 0 :

$$P(R_t = 0) = F_t(0) - \lim_{u \rightarrow 0^-} F_t(u) = e^{-\lambda t} > 0.$$

Une variable à densité possède une fonction de répartition continue et aucune masse ponctuelle. La variable R_t n'est donc pas à densité.

Pour tout $r \in]0, t]$, la fonction F_t est continue en r , donc $P(R_t = r) = 0$. Il n'existe pas non plus de masse en dehors de $[0, t]$. Si la variable était discrète, ses valeurs seraient contenues, avec probabilité 1, dans un ensemble fini ou dénombrable.

Or toute réunion dénombrable de valeurs distinctes de 0 a une probabilité nulle, par additivité dénombrable. Même en ajoutant 0, la probabilité d'une telle réunion est au plus $e^{-\lambda t} < 1$. La variable R_t n'est donc pas discrète.

Elle possède une loi mixte : une masse $e^{-\lambda t}$ en 0 et une partie continue sur $]0, t[$ décrite par la dérivée $F'_t(u) = \lambda e^{-\lambda(t-u)}$. La masse de cette partie continue est :

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-u)} du = 1 - e^{-\lambda t}.$$

La somme des deux masses vaut 1. Cette dérivée ne constitue pas une densité de toute la variable, car son intégrale est strictement inférieure à 1.

Si $t = 0$, le cas est différent : $R_0 = 0$ avec certitude. La variable est alors discrète, de loi certaine, et n'est pas à densité.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 2) : l'admission générale concernant tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ est remplacée par l'admission particulière que l'endomorphisme f étudié possède une valeur propre réelle. Cette conséquence suffit à toutes les questions suivantes, sans introduire de théorie générale de réduction hors du référentiel.

- Exercice 3, question 1) : code adapté en Python, avec `rd.exponential(scale=2)` pour le taux $1/2$ et `np.sqrt` pour la transformation.
- Exercice 3, question 4) a) : remplacement de l'affirmation sur l'image exacte $U(\Omega)$ par l'encadrement presque sûr $0 \leq U < 1$. Une loi ne fixe pas l'image exacte d'une variable sur son univers ; la propriété presque sûre est suffisante pour le calcul de la loi et la simulation.
- Exercice 3, question 4) c) : code adapté en Python, avec `rd.random()` comme seul générateur aléatoire ; les commandes de calcul déterministes sont précisées.
- Problème, préambule et question 1) : précision de la convention initiale selon laquelle aucun appel n'est compté à l'instant 0, pour justifier rigoureusement $N_0 = 0$.
- Problème, question 3) b) : séparation explicite de $t > 0$, donnant une loi de Poisson de paramètre strictement positif, et de $t = 0$, donnant une loi certaine. Les formules et toutes les dépendances du problème sont conservées.