



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2014

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On rappelle que la fonction gamma associe à tout réel $x > 0$ le nombre

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \text{ On admet que } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Pour $\nu > 0$, la loi $\gamma(\nu)$ désigne la loi gamma de forme ν et de taux un, de densité

$$t \mapsto \frac{t^{\nu-1} e^{-t}}{\Gamma(\nu)} \text{ sur }]0, +\infty[, \text{ nulle ailleurs.}$$

1) On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite. On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.

a) Montrer que $U/2$ et $V/2$ suivent toutes deux la loi $\gamma(\frac{1}{2})$, et donner une densité commune à U et V .

b) Donner l'espérance et la variance de U et V .

2) On pose $W = U + V$; c'est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé.

a) Donner sans calcul la loi de W , ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et de V , alors une densité de W est la fonction f_W , nulle sur $] -\infty, 0[$ et définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

Justifier, sans calculer cette intégrale, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

- c) Pour tout réel $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$. Dédurre des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\text{Tr}(M)$ sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux. On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui, à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A.$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul. On pourra distinguer les cas $\text{Tr}(A) = 0$ et $\text{Tr}(A) \neq 0$.
- 3) a) Établir que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(f \circ f)(M) = \text{Tr}(A)f(M)$.
b) Donner les valeurs propres possibles de f .
- 4) Montrer que zéro est valeur propre de f .
- 5) Montrer que, si $\text{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
- 6) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
a) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(f)$?

- b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur, par deux méthodes différentes, de :

$$\Delta = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt.$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois, et F le sous-espace de E engendré par les polynômes 1 et X .

- 1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.
- b) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) , associe $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur E . Sa norme associée sera notée $\| \cdot \|$.
- 2) Soit $Q \in F$ défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.
- 3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme $Q_0 \in F$ qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.
- b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1 \rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X \rangle$.
- c) En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$ soit minimale.

- d) Déterminer la valeur de Δ .

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt.$$

- 4) Écrire $f(x, y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y .
- 5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}^2$.
- 6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m , que l'on calculera.
- 7) Établir que ce minimum est global.

Problème

Question préliminaire

- 1) Soit x un réel quelconque.
 - a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x, t) dt$.

- b) Montrer que :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x < 1, \\ x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y , elle aussi sur cet espace, en posant, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt.$$

On se propose, dans les deux parties suivantes, de déterminer la loi de Y connaissant celle de X .

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

- 2) Vérifier que, si X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, alors $Y = X$.
- 3) On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$.
 - a) Déterminer la valeur de $P(X = 0)$.
 - b) Vérifier que $Y(\Omega) = \{\frac{1}{2}, 1\}$ puis donner la loi de Y , ainsi que son espérance et sa variance.
 - c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y . La commande `rd.randint(0, 4)` renvoie un entier uniforme parmi zéro, un, deux et trois.

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_discrete():
    u = rd.randint(0, 4)

    if ...:
        y = ...
    else:
        y = ...

    return y
```

4) On suppose dans cette question que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \{\frac{1}{2}\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y .

b) En déduire l'espérance et la variance de Y .

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y .

5) On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, avec $X(\Omega) = [0, 1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que $Y = \frac{X^2 + 1}{2}$.

b) En déduire $Y(\Omega)$.

c) Montrer alors que, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, on a $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$.

- d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.
- e) Donner la valeur de $E(Y)$.
- f) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y .

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_uniforme():
    return ...
```

- 6) On suppose dans cette question que $X - 1$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ce paramètre étant le taux.
 - a) Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X .
 - b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y .
 - c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Vérifier que $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ , puis compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y .

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_Y_exponentielle(lam):
    return ...
```

- 7) On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X .

- a) Vérifier que $Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$.
- b) Donner la valeur de $P(Y = \frac{1}{2})$.
- c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- d) La variable aléatoire Y est-elle à densité? Est-elle discrète?
- e) Soit $U_1, \dots, U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{48} U_k - 24 \right)$$

par la loi normale centrée réduite, puis compléter la fonction suivante pour qu'elle simule approximativement Y .

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_normale_approx():
    aux = 0
    for k in range(1, 49):
        aux = aux + rd.random()
    x = (aux - 24) / 2
    if ...:
```

```
        y = ...
    else:
        if ...:
            y = ...
        else:
            y = ...
    return y
```