



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2016

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f , limites comprises.
- 1) b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
- 2) Les scripts suivants renvoient, pour le premier, la valeur 5, et pour le second, la valeur 6.

Python

```
from numpy import exp

u = 1.0
n = 0
while u > 0.00001:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

Python

```
from numpy import exp

u = 1.0
n = 0
while u < 100000:
    u = exp(-u) / u
    n = n + 1
print(n)
```

Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2.$$

3) b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une seule solution, que l'on notera α , sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4) a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

4) b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

5) On pose :
$$h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5) a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

5) b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue élément de $\mathbb{R}_+$.

5) c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

5) d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

- 1) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
 - 1) a) Déterminer $(f - \text{Id})^2 + f \circ (2 \text{Id} - f)$.
 - 1) b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2 \text{Id} - f))(x)$.
 - 1) c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- 2) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4 \text{Id}) = 0$.
 - 2) a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1$.
 - 2) b) En déduire que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- 3) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
 - 3) a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$, avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \dots + a_p X^p$.
 - 3) b) En déduire que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - 3) c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

Exercice 3

Les questions 1) et 2) sont indépendantes des suivantes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma > 0$).

On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1 = m$ et $\theta_2 = \sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de X , avec $n \geq 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X .

On appelle vraisemblance du couple (θ_1, θ_2) la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\theta_1, \theta_2}(x_i),$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des réels donnés. Pour les questions 1) et 2), on suppose que ces réels ne sont pas tous égaux.

1) Donner l'expression de $L(\theta_1, \theta_2)$, puis celle de $\ln(L(\theta_1, \theta_2))$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \dots, x_n$.

2) a) Justifier que la fonction $f : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln(L(\theta_1, \theta_2))$, définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, est de classe C^2 sur U .

2) b) Montrer que f admet un seul point critique $A = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ sur U tel que :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\theta}_1^2.$$

2) c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A .

On vérifiera en particulier que :

$$\partial_{2,2}^2 f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -\frac{n}{2\hat{\theta}_2^2}.$$

2) d) En déduire que f admet un maximum local en $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

2) e) Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

On pose dorénavant

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

et

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

3) Vérifier que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de m .

4) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2 .

5) On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2 .

5) a) Rappeler pourquoi la suite $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers m . Qu'en déduit-on pour la suite $(\bar{X}_n^2)$? Justifier.

5) b) Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$$

converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$.

5) c) Établir que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$[|Z_n - \sigma^2| \geq \varepsilon] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] \cup [|\bar{X}_n^2 - m^2| \geq \frac{\varepsilon}{2}].$$

5) d) Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2 .

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1) Pour chaque entier naturel n , on considère une matrice A_n de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est $a_{i,j}$.

On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A , c'est-à-dire que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}.$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n .

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n C = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On admet également que $\lim_{n \rightarrow +\infty} BA_n C = BAC$.

2) Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^4 a_{i,j}$$

est une constante c , alors c est valeur propre de A .

3) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé, est égale à la trace de A .

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules). Les deux choix, uniformes dans leurs urnes respectives, sont indépendants conditionnellement à la composition actuelle.

Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)$ -ième tirage, c'est-à-dire après le n -ième échange. On a donc $X_0 = 3$.

On considère le vecteur ligne $L_n = (P(X_n = 0) \ P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3))$.

4) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, déterminer la probabilité $p_{i,j}$ d'obtenir j boules blanches dans U après un échange effectué à partir de l'état i .

Ces probabilités coïncident avec $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ lorsque $P(X_n = i) > 0$. Les échanges sont effectués selon la même règle à chaque étape, avec de nouveaux choix aléatoires : la

composition suivante dépend de l'histoire passée seulement par la composition actuelle.

5) a) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i + 1)$ -ième ligne et de la $(j + 1)$ -ième colonne est égal à $p_{i,j}$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).

5) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n M$.

5) c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 M^n$.

6) a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M .

6) b) On considère les vecteurs lignes $E_1 = (9 \ -1 \ -1 \ 9)$ et $E_2 = (3 \ 1 \ -1 \ -3)$.

Montrer que ${}^t(E_1)$ et ${}^t(E_2)$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

6) c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des 1, et une matrice D diagonale telles que $M = QDQ^{-1}$.

8) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

9) Soit $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3 \ \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1} .

9) a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

9) b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \frac{1}{20}$.

10) Dédurre de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$.

11) On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.

On note B_k (respectivement N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (respectivement noire) au k -ième tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

11) a) Quelle est la loi de X ?

11) b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.

- 11) c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X .
- 12) La fonction Python `trajectoire(n, M, x0)` ci-dessous renvoie, dans un tableau, les n premiers états suivant l'état initial x_0 , numérotés de 0 à 3, pour les transitions définies par les lignes de M . À chaque étape, un nouveau tirage uniforme sur $[0, 1[$ choisit l'état suivant selon les probabilités cumulées de la ligne correspondant à l'état courant.

La commande `input` renvoie une chaîne et `int` la convertit en entier. On suppose que l'utilisateur saisit un entier $n \geq 1$. La comparaison `X == 0` produit un tableau de booléens; sa somme compte les états égaux à 0, les valeurs vraies comptant pour 1 et les fausses pour 0.

On considère le script suivant :

Python

```
import numpy as np

from numpy.random import random

def trajectoire(n, M, x0):
    X = np.zeros(n)
    x = x0
    for k in range(n):
        u = random()
        j = 0
        seuil = M[x, 0]
        while j < 3 and u >= seuil:
            j = j + 1
            seuil = seuil + M[x, j]
        x = j
        X[k] = x
    return X

n = int(input("Entrez la valeur de n : "))
M = np.array([[0, 1, 0, 0],
```

```
[1/9, 4/9, 4/9, 0],  
[0, 4/9, 4/9, 1/9],  
[0, 0, 1, 0]])  
  
X = trajectoire(n, M, 3)  
f = np.sum(X == 0) / n  
print(f)
```

De quelle valeur exacte le contenu de f est-il proche lorsque n est assez grand ?