



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0 , on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

2) b) En déduire la valeur de I_1 .

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

3) b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

4) b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4) c) En déduire un équivalent de I_n , puis donner la nature de la série de terme général I_n .

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

5) a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

5) b) Calculer J_0 .

6) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k .

6) b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$$

en fonction de J_n .

6) c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

6) d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7) À l'aide des questions 4) a) et 6) a), compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n , supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

Dans les codes de ce sujet, `input` (message) affiche le message et lit une saisie sous forme de chaîne; `int` et `float` convertissent cette saisie respectivement en entier et en réel. `print` affiche ses arguments. Les bornes supérieures de range sont exclues.

Python

```
import numpy as np

n = int(input('Entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 : '))
I = np.log(2)
J = 1 / 2
J = ...

for k in range(2, n + 1):
    I = ...
    J = ...

print('La valeur de I est :', I)
print('La valeur de J est :', J)
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X .

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y .

1) a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y .

1) b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

1) c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2) a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

2) b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3) a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité.

Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y .

- 3) b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
- 4) Écrire une commande Python permettant de simuler la variable aléatoire Z .

On suppose les bibliothèques importées par :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

- 5) On considère les commandes Python suivantes :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez la valeur de n, strictement positive : '))
w = rd.exponential(1, n)
s = np.sum(w * np.sqrt(w)) / n / np.sqrt(np.pi)
```

La commande `rd.exponential(1, n)` fournit un tableau de n simulations indépendantes d'une variable de loi exponentielle de taux 1 ; son premier argument est l'échelle, ici égale à 1.

- 5) a) En remarquant que $x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$ pour $x > 0$, montrer que s contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.
- 5) b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique de x et y .

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

- 1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, formée de vecteurs propres de f .
- 2) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.
- 2) b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
- 2) c) En déduire que l'application φ , de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
- 3) a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.
- 3) b) Établir que g est bijectif.
- 3) c) Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ .

Problème

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}$.

2) a) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$.

2) b) En déduire que la série

$$\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^n$$

est convergente.

3) Pour tout entier naturel r , on pose :

$$S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n.$$

3) a) Donner la valeur de S_0 .

3) b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

3) c) En déduire :

$$\forall x \in [0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

3) d) Donner enfin la valeur de

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}.$$

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0, 1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1 - p$.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante.

On note :

- X le nombre de manches auxquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X , Y et G sont des variables aléatoires, définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Donner la loi de X (on pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la k -ième manche »).

1) b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable T puis en déduire que l'on a :

$$E(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

1) c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n , la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = n)$.

2) b) En déduire, à l'aide de la partie 1, la loi de Y .

3) Calculer l'espérance de Y puis montrer que $V(Y) = \frac{p(1 - \alpha)(p + \alpha - p\alpha)}{\alpha^2}$.

4) a) Exprimer G en fonction de X et Y .

4) b) En déduire l'espérance de G .

4) c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \frac{p(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{\alpha^2}$.

4) d) En déduire la variance de G .

5) a) Compléter, en utilisant les commandes de `numpy.random`, le code Python suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche les valeurs prises par X et Y .

Python

```
import numpy.random as rd

alpha = float(input('Entrez la valeur de alpha, dans ]0, 1[ : '))
p = float(input('Entrez la valeur de p, dans ]0, 1[ : '))
X = ...
Y = ...
print(X)
```

```
print(Y)
```

- 5) b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour que la valeur prise par G soit calculée et affichée ?