



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2015

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

- 1) Fixons $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto 1/(x^n(x+1))$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Il n'y a donc aucune difficulté à la borne 1.

Pour $x \geq 1$, $x+1 \geq x$, donc

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{x^{n+1}}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} x^{-n-1} dx = 1/n$ converge puisque $n+1 > 1$. Par comparaison d'intégrales positives, I_n converge. De plus, $I_n > 0$, car l'intégrande est strictement positive.

- 2) a) En multipliant l'identité recherchée par $x(x+1) \neq 0$, on obtient

$$1 = a(x+1) - bx = (a-b)x + a.$$

L'identification des coefficients donne $a = 1$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 1$.

Réciproquement,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)},$$

ce qui vérifie l'identité pour tout $x \notin \{-1, 0\}$.

- 2) b) On utilise la décomposition sur un segment $[1, A]$, avec $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} = [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^A = \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln(2).$$

Puisque $A/(A+1) \rightarrow 1$, la continuité du logarithme donne

$$I_1 = \ln(2).$$

On n'a pas séparé l'intégrale impropre en deux intégrales divergentes : la soustraction a été faite avant le passage à la limite.

3) a) Pour $x \geq 1$, $x + 1 \geq 2$, donc

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}.$$

Pour $n \geq 2$, $\int_1^{+\infty} x^{-n} dx = 1/(n-1)$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

3) b) La borne supérieure tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le théorème d'encadrement donne donc l'existence de la limite et sa valeur : $I_n \rightarrow 0$.

4) a) Les deux intégrales convergent, donc leur somme est l'intégrale de la somme des intégrandes. Pour $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

En particulier, $I_{n+1} = 1/n - I_n$.

4) b) Pour $x \geq 1$, $x^{n+1} \geq x^n$. Ainsi

$$\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leq \frac{1}{x^n(x+1)}.$$

En intégrant, $I_{n+1} \leq I_n$. L'inégalité est même stricte : les intégrandes sont strictement ordonnées pour $x > 1$, donc $I_{n+1} < I_n$.

4) c) Méthode 1 — Encadrement avec les termes voisins.

La décroissance et 4) a) donnent, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n.$$

Pour $n \geq 2$, elles donnent également

$$2I_n \leq I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}.$$

Donc $1/(2n) \leq I_n \leq 1/(2(n-1))$. Après multiplication par $2n > 0$,

$$1 \leq 2nI_n \leq \frac{n}{n-1} \rightarrow 1.$$

Ainsi $I_n \sim 1/(2n)$.

Méthode 2 — Encadrement direct de l'intégrande.

Pour $x \geq 1$, on a $x + 1 \leq 2x$, donc $1/(x^n(x+1)) \geq 1/(2x^{n+1})$. Par intégration, $I_n \geq 1/(2n)$. Avec la borne supérieure de 3) a), on retrouve le même encadrement et donc le même équivalent.

La première méthode exploite la récurrence et la monotonie, comme le demande la progression du sujet; la seconde montre comment obtenir l'échelle asymptotique directement par comparaison des intégrandes.

Les termes I_n sont positifs et équivalents à la moitié du terme harmonique. La série

$$\sum_{n \geq 1} I_n$$

diverge donc vers $+\infty$ par comparaison par équivalence avec

$$\sum 1/n.$$

5) a) Pour $n \geq 0$, l'intégrande de J_n est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Comme

$$x + 1 \geq x,$$

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{x^{n+2}}.$$

L'exposant $n + 2$ est strictement supérieur à 1, même pour $n = 0$. L'intégrale de référence converge; ainsi J_n converge et est strictement positive.

5) b) Pour $A > 1$,

$$\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $J_0 = 1/2$.

6) a) Pour $k \geq 1$, les deux intégrales convergent et

$$\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} = \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} = \frac{1}{x^k(x+1)}.$$

Par linéarité, $J_k + J_{k-1} = I_k$, soit $J_k = I_k - J_{k-1}$.

6) b) En utilisant 6) a),

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (J_k + J_{k-1}).$$

La première somme de termes J_k porte sur les indices $1, \dots, n$; la seconde, après le changement d'indice $j = k - 1$, porte sur $0, \dots, n - 1$, avec coefficient $(-1)^j$. Pour chaque indice $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, les coefficients $(-1)^{j-1}$ et $(-1)^j$ s'annulent. Il reste donc

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = J_0 + (-1)^{n-1} J_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n.$$

Cette identité est aussi valable pour $n = 1$, où elle devient $I_1 = J_0 + J_1$.

6) c) Pour $x \geq 1$, $(x+1)^2 \geq 4$. Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{4x^n}.$$

L'intégration donne $0 \leq J_n \leq 1/(4(n-1))$. Par encadrement, $J_n \rightarrow 0$.

- 6) d) La question 6) b) exprime la somme partielle de la série demandée sous la forme $1/2 + (-1)^{n-1} J_n$. Comme $|(-1)^{n-1} J_n| = J_n \rightarrow 0$, les sommes partielles convergent vers $1/2$.

Donc la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{1}{2}.$$

Elle ne converge pas absolument, car

$$\sum |(-1)^{n-1} I_n| = \sum I_n$$

diverge par 4) c). La preuve de convergence repose ici sur l'identité des sommes partielles, sans invoquer de critère général des séries alternées.

7) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

L'initialisation donne $I = I_1 = \ln(2)$ et d'abord $J = J_0 = 1/2$. Avant la boucle, la relation de 6) a) donne $J_1 = I_1 - J_0$, donc on remplace J par $I - J$.

Au début de l'itération d'indice $k \geq 2$, les variables contiennent I_{k-1} et J_{k-1} . La relation de 4) a) donne $I_k = 1/(k-1) - I_{k-1}$; on actualise donc d'abord I. Ensuite, 6) a) donne $J_k = I_k - J_{k-1}$, ce qui actualise J à l'aide de la nouvelle valeur de I.

Le code complet est :

Python

```
import numpy as np

n = int(input('Entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 : '))

I = np.log(2)

J = 1 / 2

J = I - J

for k in range(2, n + 1):
```

```
I = 1 / (k - 1) - I
J = I - J
print('La valeur de I est :', I)
print('La valeur de J est :', J)
```

La boucle va de 2 à n inclus et les sorties correspondent à I_n et J_n . Le contrat de saisie est $n \geq 2$; il assure notamment que les divisions de la boucle sont définies.

Le code a été exécuté et comparé à une intégration numérique directe pour plusieurs rangs. La récurrence fournit le calcul mathématique exact en arithmétique exacte; avec des nombres flottants, les résultats sont soumis aux arrondis et les soustractions peuvent dégrader la précision aux grands rangs.

Exercice 2

On note $\phi(t) = (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}$ une densité de la loi normale centrée réduite. Elle est paire, donc $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

1) a) Pour $x \geq 0$,

$$F_Y(x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Le passage de l'intervalle fermé à la différence des fonctions de répartition est permis parce qu'une variable à densité ne possède pas de masse ponctuelle.

Pour $x < 0$, $Y \geq 0$ donne $F_Y(x) = 0$. La fonction F_Y est continue en 0, puisque $2\Phi(0) - 1 = 0$, et elle est dérivable de part et d'autre de 0. Une densité de Y est donc

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La valeur choisie au point 0 ne change pas la loi.

- 1) b) Comme $Y \geq 0$, l'existence de son espérance se ramène à la convergence de l'intégrale de $xf_Y(x)$. Pour $A > 0$,

$$\int_0^A xf_Y(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A xe^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - e^{-A^2/2}).$$

Cette expression admet une limite finie. L'espérance existe donc et

$$E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

- 1) c) On a $Y^2 = X^2$. La normale centrée réduite possède un second moment égal à 1, donc $E(Y^2) = E(X^2) = 1 < +\infty$.

La variance existe et la formule de Koenig-Huygens donne

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

- 2) a) On effectue d'abord le changement de variable sur un segment $[a, b]$, avec $0 < a < b$. L'application $t \mapsto u = \sqrt{2t}$ est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de $[a, b]$ sur $[\sqrt{2a}, \sqrt{2b}]$. Son inverse est $t = u^2/2$, et $dt = u du$.

Puisque $u > 0$, $\sqrt{\pi t} = u\sqrt{\pi/2}$. Il vient

$$\int_a^b \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\sqrt{2a}}^{\sqrt{2b}} e^{-u^2/2} du.$$

L'intégrale du membre de droite converge lorsque la borne inférieure tend vers 0 et la borne supérieure vers $+\infty$: elle est une constante fois la moitié de l'intégrale de la densité normale. On peut donc faire tendre $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$; cela établit à la fois la convergence de l'intégrale de gauche aux deux bornes et l'identité

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

On ne suppose pas que le changement de variable est régulier à $t = 0$: les calculs sont effectués pour $a > 0$, puis prolongés par passage à la limite.

- 2) b) La fonction g est positive ou nulle et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Une singularité en un seul point est compatible avec la définition d'une densité.

La normalisation de la densité normale et sa parité donnent

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2}.$$

En utilisant 2) a),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

Les conditions de positivité, de régularité hors d'un nombre fini de points et de normalisation sont vérifiées : g est une densité.

- 3) a) Puisque Z est de densité nulle sur $] -\infty, 0]$, $Z \geq 0$ presque sûrement. La racine carrée est donc définie presque sûrement ; on peut choisir sa valeur arbitrairement sur un éventuel événement de probabilité nulle.

Pour $x < 0$, $F_T(x) = 0$. Pour $x \geq 0$,

$$F_T(x) = P(\sqrt{2Z} \leq x) = P(Z \leq x^2/2) = G(x^2/2).$$

Pour $x > 0$, G est dérivable au point $x^2/2 > 0$, puisque g y est continue. La dérivation donne

$$f_T(x) = xg(x^2/2) = x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi x^2/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On prend $f_T(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Cette densité coïncide avec celle de Y , donc T et Y suivent la même loi.

- 3) b) Comme $T^2 = 2Z$ presque sûrement et T a la loi de Y , son second moment vaut $E(T^2) = E(Y^2) = 1$. Ainsi $Z = T^2/2$ possède une espérance et

$$E(Z) = \frac{1}{2} E(T^2) = \frac{1}{2}.$$

Il n'est pas nécessaire de supposer que les variables T et Y sont égales : l'égalité de leurs lois suffit pour identifier leurs moments.

4) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Si N suit la loi normale centrée réduite, alors $|N|$ suit la loi de Y , donc $N^2/2$ suit la loi de Z par 3) a). Une simulation s'écrit :

Python

```
import numpy.random as rd

Z = rd.normal(0, 1) ** 2 / 2
```

Le second argument de `rd.normal` est l'écart-type, ici 1. La commande renvoie une réalisation non négative de la loi demandée.

Cette simulation a été exécutée lors des contrôles ; des répétitions donnent des moments empiriques cohérents avec $E(Z) = 1/2$ et le second moment calculé en 5) b). Une simulation vérifie le comportement du programme, sans démontrer la loi.

5) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le programme complet est :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

n = int(input('Entrez la valeur de n, strictement positive : '))
w = rd.exponential(1, n)
s = np.sum(w * np.sqrt(w)) / n / np.sqrt(np.pi)
```

Notons $W_1, \dots, W_n$ les tirages indépendants de loi exponentielle de taux 1 contenus dans `w`, et posons $V_i = W_i^{3/2} / \sqrt{\pi}$. Le produit `w * np.sqrt(w)` est effectué coefficient par coefficient. La variable `s` contient donc

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i.$$

Chaque W_i possède la densité e^{-t} pour $t > 0$. Le transfert donne

$$E(V_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 g(t) dt,$$

sous réserve de convergence. Celle-ci est vérifiée : au voisinage de 0, $t^{3/2} e^{-t}$ est intégrable ; à l'infini, $t^{3/2} e^{-t} = o(e^{-t/2})$ par croissance comparée, et $e^{-t/2}$ est intégrable.

Pour appliquer la loi faible des grands nombres, vérifions également le second moment des V_i :

$$E(V_i^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(4)}{\pi} = \frac{6}{\pi} < +\infty.$$

On utilise ici la définition de la fonction gamma et l'identité du programme

$\Gamma(4) = 3! = 6$. Les variables V_i sont indépendantes, de même loi et de variance finie. La loi faible des grands nombres donne donc

$$s \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} t^2 g(t) dt \quad \text{en probabilité.}$$

La valeur numérique obtenue pour un grand n est une approximation aléatoire de cette intégrale. Le programme complet de l'énoncé a été exécuté lors de la vérification et fournit des valeurs proches de $3/4$, résultat établi dans la question suivante.

5) b) Le résultat $E(X^4) = 3$ est admis dans le sujet original ; il est utilisé avec la même hypothèse dans cette version.

Comme $Y = |X|$, $Y^4 = X^4$, donc $E(Y^4) = 3$. Puisque T et Y ont la même loi, $E(T^4) = 3$. Or $Z^2 = T^4/4$ presque sûrement, donc

$$E(Z^2) = \frac{1}{4} E(T^4) = \frac{3}{4}.$$

Le transfert pour la variable Z de densité g donne ainsi

$$\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{3}{4}.$$

L'existence de ce moment est assurée par le moment d'ordre quatre admis pour X , et a aussi été vérifiée directement en 5) a).

Exercice 3

- 1) L'endomorphisme f est symétrique pour le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le théorème spectral réel s'applique donc : il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ formée de vecteurs propres de f .

Notons λ_i la valeur propre associée à u_i ; les hypothèses donnent $\lambda_i > 0$ et $f(u_i) = \lambda_i u_i$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 2) a) Décomposons $x \in \mathbb{R}^n$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$$

Par linéarité,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i u_i.$$

L'orthonormalité donne alors

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

car chaque λ_i est strictement positive.

- 2) b) Si $x = 0$, $f(0) = 0$, donc $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

Réciproquement, si la somme

$$\sum_i \lambda_i x_i^2$$

vaut 0, tous ses termes, positifs ou nuls, valent 0. Puisque $\lambda_i > 0$, chaque $x_i = 0$, donc $x = 0$.

Ainsi $\langle x, f(x) \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2) c) Vérifions les propriétés d'un produit scalaire réel.

L'application $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ est bilinéaire, car le produit scalaire canonique est bilinéaire et f est linéaire.

La symétrie de f et celle du produit scalaire canonique donnent

$$\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \varphi(y, x).$$

Enfin, $\varphi(x, x) \geq 0$ par 2) a), et $\varphi(x, x) = 0$ exactement lorsque $x = 0$ par 2) b). Ainsi φ est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) Définissons g par ses images sur la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad g(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i.$$

Comme chaque $\lambda_i > 0$, les racines carrées sont réelles et strictement positives. La prescription des images d'une base définit un unique endomorphisme g .

Sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ est diagonale, donc symétrique. La caractérisation des endomorphismes symétriques par leur matrice dans une base orthonormale montre que g est symétrique pour le produit scalaire canonique.

La famille (u_i) est une base de vecteurs propres de g , et ses valeurs propres sont les nombres $\sqrt{\lambda_i} > 0$. Pour vérifier qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, si $g(v) = \mu v$ pour

$$v = \sum_i v_i u_i \neq 0,$$

alors $(\sqrt{\lambda_i} - \mu)v_i = 0$ pour chaque i . Au moins un v_i est non nul, donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ pour un tel indice.

Enfin, pour chaque i , $g^2(u_i) = \lambda_i u_i = f(u_i)$. Les deux endomorphismes coïncident sur une base; donc $g^2 = f$.

3) b) Méthode 1 — Étude du noyau.

Si $g(x) = 0$ et

$$x = \sum_i x_i u_i,$$

alors

$$\sum_i \sqrt{\lambda_i} x_i u_i = 0.$$

La famille (u_i) étant libre et les coefficients $\sqrt{\lambda_i}$ étant non nuls, tous les x_i sont nuls.

Donc $\text{Ker}(g) = \{0\}$: g est injectif. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif, par le théorème du rang.

Méthode 2 — Construction explicite de l'inverse.

Définissons l'endomorphisme h par $h(u_i) = u_i / \sqrt{\lambda_i}$. Les divisions sont définies puisque $\lambda_i > 0$. Pour chaque vecteur de la base, $g(h(u_i)) = u_i$ et $h(g(u_i)) = u_i$.

Par linéarité, $g \circ h = h \circ g = \text{Id}$. Donc g est bijectif et $g^{-1} = h$.

La première preuve donne la bijectivité à partir du noyau ; la seconde fournit en plus l'action concrète de l'inverse.

3) c) Puisque g^{-1} est un isomorphisme, l'image par g^{-1} de la base canonique est une base. On peut le vérifier directement : si

$$\sum_i a_i g^{-1}(e_i) = 0,$$

l'application de g donne

$$\sum_i a_i e_i = 0,$$

donc tous les $a_i = 0$. La famille est libre et comporte n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, donc c'est une base.

Pour $v, w \in \mathbb{R}^n$, la symétrie de g et $g^2 = f$ donnent

$$\varphi(v, w) = \langle v, g^2(w) \rangle = \langle g(v), g(w) \rangle.$$

Avec $v = g^{-1}(e_i)$ et $w = g^{-1}(e_j)$, on obtient

$$\varphi(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)) = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La famille est donc une base orthonormale pour le produit scalaire φ .

Problème

Partie 1

Dans cette partie, $r \in \mathbb{N}$ est fixé et $x \in]0, 1[$ est fixé, sauf lorsque la question 3) c) demande explicitement l'extension à $x = 0$.

1) Pour $r = 0$, $\binom{n}{0} = 1 = n^0/0!$; l'équivalent est donc immédiat.

Pour $r \geq 1$ et $n \geq r$, la formule factorielle donne

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}.$$

En divisant par $n^r/r!$, on obtient

$$\frac{\binom{n}{r}}{n^r/r!} = \prod_{j=0}^{r-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Ce produit contient un nombre fixé de facteurs, et chacun tend vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Le produit tend donc vers 1, d'où

$$\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}.$$

2) a) Comme $0 < x < 1$, $\ln(x) < 0$. Posons $c = -\ln(x) > 0$; alors $x^n = e^{-cn}$. Les croissances comparées entre puissances et exponentielles donnent

$$n^{r+2}x^n = n^{r+2}e^{-cn} \rightarrow 0.$$

2) b) Les termes sont positifs ou nuls. D'après 1) et 2) a),

$$n^2 \binom{n}{r} x^n \sim \frac{n^{r+2}x^n}{r!} \rightarrow 0.$$

Ainsi $\binom{n}{r}x^n = o(1/n^2)$. La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge, donc la série

$$\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^n$$

converge par comparaison. Les éventuels premiers termes, notamment celui d'indice 0 lorsque $r = 0$, ne changent pas la nature de la série.

3) a) Pour $r = 0$, $\binom{n}{0} = 1$, donc

$$S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x),$$

somme géométrique puisque $|x| < 1$.

3) b) Utilisons la formule de Pascal pour $n \geq r + 1$:

$$\binom{n}{r+1} = \binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r}.$$

Pour $n = r + 1$, le premier coefficient du membre de droite est nul, selon la convention usuelle $\binom{r}{k} = 0$ pour $k > r$.

Multiplions par x^n et sommons. La série de gauche converge par 2) b). Les deux séries de droite sont respectivement, après le changement d'indice $m = n - 1$,

$$\sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n-1}{r+1} x^n = x \sum_{m=r+1}^{+\infty} \binom{m}{r+1} x^m = x S_{r+1}$$

et

$$\sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n-1}{r} x^n = x \sum_{m=r}^{+\infty} \binom{m}{r} x^m = x S_r.$$

Ces séries convergent aussi par 2) b). La linéarité des séries convergentes donne donc $S_{r+1} = x S_{r+1} + x S_r$, soit

$$(1-x) S_{r+1} = x S_r.$$

Aucune dérivation de série n'est nécessaire : seule l'identité de Pascal est utilisée.

3) c) Comme $1-x > 0$, la relation précédente donne $S_{r+1} = x S_r / (1-x)$. Une récurrence sur r , initialisée par $S_0 = 1/(1-x)$, établit

$$S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

En effet, si l'identité vaut au rang r , alors $S_{r+1} = x^{r+1}/(1-x)^{r+2}$.

Pour traiter $x = 0$, on utilise la convention de puissance entière $x^0 = 1$, également lorsque $x = 0$. Si $r = 0$, la série contient seulement un terme non nul, celui d'indice 0, et sa somme vaut 1, comme le membre de droite. Si $r \geq 1$, tous les exposants $n \geq r$ sont strictement positifs; la série et le membre de droite valent 0.

La formule est ainsi valable pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $r \in \mathbb{N}$.

3) d) Pour $x \in]0, 1[$, on peut factoriser x^{-r} hors de la série convergente :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} S_r = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Si l'on prolonge également cette formule à $x = 0$, le seul terme non nul est celui d'indice $n = r$, de valeur $\binom{r}{r} 0^0 = 1$ selon la convention précédente. La somme vaut donc 1, comme le membre de droite. Cette extension ne repose pas sur une division par $x = 0$.

Partie 2

Dans cette partie, on pose $q = 1 - \alpha \in]0, 1[$. Les variables X , Y et G désignent respectivement le nombre de manches jouées, le nombre de victoires et le gain total; elles n'ont pas de lien avec celles des exercices précédents.

1) a) Pour jouer exactement n manches avant d'être disqualifié, il faut être autorisé à jouer chacune des n premières manches, puis être disqualifié avant la manche $n + 1$. Les probabilités composées, avec probabilité de poursuite q et de disqualification α à chaque étape, donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \alpha q^n = \alpha(1 - \alpha)^n.$$

Pour $n = 0$, cette expression vaut α et correspond à la disqualification avant la première manche.

La somme des probabilités vaut

$$\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \alpha/(1-q) = 1.$$

En outre, la probabilité de jouer au moins N manches est $q^N \rightarrow 0$; par continuité monotone des probabilités, la probabilité d'une poursuite indéfinie est nulle.

La loi obtenue est donc une loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$.

1) b) Pour $k \geq 1$,

$$P(T = k) = P(X = k - 1) = \alpha(1 - \alpha)^{k-1}.$$

Ainsi $T = X + 1$ suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre α . Son espérance existe et vaut $1/\alpha$. Comme $X = T - 1$,

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

1) c) La variance de la géométrique de paramètre α vaut $(1 - \alpha)/\alpha^2$. La variance est inchangée par soustraction d'une constante, donc

$$V(X) = V(T) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}.$$

On utilisera aussi son second moment, qui est fini :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{(1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2}{\alpha^2} = \frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{\alpha^2}.$$

2) a) Pour chaque $n \geq 0$, $P(X = n) = \alpha q^n > 0$, donc la loi conditionnelle est définie.

Sachant que n manches ont été jouées, le joueur dispose de n épreuves de victoire ou défaite, indépendantes, de probabilité de victoire p . Les autorisations de jeu n'altèrent pas ces probabilités de victoire.

Ainsi, conditionnellement à $(X = n)$, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

La probabilité est nulle pour $k > n$. Pour $n = 0$, la loi est concentrée en 0 : aucune manche n'a été gagnée.

2) b) Fixons $k \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales sur les événements $(X = n)$ donne

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \alpha q^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Comme $q, p, 1-p$ sont strictement positifs, on peut factoriser les constantes :

$$P(Y = k) = \alpha (pq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q(1-p))^{n-k}.$$

Le nombre $q(1-p)$ appartient à $]0, 1[$. La partie 1, question 3) d), appliquée avec $r = k$, donne

$$P(Y = k) = \frac{\alpha (pq)^k}{(1 - q(1-p))^{k+1}}.$$

Posons $\delta = 1 - q(1-p) = \alpha + p - \alpha p = \alpha + pq$. On a $\delta > \alpha > 0$. Avec $\beta = pq/\delta \in]0, 1[$, on obtient $1 - \beta = \alpha/\delta$ et

$$P(Y = k) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{pq}{\delta} \right)^k = (1 - \beta) \beta^k, \quad k \geq 0.$$

Les probabilités sont normalisées puisque

$$(1 - \beta) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k = 1.$$

Ainsi $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre α/δ sur $\mathbb{N}^*$.

3) Méthode 1 — Utilisation de la loi géométrique décalée.

La loi de $Y + 1$ est géométrique de paramètre $\theta = \alpha/\delta \in]0, 1[$. Les moments usuels donnent

$$E(Y) = \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 = \frac{p(1 - \alpha)}{\alpha}$$

et

$$V(Y) = \frac{1 - \theta}{\theta^2} = \frac{(\delta - \alpha)\delta}{\alpha^2} = \frac{p(1 - \alpha)(p + \alpha - p\alpha)}{\alpha^2}.$$

L'existence des moments découle de la loi géométrique reconnue.

Méthode 2 — Espérances conditionnelles et second moment.

On a $0 \leq Y \leq X$ et $0 \leq Y^2 \leq X^2$. Puisque X possède un second moment fini, l'espérance et le second moment de Y existent. On peut appliquer la formule de l'espérance totale aux événements $(X = n)$.

Pour la loi binomiale conditionnelle de 2) a),

$$E(Y \mid X = n) = np$$

et

$$E(Y^2 \mid X = n) = np(1 - p) + n^2p^2,$$

par les moments de la binomiale et la formule de Koenig-Huygens. La sommation sur n donne

$$E(Y) = pE(X)$$

et

$$E(Y^2) = p(1-p)E(X) + p^2E(X^2).$$

On soustrait $E(Y)^2 = p^2E(X)^2$:

$$V(Y) = p(1-p)E(X) + p^2V(X).$$

Avec les moments de X , on obtient

$$V(Y) = \frac{p(1-p)(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{p^2(1-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{p(1-\alpha)(\alpha(1-p) + p)}{\alpha^2},$$

ce qui redonne la formule demandée.

La première méthode utilise la loi complète de Y . La seconde calcule les moments sans connaître cette loi; elle établit les identités nécessaires directement, sans supposer une formule générale de variance conditionnelle.

- 4) a) Parmi les X manches jouées, Y sont gagnées et $X - Y$ sont perdues. Chaque victoire rapporte un euro et chaque défaite coûte un euro. Ainsi

$$G = Y - (X - Y) = 2Y - X.$$

Pour $X = 0$, on a $Y = 0$ et $G = 0$, ce qui est cohérent avec cette formule.

- 4) b) Les espérances de X et de Y sont finies. De plus, puisque $0 \leq Y \leq X$, on a $-X \leq 2Y - X \leq X$, donc $|G| \leq X$; l'espérance de G existe absolument.

Par linéarité,

$$E(G) = 2E(Y) - E(X) = \frac{(2p-1)(1-\alpha)}{\alpha}.$$

L'espérance du gain est positive si $p > 1/2$, nulle si $p = 1/2$ et négative si $p < 1/2$.

- 4) c) L'existence de $E(XY)$ est admise dans le sujet. Elle se vérifie également ici, puisque $0 \leq XY \leq X^2$ et $E(X^2) < +\infty$.

Conditionnellement à $(X = n)$, la variable X est constante égale à n , donc

$$E(XY \mid X = n) = nE(Y \mid X = n) = pn^2.$$

La formule de l'espérance totale donne

$$E(XY) = p \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n) = pE(X^2) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

Cette preuve utilise des conditionnements à des événements de probabilités non nulles et une série convergente de termes positifs.

- 4) d) Méthode 1 — Covariance de X et Y .

Comme $|G| \leq X$, on a $G^2 \leq X^2$, donc la variance de G existe. Les variables X et Y possèdent aussi des variances et leur covariance est définie.

D'après 3) et 4) c),

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p(E(X^2) - E(X)^2) = pV(X).$$

La bilinéarité de la covariance appliquée à $G = 2Y - X$ donne

$$V(G) = 4V(Y) + V(X) - 4\text{Cov}(X, Y).$$

En remplaçant la variance de Y par l'expression obtenue dans la seconde méthode de 3),

$$V(G) = 4p(1-p)E(X) + (4p^2 + 1 - 4p)V(X).$$

Comme $4p^2 + 1 - 4p = (2p - 1)^2$, il vient

$$V(G) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} ((2p-1)^2 + 4\alpha p(1-p)).$$

Méthode 2 — Calcul du second moment conditionnel.

Sachant $X = n$, $G = 2Y - n$ avec Y de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Les moments binomiaux donnent

$$E(G \mid X = n) = (2p - 1)n, \quad V(G \mid X = n) = 4np(1 - p).$$

Par Koenig-Huygens dans cette loi conditionnelle,

$$E(G^2 \mid X = n) = 4np(1 - p) + (2p - 1)^2 n^2.$$

L'espérance totale est applicable, puisque $G^2 \leq X^2$ possède une espérance finie. On obtient

$$E(G^2) = 4p(1 - p)E(X) + (2p - 1)^2 E(X^2).$$

En soustrayant $E(G)^2 = (2p - 1)^2 E(X)^2$, on retrouve

$$V(G) = 4p(1 - p)E(X) + (2p - 1)^2 V(X),$$

puis la même formule explicite.

La première approche suit les questions précédentes en utilisant $E(XY)$. La seconde distingue directement la variabilité des gains pour un nombre fixé de manches et celle du nombre de manches.

5) a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Méthode 1 — Simulation à partir des lois obtenues.

La variable $X + 1$ est géométrique de paramètre α . On tire donc `rd.geometric(alpha)`, dont les valeurs sont dans $\mathbb{N}^*$, puis on soustrait 1 pour obtenir X .

Ensuite, conditionnellement à la valeur obtenue pour X , on tire une binomiale de paramètres X et p , conformément à 2) a). On obtient ainsi la loi conjointe requise, et pas deux simulations indépendantes des lois marginales.

Le code complété est :

Python

```
import numpy.random as rd

alpha = float(input('Entrez la valeur de alpha, dans ]0, 1[ : '))
p = float(input('Entrez la valeur de p, dans ]0, 1[ : '))
X = rd.geometric(alpha) - 1
Y = rd.binomial(X, p)
print(X)
print(Y)
```

La commande binomiale accepte $X = 0$ et renvoie alors 0, comme l'impose l'expérience. Les paramètres saisis doivent vérifier $0 < \alpha < 1$ et $0 < p < 1$.

Méthode 2 — Simulation manche après manche.

On peut aussi reproduire directement les étapes du jeu. Un tirage uniforme inférieur à α entraîne la disqualification ; sinon on joue une manche, puis un autre tirage uniforme inférieur à p détermine une victoire.

Python

```
import numpy.random as rd

def simulation_manches(alpha, p):
    X = 0
    Y = 0
    autorise = rd.random() >= alpha
    while autorise:
        X = X + 1
        if rd.random() < p:
            Y = Y + 1
```

```

    autorise = rd.random() >= alpha
    return X, Y

```

```

alpha = float(input('Entrez la valeur de alpha, dans ]0, 1[ : '))
p = float(input('Entrez la valeur de p, dans ]0, 1[ : '))
X, Y = simulation_manches(alpha, p)
print(X)
print(Y)

```

Le premier test d'autorisation précède la première manche, ce qui permet $X = 0$. Après chaque manche, un nouveau test décide de la poursuite. La probabilité de jouer au moins N manches vaut $(1 - \alpha)^N \rightarrow 0$, donc la boucle s'arrête presque sûrement dans le modèle probabiliste.

La première méthode est plus directe lorsqu'on connaît les lois ; la seconde illustre les règles de l'expérience. Les deux programmes ont été exécutés lors de la vérification et respectent $0 \leq Y \leq X$; des répétitions donnent des moments empiriques cohérents avec les formules établies.

5) b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

D'après 4) a), on ajoute après le calcul de X et de Y :

Python

```

G = 2 * Y - X
print(G)

```

Pour disposer du programme complet utilisant la première méthode de 5) a), imports compris :

Python

```

import numpy.random as rd

alpha = float(input('Entrez la valeur de alpha, dans ]0, 1[ : '))
p = float(input('Entrez la valeur de p, dans ]0, 1[ : '))

```

```
X = rd.geometric(alpha) - 1
Y = rd.binomial(X, p)
G = 2 * Y - X
print(X)
print(Y)
print(G)
```

Le programme calcule le gain à partir des mêmes réalisations de X et Y . Il a été exécuté ; il vérifie notamment $-X \leq G \leq X$ et donne $G = 0$ lorsque $X = 0$.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 7 : code adapté en Python. Les saisies et affichages sont convertis en `input`, `int` et `print`, le logarithme est calculé par `np.log`, et la boucle parcourt les indices de 2 à n inclus avec `range(2, n + 1)`. L'ordre des mises à jour de I et J est conservé. Les commandes de saisie et d'affichage sont expliquées dans le sujet.

Exercice 2, question 4 : demande de simulation convertie en Python, avec le générateur `numpy.random` et la transformation d'une normale centrée réduite en Z .

Exercice 2, question 5 : programme adapté en Python, y compris la simulation de n exponentielles, le produit coefficient par coefficient, la somme et la constante π . Le domaine de saisie $n \geq 1$ est précisé pour que la moyenne soit définie ; le paramétrage en échelle de l'exponentielle NumPy est rappelé.

Problème, partie 2, question 5) a) : code adapté en Python, avec une géométrie sur $\mathbb{N}^*$ décalée de 1 pour X , puis une binomiale conditionnelle pour Y . Les saisies sont converties en réels et les valeurs sont affichées par `print`.

Problème, partie 2, question 5) b) : calcul et affichage du gain convertis en Python.
