



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2014

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

La notation $\gamma(\nu)$ désigne la loi gamma de forme ν et de taux un. Ses moments sont $E(T) = \nu$ et $V(T) = \nu$; la somme de deux gamma indépendantes de même taux un a pour forme la somme de leurs formes.

1) a) Loi d'un carré de normale.

Question adaptée au programme actuel : la notation gamma à deux paramètres du sujet original est remplacée par une gamma de taux un appliquée à $U/2$ et $V/2$. Cette formulation décrit exactement les mêmes lois de U et V .

Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ sa densité. Comme $U = X^2 \geq 0$, sa fonction de répartition vaut zéro pour $u < 0$. Pour $u \geq 0$:

$$F_U(u) = P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = \Phi(\sqrt{u}) - \Phi(-\sqrt{u}) = 2\Phi(\sqrt{u}) - 1.$$

On utilise ici la symétrie de la loi normale et son absence d'atomes. Cette fonction est continue, y compris en zéro, et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Pour $u > 0$, la dérivation donne :

$$F'_U(u) = \frac{\varphi(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} = \frac{e^{-u/2}}{\sqrt{2\pi u}}.$$

Ainsi une densité de U est :

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{e^{-u/2}}{\sqrt{2\pi u}} & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{si } u \leq 0. \end{cases}$$

La même démonstration s'applique à $V = Y^2$, car Y a la même loi que X .

Pour $T = U/2$, la transformation affine d'une densité donne, pour $t > 0$:

$$f_T(t) = 2f_U(2t) = \frac{t^{-1/2}e^{-t}}{\sqrt{\pi}} = \frac{t^{1/2-1}e^{-t}}{\Gamma(1/2)}.$$

Cette densité est nulle pour $t \leq 0$. On reconnaît la loi $\gamma(\frac{1}{2})$. Par conséquent $U/2$ et $V/2$ suivent toutes deux cette loi.

1) b) Espérances et variances.

Les lois gamma de forme strictement positive admettent une espérance et une variance finies. D'après 1)a) :

$$E(U/2) = E(V/2) = \frac{1}{2}, \quad V(U/2) = V(V/2) = \frac{1}{2}.$$

Les règles de transformation affine donnent alors :

$$E(U) = E(V) = 1, \quad V(U) = V(V) = 2.$$

2) a) Loi et moments de W .

Les variables $U = X^2$ et $V = Y^2$ sont indépendantes par le lemme des coalitions, puisque X et Y le sont. Il en est de même pour $U/2$ et $V/2$.

La stabilité des lois gamma indépendantes de même taux donne :

$$\frac{W}{2} = \frac{U}{2} + \frac{V}{2} \sim \gamma(1).$$

Or $\gamma(1)$ est la loi exponentielle de taux un. Ainsi W suit la loi exponentielle de taux $1/2$, de densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x/2}$ sur $]0, +\infty[$. Ses moments, donnés par les formules de cette loi, sont :

$$E(W) = 2, \quad V(W) = 4.$$

L'indépendance vérifiée au début permet bien d'utiliser la propriété de somme ; une simple égalité des lois marginales ne suffirait pas.

2) b) Réduction de l'intégrale de convolution.

On choisit les densités de 1)a), nulles sur $] -\infty, 0]$. Pour un réel $x \geq 0$, le produit $f_U(t)f_V(x-t)$ ne peut être non nul que si $t > 0$ et $x-t > 0$, soit $0 < t < x$.

L'intégration sur $\mathbb{R}$ se réduit donc à cet intervalle :

$$f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t) dt.$$

Les valeurs aux extrémités ne changent pas l'intégrale. Pour $x = 0$, le produit est nul partout avec le choix de densités effectué, et les deux intégrales valent zéro. Aucune primitive n'est nécessaire pour cette question.

2) c) Convergence et valeur de $I(x)$.

Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t(x-t)}$ est continue et positive sur $]0, x[$. Sur $]0, x/2]$, on a $x-t \geq x/2$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

L'intégrale de $t^{-1/2}$ converge en zéro. Sur $[x/2, x[$, on a de même :

$$\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sqrt{x-t}},$$

dont l'intégrale converge en x . Par comparaison sur les deux moitiés, $I(x)$ converge pour tout $x > 0$.

Le changement de variable affine $t = xs$, d'abord sur un segment intérieur puis avec passage aux limites aux deux bornes, donne :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = I(1).$$

Cette égalité montre que la valeur ne dépend pas de x . Notons cette valeur finie C .

En remplaçant les densités dans la convolution de 2)b), pour $x > 0$ on obtient :

$$f_W(x) = \frac{e^{-x/2}}{2\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \frac{C}{2\pi} e^{-x/2}.$$

Puisque f_W est une densité de la variable W identifiée en 2)a), elle est normalisée. Par conséquent :

$$1 = \int_0^{+\infty} f_W(x) dx = \frac{C}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx = \frac{C}{\pi}.$$

Donc $C = \pi$, et finalement :

$$\forall x > 0, \quad I(x) = \pi.$$

L'argument par normalisation évite de supposer que deux densités d'une même loi sont nécessairement égales en chaque point : elles ne sont en général égales que presque partout.

Exercice 2

On pose $a = \text{Tr}(A)$ et l'on travaille dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2 . La matrice A est non nulle et $n \geq 2$.

1) Linéarité de f .

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de la trace donne :

$$f(\alpha M + \beta N) = a(\alpha M + \beta N) - (\alpha \text{Tr}(M) + \beta \text{Tr}(N))A = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

L'image de chaque matrice est encore dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi f est un endomorphisme de cet espace.

2) f est non nul.

On suit la distinction proposée.

Si $a = 0$, alors $f(I_n) = -\text{Tr}(I_n)A = -nA \neq 0$, puisque $n \geq 2$ et $A \neq 0$.

Si $a \neq 0$, on prend la matrice E_{12} , dont l'unique coefficient non nul est un en position $(1, 2)$. Cette matrice existe car $n \geq 2$, elle est non nulle et sa trace vaut zéro. Ainsi :

$$f(E_{12}) = aE_{12} \neq 0.$$

Dans les deux cas, on a exhibé une matrice d'image non nulle. L'endomorphisme f n'est donc pas nul.

3) a) Relation vérifiée par f .

Pour tout M , la linéarité de la trace donne :

$$\text{Tr}(f(M)) = a \text{Tr}(M) - \text{Tr}(M) \text{Tr}(A) = 0.$$

On applique alors la définition de f à $f(M)$:

$$(f \circ f)(M) = af(M) - \text{Tr}(f(M))A = af(M).$$

Ainsi $f^2 = af$, autrement dit $f^2 - af = 0$.

3) b) Valeurs propres possibles.

Soit λ une valeur propre de f , associée à une matrice propre $M \neq 0$. On a $f(M) = \lambda M$, donc $f^2(M) = \lambda^2 M$. La relation précédente impose :

$$\lambda^2 M = a\lambda M.$$

Comme $M \neq 0$, on en déduit $\lambda(\lambda - a) = 0$. Les seules valeurs propres possibles sont donc zéro et $a = \text{Tr}(A)$. Si $a = 0$, la seule possibilité est zéro.

Cette étape donne seulement des valeurs possibles ; leur présence effective doit être justifiée séparément.

4) Zéro est valeur propre.

La définition de f donne $f(A) = aA - \text{Tr}(A)A = 0$. Comme $A \neq 0$, la matrice A est un vecteur propre de f pour la valeur propre zéro. Ainsi zéro appartient bien au spectre de f .

5) Cas $\text{Tr}(A) = 0$.

Si $a = 0$, la question 3)b) montre que zéro est l'unique valeur propre de f . Supposons f diagonalisable. Il existerait alors une base de matrices propres, toutes associées à la valeur propre zéro. La matrice de f dans cette base serait nulle ; cela imposerait $f = 0$.

Cette conclusion contredit la question 2). Donc f n'est pas diagonalisable lorsque $\text{Tr}(A) = 0$.

6) a) Dimension du noyau de la trace.

L'application trace est une forme linéaire non nulle, puisque $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$. Son image est donc $\mathbb{R}$, de dimension un. Le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = n^2 - 1.$$

Son noyau est ainsi un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6) b) Diagonalisation lorsque $a \neq 0$.

Méthode 1 — Dimensions des espaces propres.

L'équation $f(M) = 0$ équivaut à $aM = \text{Tr}(M)A$. Comme $a \neq 0$, elle impose que M soit un multiple de A . Réciproquement, tous ces multiples appartiennent au noyau par la question 4). Ainsi :

$$E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(A), \quad \dim E_0(f) = 1.$$

L'équation $f(M) = aM$ équivaut à $\text{Tr}(M)A = 0$. Comme $A \neq 0$, elle équivaut à $\text{Tr}(M) = 0$. Ainsi :

$$E_a(f) = \text{Ker}(\text{Tr}), \quad \dim E_a(f) = n^2 - 1.$$

Les valeurs propres zéro et a sont distinctes. Les espaces propres associés sont donc en somme directe et la somme de leurs dimensions vaut n^2 . Ils engendrent tout l'espace : f est diagonalisable. Une base propre est obtenue en réunissant A et une base du noyau de la trace.

Méthode 2 — Décomposition à l'aide d'un projecteur.

Définissons $p(M) = \frac{\text{Tr}(M)}{a}A$. La linéarité de la trace rend p linéaire. De plus :

$$p(p(M)) = \frac{\text{Tr}(M)}{a} \frac{\text{Tr}(A)}{a} A = p(M).$$

C'est donc un projecteur. Son image est $\text{Vect}(A)$, puisque $p(A) = A$, et son noyau est $\text{Ker}(\text{Tr})$. Toute matrice possède la décomposition :

$$M = p(M) + (M - p(M)),$$

où $p(M) \in \text{Vect}(A)$ et $M - p(M) \in \text{Ker}(\text{Tr})$. Cette somme est directe : un multiple tA de trace nulle vérifie $ta = 0$, donc $t = 0$.

Or $f = a(\text{Id} - p)$. Sur l'image de p , f vaut zéro ; sur le noyau de p , f vaut $a \text{Id}$. Une base adaptée à cette décomposition est donc une base propre, ce qui prouve à nouveau la diagonalisation.

La première méthode applique le critère des dimensions des espaces propres. La seconde construit explicitement la décomposition de chaque matrice grâce à sa trace.

Exercice 3

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

1) a) Convergence des intégrales et valeurs utiles.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc ne présente pas de difficulté en zéro. À l'infini, la croissance comparée donne :

$$\frac{t^k e^{-t}}{e^{-t/2}} = t^k e^{-t/2} \rightarrow 0.$$

L'intégrale de $e^{-t/2}$ converge sur $[0, +\infty[$. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.

Pour les calculs suivants, établissons ses valeurs. On a $J_0 = 1$. Pour $k \geq 1$, l'intégration par parties sur $[0, R]$ donne :

$$\int_0^R t^k e^{-t} dt = -R^k e^{-R} + k \int_0^R t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Les intégrales convergent et $R^k e^{-R} \rightarrow 0$; en passant à la limite, $J_k = k J_{k-1}$. Par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad J_k = k!.$$

En particulier, $J_0 = 1$, $J_1 = 1$, $J_2 = 2$, $J_3 = 6$, $J_4 = 24$ et $J_6 = 720$.

1) b) Produit scalaire.

Il faut d'abord vérifier que l'intégrale est bien définie. Pour $P, Q \in E$, le produit PQ est de degré au plus six. Il s'écrit

$$P(t)Q(t) = \sum_{k=0}^6 a_k t^k$$

avec des coefficients réels. Pour $t \geq 0$:

$$|P(t)Q(t)|e^{-t} \leq \sum_{k=0}^6 |a_k| t^k e^{-t}.$$

Le majorant a une intégrale finie par 1)a). L'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ est donc absolument convergente.

La linéarité de l'intégrale et des produits de polynômes donne la bilinéarité. L'égalité $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$ donne la symétrie. Enfin :

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt \geq 0.$$

Pour vérifier le caractère défini positif, supposons $P \neq 0$. Un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines réelles ; on peut donc choisir $t_0 > 0$ tel que $P(t_0) \neq 0$. La fonction continue $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est strictement positive en t_0 . Il existe un segment de longueur strictement positive contenu dans $]0, +\infty[$ sur lequel elle est minorée par une constante strictement positive. Son intégrale sur ce segment est donc strictement positive, et ainsi $\langle P, P \rangle > 0$.

Réciproquement, le polynôme nul donne une norme carrée nulle. On a donc bien un produit scalaire sur E .

2) Distance à un polynôme de F .

Pour $Q = xX + y$, le polynôme $X^3 - Q$ prend la valeur $t^3 - xt - y$ en t . La définition de la norme associée donne :

$$\|X^3 - Q\|^2 = \langle X^3 - Q, X^3 - Q \rangle = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt.$$

Cette intégrale converge par 1)b), puisque $X^3 - Q \in E$.

3) a) Théorème de projection orthogonale.

Dans un espace euclidien, pour tout sous-espace vectoriel F et tout vecteur P , il existe un unique vecteur $Q_0 \in F$ minimisant la distance $\|P - Q\|$ lorsque Q parcourt F . Ce vecteur est la projection orthogonale de P sur F , caractérisée par $P - Q_0 \in F^\perp$.

L'espace E est de dimension quatre et le produit scalaire a été établi en 1)b) : c'est donc un espace euclidien. L'ensemble $F = \text{Vect}(1, X)$ est un sous-espace. Le théorème s'applique à $P = X^3$ et donne l'existence et l'unicité de Q_0 .

Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, minimiser la distance ou son carré conduit au même polynôme Q_0 .

3) b) Relations d'orthogonalité.

Le résidu $X^3 - Q_0$ appartient à $F^\perp$. Or 1 et X appartiennent à F . Sans calcul, on obtient :

$$\langle X^3 - Q_0, 1 \rangle = 0, \quad \langle X^3 - Q_0, X \rangle = 0.$$

3) c) Système pour les coefficients de Q_0 .

Écrivons $Q_0 = x_0X + y_0$. Les deux égalités précédentes deviennent :

$$\int_0^{+\infty} (t^3 - x_0t - y_0)e^{-t} dt = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} (t^4 - x_0t^2 - y_0t)e^{-t} dt = 0.$$

Chaque intégrale est absolument convergente par 1)a). En utilisant les valeurs $J_k = k!$:

$$\begin{cases} 6 - x_0 - y_0 = 0, \\ 24 - 2x_0 - y_0 = 0, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_0 + y_0 = 6, \\ 2x_0 + y_0 = 24. \end{cases}$$

La soustraction des deux lignes donne $x_0 = 18$, puis $y_0 = -12$. Ainsi $Q_0 = 18X - 12$. Le théorème de projection assure que ce couple est bien l'unique minimiseur, et non seulement un candidat.

3) d) Valeur du minimum.

Méthode 1 — Pythagore.

La décomposition $X^3 = Q_0 + (X^3 - Q_0)$ est orthogonale, donc :

$$\|X^3\|^2 = \|Q_0\|^2 + \|X^3 - Q_0\|^2.$$

On a $\|X^3\|^2 = J_6 = 720$. D'autre part :

$$\|Q_0\|^2 = \int_0^{+\infty} (18t - 12)^2 e^{-t} dt = 324J_2 - 432J_1 + 144J_0 = 648 - 432 + 144 = 360.$$

Ainsi $\Delta = 720 - 360 = 360$.

Méthode 2 — Intégration directe du résidu.

En développant le carré :

$$(t^3 - 18t + 12)^2 = t^6 - 36t^4 + 24t^3 + 324t^2 - 432t + 144.$$

La linéarité des intégrales convergentes donne alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= J_6 - 36J_4 + 24J_3 + 324J_2 - 432J_1 + 144J_0 = 720 - 864 + 144 + 648 - 432 + 144 \\ &= 360. \end{aligned}$$

La première méthode utilise l'orthogonalité pour réduire le calcul ; la seconde contrôle le résultat par le développement du résidu. Le minimum est atteint uniquement pour $(x, y) = (18, -12)$.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

4) Expression polynomiale de f .

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on développe :

$$(t^3 - xt - y)^2 = t^6 - 2xt^4 - 2yt^3 + x^2t^2 + 2xyt + y^2.$$

Toutes les intégrales correspondantes convergent, et il n'y a qu'une somme finie. En utilisant $J_k = k!$, on obtient :

$$f(x, y) = 720 - 48x - 12y + 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Cette égalité montre en particulier que f est polynomiale et donc de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. La dérivation sous l'intégrale n'est pas nécessaire.

5) Point critique.

Le gradient de la fonction polynomiale est :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y - 48 \\ 2x + 2y - 12 \end{pmatrix}.$$

Un point critique vérifie donc $2x + y = 24$ et $x + y = 6$. En soustrayant, on obtient $x = 18$, puis $y = -12$. Le système a une unique solution :

$$(x_0, y_0) = (18, -12).$$

6) Minimum local et valeur.

On utilise la hessienne, conformément au programme actuel. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et $(18, -12)$ est un point critique. Sa hessienne, constante, est :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Signes des valeurs propres.

Pour déterminer les valeurs propres sans déterminant, on résout $HZ = \lambda Z$, avec $Z = {}^t(u, v) \neq 0$. Le système est :

$$\begin{cases} (4 - \lambda)u + 2v = 0, \\ 2u + (2 - \lambda)v = 0. \end{cases}$$

Si $u = 0$, la première ligne impose $v = 0$, ce qui est impossible. On a donc $u \neq 0$, et la première ligne donne $v = (\lambda - 4)u/2$. En substituant dans la seconde :

$$4 + (2 - \lambda)(\lambda - 4) = 0, \quad \text{soit} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

Les deux solutions sont $\lambda_- = 3 - \sqrt{5}$ et $\lambda_+ = 3 + \sqrt{5}$. Chacune donne un vecteur propre non nul ${}^t(2, \lambda - 4)$, ce qui vérifie leur présence effective. Comme $\sqrt{5} < 3$, les deux valeurs propres sont strictement positives.

Le critère hessien donne donc un minimum local strict en $(18, -12)$.

Méthode 2 — Forme quadratique de la hessienne.

Pour $Z = {}^t(u, v)$, on calcule :

$${}^tZHZ = 4u^2 + 4uv + 2v^2 = 2u^2 + 2(u + v)^2.$$

Cette quantité est strictement positive lorsque $Z \neq 0$: si les deux carrés sont nuls, alors $u = 0$ puis $v = 0$. La hessienne est donc définie positive. Comme elle est réelle symétrique, pour tout vecteur propre non nul, le quotient ${}^tZHZ/({}^tZZ)$ est la valeur propre associée ; toutes ses valeurs propres sont donc strictement positives. On retrouve le minimum local strict.

La première méthode fournit le spectre exact ; la seconde suffit lorsqu'on cherche seulement le signe des valeurs propres.

Enfin :

$$m = f(18, -12) = 720 - 864 + 144 + 648 - 432 + 144 = 360.$$

7) Caractère global du minimum.

Méthode 1 — Critère global par la hessienne.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe. La fonction f y est de classe C^2 et sa hessienne a partout les deux valeurs propres strictement positives déterminées en 6). Le critère du programme pour les fonctions convexes assure qu'un point critique est un minimum global. Ainsi $(18, -12)$ réalise le minimum global 360.

Méthode 2 — Différence explicite avec la valeur minimale.

Posons $h = x - 18$ et $k = y + 12$. En remplaçant dans l'expression de 4), les termes linéaires s'annulent et :

$$f(x, y) - 360 = 2h^2 + 2hk + k^2 = h^2 + (h + k)^2.$$

Cette expression est positive ou nulle pour tout (x, y) . Elle est nulle seulement si $h = 0$ et $h + k = 0$, donc si $x = 18$ et $y = -12$.

Le minimum est donc global et atteint en un unique point. Cette dernière identité donne directement la minoration sur tout le plan, tandis que la première méthode utilise le signe uniforme de la hessienne.

Problème

Question préliminaire

1) a) Continuité de $t \mapsto \max(x, t)$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$. L'identité $\max(x, t) = \frac{x + t + |x - t|}{2}$ exprime cette fonction à l'aide de sommes et de compositions de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, son intégrale sur le segment $[0, 1]$ existe pour tout réel x .

1) b) Calcul de l'intégrale.

On distingue la position de x par rapport au segment d'intégration.

Si $x \leq 0$, alors $t \geq x$ pour tout $t \in [0, 1]$; par conséquent :

$$\int_0^1 \max(x, t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Si $0 < x < 1$, le maximum vaut x pour $0 \leq t \leq x$, puis t pour $x \leq t \leq 1$. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \max(x, t) dt = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}.$$

Si $x \geq 1$, le maximum vaut x sur tout le segment, et l'intégrale vaut x .

Notons désormais $g(x) = \int_0^1 \max(x, t) dt$. On a ainsi :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1, \\ x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les expressions se raccordent : $g(0) = 1/2$ et $g(1) = 1$. Pour la suite du problème, on a $Y = g(X)$.

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) Cas géométrique.

Une variable de loi géométrique, avec la convention du sujet, est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On a donc $X \geq 1$, et la troisième branche de g donne $Y = g(X) = X$.

La transformation conserve ainsi la loi géométrique dans ce cas.

3) a) Probabilité de $X = 0$.

Les valeurs possibles sont -1 , zéro et un. Les événements correspondants forment un système complet. Donc :

$$P(X = 0) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3) b) Loi et moments de Y .

La formule préliminaire donne $g(-1) = g(0) = 1/2$ et $g(1) = 1$. Ces trois valeurs de X ont une probabilité strictement positive, donc $Y(\Omega) = \{1/2, 1\}$ et :

$$P(Y = 1/2) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}, \quad P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

Comme Y est bornée, son espérance et sa variance existent.

Méthode 1 — Calcul des moments par la loi.

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8},$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}.$$

Par Koenig-Huygens :

$$V(Y) = \frac{7}{16} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{28 - 25}{64} = \frac{3}{64}.$$

Méthode 2 — Transformation affine d'une Bernoulli.

Posons $B = \mathbf{1}_{\{X=1\}}$. Cette variable suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/4$, et

$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}B$. Les formules de la Bernoulli et des transformations affines donnent :

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8},$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}V(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

La première méthode s'applique à toute loi finie ; la seconde exploite le fait qu'une variable à deux valeurs est une transformation affine d'une Bernoulli.

3) c) Simulation.

Code adapté en Python. On utilise une uniforme sur quatre entiers et on attribue trois issues à la valeur $1/2$, puis la dernière à la valeur un.

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_discrete():
    u = rd.randint(0, 4)
    if u < 3:
        y = 0.5
    else:
        y = 1.0
    return y
```

La condition $u < 3$ est vraie pour zéro, un et deux, soit avec probabilité $3/4$. Dans l'autre cas, la sortie vaut un avec probabilité $1/4$. Le code simule donc exactement la loi obtenue en 3)b).

Code exécuté : les sorties contrôlées appartiennent à $\{1/2, 1\}$; les fréquences observées sont proches de $3/4$ et $1/4$. Cette observation complète la lecture du code, sans remplacer la preuve de ses probabilités.

4) a) Loi de Y lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $X = 0$, on a $Y = 1/2$. Pour $X = k \geq 1$, on a $Y = k$. Comme $\lambda > 0$, chaque valeur de la loi de Poisson a une probabilité strictement positive, donc :

$$Y(\Omega) = \{1/2\} \cup \mathbb{N}^*.$$

La loi est :

$$P(Y = 1/2) = P(X = 0) = e^{-\lambda},$$

$$\forall k \geq 1, \quad P(Y = k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ces probabilités somment à un, car la transformation remplace seulement la valeur zéro de X par $1/2$.

4) b) Espérance et variance de Y .

Avant les calculs, on vérifie l'existence des moments : $0 \leq Y \leq X + 1/2$, et $(X + 1/2)^2$ a une espérance finie puisque la loi de Poisson possède un moment d'ordre deux. Ainsi Y possède une espérance et une variance finies.

Méthode 1 — À partir de la loi de 4)a).

La loi de Poisson possède $E(X) = \lambda$ et $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Les termes correspondant à $X = 0$ n'interviennent pas dans ces deux moments. La loi de Y donne donc :

$$E(Y) = \frac{1}{2}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda + \frac{1}{2}e^{-\lambda},$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{4}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}e^{-\lambda}.$$

En notant $a = e^{-\lambda}$, la formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(Y) = \lambda^2 + \lambda + \frac{a}{4} - \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 = \lambda - \lambda a + \frac{a}{4} - \frac{a^2}{4} = (1 - a) \left(\lambda + \frac{a}{4}\right).$$

Ainsi :

$$E(Y) = \lambda + \frac{1}{2}e^{-\lambda}, \quad V(Y) = (1 - e^{-\lambda}) \left(\lambda + \frac{1}{4}e^{-\lambda}\right).$$

Méthode 2 — Correction par une indicatrice.

Posons $B = \mathbf{1}_{\{X=0\}}$. On a $Y = X + B/2$, et B suit la loi de Bernoulli de paramètre $a = e^{-\lambda}$. L'espérance est donc $E(Y) = \lambda + a/2$.

Les variables X et B ne sont pas indépendantes. On calcule leur covariance en utilisant $XB = 0$:

$$\text{Cov}(X, B) = E(XB) - E(X)E(B) = 0 - \lambda a = -\lambda a.$$

La formule de la variance d'une somme donne alors :

$$V(Y) = V(X) + \frac{1}{4}V(B) + \text{Cov}(X, B) = \lambda + \frac{1}{4}a(1-a) - \lambda a = (1-a) \left(\lambda + \frac{a}{4} \right).$$

La première méthode suit la loi de la variable transformée ; la seconde exprime le changement de valeur en zéro par une indicatrice et montre pourquoi la covariance doit être prise en compte.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

5) a) Cas uniforme : expression de Y .

Par hypothèse, $X(\Omega) = [0, 1[$. Pour $0 < X < 1$, la deuxième branche de g donne $Y = (X^2 + 1)/2$. Pour $X = 0$, la première branche donne $Y = 1/2$, ce qui est encore la même expression.

Ainsi, sur tout l'espace :

$$Y = \frac{X^2 + 1}{2}.$$

5) b) Ensemble des valeurs de Y .

La fonction $x \mapsto (x^2 + 1)/2$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$. Elle prend la valeur $1/2$ en zéro et tend vers un lorsque $x \rightarrow 1^-$, sans atteindre un sur cet intervalle.

Son image est donc $[1/2, 1[$. Comme toutes les valeurs de $[0, 1[$ sont atteintes par X , on a $Y(\Omega) = [1/2, 1[$.

5) c) Fonction de répartition.

Pour $x \in [1/2, 1[$, on a $2x - 1 \in [0, 1[$. Comme $X \geq 0$, l'événement se transforme ainsi :

$$\left(\frac{X^2 + 1}{2} \leq x \right) = (X^2 \leq 2x - 1) = (X \leq \sqrt{2x - 1}).$$

La fonction de répartition de l'uniforme vaut son argument sur $[0, 1]$. Par conséquent :

$$F_Y(x) = \sqrt{2x - 1} \quad \text{pour } x \in [1/2, 1[.$$

En complétant avec les valeurs hors de l'image :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ \sqrt{2x - 1} & \text{si } 1/2 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

5) d) Existence d'une densité.

La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$: à $1/2$, la limite à droite vaut zéro, et à un, la limite à gauche vaut un. Elle est de classe C^1 en dehors des deux points $1/2$ et un.

Le critère du programme permet donc de conclure que Y est à densité. En dérivant sur $]1/2, 1[$, on obtient une densité :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2y - 1}} & \text{si } 1/2 < y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive. Son intégrale impropre en $1/2$ converge et vaut un, puisque, pour $a \in]1/2, 1[$:

$$\int_a^1 \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = [\sqrt{2y - 1}]_a^1 = 1 - \sqrt{2a - 1} \rightarrow 1.$$

La densité est non bornée près de $1/2$, mais cela n'empêche pas son intégrabilité.

5) e) Espérance.

Comme $1/2 \leq Y < 1$, son espérance existe.

Méthode 1 — Transformation de X .

La linéarité de l'espérance donne :

$$E(Y) = \frac{E(X^2) + 1}{2}.$$

Le transfert pour la loi uniforme fournit $E(X^2) = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$. On obtient donc

$$E(Y) = \frac{2}{3}.$$

Méthode 2 — Intégration avec la densité de Y .

La densité de 5)d) donne :

$$E(Y) = \int_{1/2}^1 \frac{y}{\sqrt{2y-1}} dy.$$

Avec le changement de variable affine $u = 2y - 1$, effectué sur des segments intérieurs puis à la limite :

$$E(Y) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{u+1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 u^{1/2} du + \int_0^1 u^{-1/2} du \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3}.$$

Les deux intégrales de puissance convergent, leurs exposants étant strictement

supérieurs à -1 . La première méthode exploite directement la transformation connue ; la seconde permet de contrôler la densité par un calcul de moment.

5) f) Simulation.

Code adapté en Python. Il suffit de transformer une uniforme sur $[0, 1[$ selon la formule de 5)a).

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_uniforme():
    return (rd.random() ** 2 + 1) / 2
```

Chaque appel de `rd.random()` simule X ; la sortie simule donc Y . Code exécuté : les valeurs contrôlées appartiennent à $[1/2, 1[$ et la moyenne observée est proche de $2/3$. L'égalité théorique de l'espérance a été démontrée en 5)e).

6) a) Cas exponentiel décalé.

Comme $X - 1$ suit une loi exponentielle, on a $X - 1 \geq 0$ presque sûrement, donc $X \geq 1$ presque sûrement. La troisième branche de g donne :

$$Y = X \quad \text{presque sûrement.}$$

En particulier, Y a la même loi que $1 + T$, où T suit la loi exponentielle de taux λ .

6) b) Moments de Y .

La loi exponentielle de taux $\lambda > 0$ possède l'espérance $1/\lambda$ et la variance $1/\lambda^2$. Les règles de transformation affine donnent donc, sans nouvelle intégration :

$$E(Y) = 1 + \frac{1}{\lambda}, \quad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ces moments existent car ceux de l'exponentielle sont finis.

6) c) Simulation par inversion.

Pour $U \in [0, 1[$, on a $1 - U \in]0, 1]$, de sorte que $W = -\ln(1 - U)/\lambda$ est bien défini et positif ou nul. Pour $w < 0$, $P(W \leq w) = 0$. Pour $w \geq 0$, comme $\lambda > 0$:

$$\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq w\right) = (\ln(1 - U) \geq -\lambda w) = (1 - U \geq e^{-\lambda w}) = (U \leq 1 - e^{-\lambda w}).$$

L'argument $1 - e^{-\lambda w}$ appartient à $[0, 1[$. La loi uniforme donne donc :

$$P(W \leq w) = 1 - e^{-\lambda w}.$$

C'est la fonction de répartition de l'exponentielle de taux λ . Ainsi W a bien cette loi. Comme Y a la loi de $1 + W$, le code demandé est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simul_Y_exponentielle(lam):
    return 1 - np.log(1 - rd.random()) / lam
```

Code adapté en Python. L'argument `lam` doit être strictement positif. La commande `rd.random()` ne renvoie pas un, ce qui permet de calculer le logarithme d'une quantité strictement positive.

Code exécuté pour plusieurs taux positifs. Les sorties sont au moins égales à un, et leurs moyennes observées sont proches de $1 + 1/\lambda$.

Une seconde manière de simuler la même loi utilise directement la commande `exponentielle` de NumPy :

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_exponentielle_directe(lam):
    return 1 + rd.exponential(scale=1 / lam)
```

Cette commande attend l'échelle, égale à l'inverse du taux. Ce second code a également été exécuté ; il simule la même loi. Le premier code illustre la méthode d'inversion demandée.

7) a) Valeurs possibles de Y dans le cas normal.

La fonction g vaut $1/2$ sur $] -\infty, 0]$, prend toutes les valeurs de $]1/2, 1[$ lorsque son argument parcourt $]0, 1[$, et vaut son argument sur $[1, +\infty[$. Son image sur $\mathbb{R}$ est donc $[1/2, +\infty[$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on obtient $Y(\Omega) = [1/2, +\infty[$.

7) b) Masse en $1/2$.

On a $g(x) = 1/2$ exactement lorsque $x \leq 0$; pour $x > 0$, la valeur est strictement supérieure à $1/2$. Ainsi :

$$P(Y = 1/2) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

par symétrie de la loi normale centrée réduite.

7) c) Fonction de répartition par probabilités totales.

On utilise le système complet d'événements demandé : $A = (X \leq 0)$, $B = (0 < X \leq 1)$ et $C = (X > 1)$. Leurs probabilités sont strictement positives. Pour tout réel x , la formule des probabilités totales, écrite avec les intersections, donne :

$$P(Y \leq x) = P((Y \leq x) \cap A) + P((Y \leq x) \cap B) + P((Y \leq x) \cap C).$$

Si $x < 1/2$, aucune des trois contributions n'est possible, puisque $Y \geq 1/2$. Donc $F_Y(x) = 0$.

Si $1/2 \leq x \leq 1$, la contribution de A vaut $P(A) = 1/2$. Sur B , on a $Y = (X^2 + 1)/2$, et l'inégalité équivaut à $0 < X \leq \sqrt{2x-1}$. La contribution de B vaut donc $\Phi(\sqrt{2x-1}) - 1/2$. Sur C , on a $Y = X > 1$, donc la contribution est nulle. Par addition :

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2} = \Phi(\sqrt{2x-1}).$$

Ce calcul inclut $x = 1/2$, où l'événement associé à B est vide, et $x = 1$, où tout B contribue.

Si $x > 1$, les événements A et B contribuent entièrement, pour une probabilité totale $P(X \leq 1) = \Phi(1)$. La contribution de C est $P(1 < X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(1)$. Ainsi $F_Y(x) = \Phi(x)$.

On a finalement :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Les branches se raccordent en un, mais la fonction présente un saut de $1/2$ en $1/2$, en accord avec 7)b).

7) d) Nature de la loi.

Une variable à densité ne possède aucun atome : la probabilité de prendre une valeur fixée est nulle. Or $P(Y = 1/2) = 1/2$. Donc Y n'est pas à densité.

Elle n'est pas non plus discrète. Pour tout réel $y \neq 1/2$, on a $P(Y = y) = 0$: si $1/2 < y < 1$, l'événement correspond à $X = \sqrt{2y-1}$; si $y \geq 1$, il correspond à $X = y$; si $y < 1/2$, il est impossible. Les probabilités de ces valeurs ponctuelles de X sont nulles, car X est à densité.

Pour tout ensemble fini ou dénombrable $D \subset \mathbb{R}$, l'additivité dénombrable donne donc $P(Y \in D) \leq 1/2$, le seul point pouvant contribuer étant $1/2$. Aucun ensemble dénombrable ne porte la loi entière : Y n'est pas discrète.

Conclusion

la loi est mixte, avec une masse $1/2$ en $1/2$ et une partie continue de probabilité totale $1/2$ sur $]1/2, +\infty[$.

7) e) Approximation normale et simulation.

Code adapté en Python. La consigne est rectifiée pour préciser que la simulation est approximative : la somme de 48 uniformes ne suit pas exactement la loi normale. Le paramètre inutilisé du code original est supprimé, et la variable locale correspondant à la normale approchée est explicitée.

Les variables U_k sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Elles ont une espérance $1/2$ et une variance $1/12$, finie et strictement positive. Le théorème limite central donne :

$$\frac{\sum_{k=1}^N U_k - N/2}{\sqrt{N/12}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (N \rightarrow +\infty).$$

En prenant $N = 48$, la quantité centrée réduite devient :

$$\frac{\sum_{k=1}^{48} U_k - 24}{\sqrt{48/12}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{48} U_k - 24 \right).$$

On utilise donc la normale comme approximation de sa loi. Cette variable a exactement une espérance nulle et une variance égale à un ; le théorème limite central justifie l'approximation, sans fournir ici de borne d'erreur pour l'effectif fixé à 48.

La fonction g établie à la question préliminaire est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en zéro et un. La composition par une fonction continue préserve la convergence en loi : les variables obtenues en lui appliquant les sommes centrées réduites convergent en loi vers $g(X) = Y$. Cette propriété explique aussi l'utilisation de la transformation g après l'approximation normale.

Le code complété est :

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_normale_approx():
    aux = 0
    for k in range(1, 49):
        aux = aux + rd.random()
    x = (aux - 24) / 2
    if x <= 0:
        y = 0.5
    else:
        if x <= 1:
            y = (x ** 2 + 1) / 2
        else:
            y = x
    return y
```

La boucle effectue exactement 48 tirages, car la borne supérieure de range est exclue. La variable aux contient leur somme ; x est la normale approchée, et les trois branches appliquent exactement g .

Code exécuté : toutes les sorties contrôlées sont au moins égales à $1/2$, et la fréquence de la valeur $1/2$ est proche de $1/2$. La symétrie de la somme centrée, dont la loi est continue, donne d'ailleurs une probabilité exactement égale à $1/2$ pour la première branche dans le modèle mathématique de la simulation.

Il reste une approximation pour les autres valeurs : la somme centrée réduite appartient à $[-12, 12]$, tandis qu'une normale peut dépasser douze. Le code ne simule donc pas

exactement toute la loi de Y .

Pour simuler directement la loi cible avec la commande normale usuelle, on peut utiliser cette seconde fonction :

Python

```
import numpy.random as rd

def simul_Y_normale_directe():
    x = rd.normal(0, 1)
    if x <= 0:
        return 0.5
    elif x <= 1:
        return (x ** 2 + 1) / 2
    else:
        return x
```

Cette seconde fonction a également été exécutée. Elle simule directement la transformation d'une normale centrée réduite, au sens des générateurs numériques utilisés. Elle complète la méthode d'approximation imposée par la question, sans confondre les deux objectifs.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 1)a) : remplacement de la notation gamma historique à deux paramètres par la loi gamma de taux un de $U/2$ et $V/2$, et explicitation de la densité de U et V utilisée ensuite. Les lois mathématiques sont inchangées ; le reste de l'exercice est résolu par les transformations affines et la stabilité gamma du référentiel.

Exercice 3, question 6) : emploi de la hessienne et des signes de ses valeurs propres, déterminées sans déterminant, pour prouver le minimum local. La demande originale est conservée ; la méthode est conforme au référentiel actuel.

Problème, questions 3)c), 5)f), 6)c) et 7)e) : codes adaptés en Python, avec imports, bornes des tirages et boucles explicites, et blancs conservés dans le sujet. La simulation par inversion de 6)c) est conservée.

Problème, question 7)e) : rectification de la consigne afin de parler d'une simulation approximative à partir de 48 uniformes ; suppression du paramètre inutilisé et déclaration explicite de la variable locale dans le code Python. Le théorème limite central ne donne pas une loi normale exacte pour une somme finie.