



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2013

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1a) Pour $n \geq 1$, on calcule :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{a_n}.$$

La somme partielle est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N 1/a_n = 1 - 1/(N+1).$$

Elle tend vers 1 quand $N \rightarrow +\infty$. Ainsi la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = 1.$$

1b) On calcule d'abord la somme du dénominateur, sans supposer connue une formule de somme des carrés. Pour $k \geq 1$:

$$k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)}{3}.$$

En sommant cette identité télescopique pour $k = 1, \dots, n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ce dénominateur est strictement positif. Par conséquent, $u_n = 3/[(n+1)(n+2)]$ pour tout $n \geq 1$.

1c) On décompose $u_n = 3[1/(n+1) - 1/(n+2)]$. La somme partielle vaut donc :

$$\sum_{n=1}^N u_n = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right).$$

Elle tend vers $3/2$. La série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 3/2 \leq 2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n.$$

L'inégalité demandée est vérifiée dans cet exemple.

2a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. On initialise un produit à 1, puis on le multiplie par les entiers de 1 à n inclus.

Python

```
def fact(n):
    resultat = 1
    for k in range(1, n + 1):
        resultat = resultat * k
    return resultat
```

Après l'itération de rang k , `resultat` vaut $k!$. La borne supérieure de range est exclue, ce qui explique $n + 1$. La fonction renvoie donc $n!$. Elle est aussi correcte pour $n = 0$: la boucle est vide et elle renvoie $1 = 0!$.

La fonction a été exécutée et vérifiée pour $n = 0, 1, 5, 10$; les résultats sont respectivement 1, 1, 120, 3628800.

2b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Le dénominateur de u_n est $1! + 2! + \dots + n!$; on le calcule avec la fonction demandée, puis on divise n par cette somme.

Python

```
def fact(n):
    resultat = 1
    for k in range(1, n + 1):
        resultat = resultat * k
    return resultat
```

```
n = int(input("Entrer un entier strictement positif n : "))
S = 0
for k in range(1, n + 1):
    S = S + fact(k)
u = n / S
print(u)
```

Après l'itération de rang k , S vaut

$$\sum_{j=1}^k j!.$$

Pour $n \geq 1$, cette somme est strictement positive, donc la division finale est légitime. La sortie est une valeur numérique de u_n .

Le programme a été exécuté pour $n = 1, 2, 5$: il donne respectivement $1, 2/3$ et $5/153$ sous forme décimale. Ces résultats concordent avec les sommes exactes des factorielles.

2c) Méthode 1 — Utiliser la série exponentielle.

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n!$$

est la série exponentielle au point 1, donc elle converge et vaut e . Supprimer le terme de rang 0 donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

Méthode 2 — Comparer à une série géométrique.

Pour $n \geq 1$, tous les facteurs de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ à partir du deuxième sont supérieurs ou égaux à 2. Ainsi $n! \geq 2^{n-1}$, y compris pour $n = 1$ avec un produit vide.

Donc $0 < 1/n! \leq 1/2^{n-1}$. La série géométrique de raison $1/2$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} 1/n!$$

converge.

La première méthode donne aussi la somme exacte ; la seconde établit la convergence par une simple majoration.

2d) Comme

$$\sum_{k=1}^n k! \geq n! > 0,$$

on a :

$$u_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n k!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Cette majoration est valable pour tout $n \geq 1$ et devient une égalité pour $n = 1$.

2e) La série des majorants converge, puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n-1)! = \sum_{j=0}^{+\infty} 1/j! = e.$$

Les u_n étant positifs, la comparaison prouve la convergence de leur série et donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e.$$

La série exponentielle donne

$$e = 1 + 1 + \sum_{j=2}^{+\infty} 1/j! > 2.$$

Donc $e \leq 2(e - 1)$. En utilisant 2c :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e \leq 2(e - 1) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

L'inégalité est ainsi obtenue directement pour cet exemple, sans utiliser le résultat général qui reste à démontrer.

- 3) Pour un entier $n \geq 1$, considérons dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, les vecteurs $v = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $w = (1/\sqrt{a_1}, 2/\sqrt{a_2}, \dots, n/\sqrt{a_n})$. Ils sont bien définis car chaque $a_k > 0$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right).$$

C'est exactement l'inégalité demandée.

4a) Posons

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k > 0$$

et

$$B_n = \sum_{k=1}^n k^2 / a_k.$$

La formule de la somme arithmétique et la question 3 donnent $n^2(n+1)^2/4 \leq A_n B_n$.

Ainsi :

$$\frac{1}{A_n} \leq \frac{4B_n}{n^2(n+1)^2}.$$

On multiplie par $2n+1 > 0$. Or $1/n^2 - 1/(n+1)^2 = (2n+1)/[n^2(n+1)^2]$. Par conséquent :

$$\frac{2n+1}{A_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

4b) On somme la majoration de 4a de $n = 1$ à N . Toutes les sommes sont finies, donc on peut changer leur ordre sans hypothèse de convergence :

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{A_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

La somme intérieure est télescopique et vaut $1/k^2 - 1/(N+1)^2$. Il vient :

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{A_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k} \left(1 - \frac{k^2}{(N+1)^2} \right) \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

La dernière majoration utilise $0 \leq 1 - k^2/(N+1)^2 \leq 1$ et $1/a_k > 0$.

4c) Notons

$$L = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/a_k,$$

qui est fini par hypothèse, et $v_n = (2n + 1)/A_n$. Les v_n sont positifs, donc les sommes partielles de leur série sont croissantes. La question 4b les majore par $4L$.

Le théorème de la limite monotone prouve que

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

converge et que sa somme est au plus $4L$. En outre, pour $n \geq 1$:

$$0 < u_n = \frac{n}{2n+1} v_n \leq \frac{1}{2} v_n.$$

La comparaison donne la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} u_n,$$

et la majoration des sommes partielles puis le passage à la limite donnent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq 2L = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Le résultat général annoncé est démontré.

Exercice 2

1) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice donne $f(x, y, z) = (y + 2z, 3z, 0)$. L'image est donc contenue dans le plan $H = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Réciproquement, pour $(a, b, 0) \in H$, on peut choisir $z = b/3$ et $y = a - 2b/3$, avec x quelconque. On obtient $f(x, y, z) = (a, b, 0)$. Ainsi $\text{Im}(f) = H$, qui a pour base $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et pour dimension 2 : c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, pour $v = (a, b, 0) \in H$, $f(v) = (b, 0, 0) \in H$. Donc cet hyperplan est stable par f . Plus généralement, l'image de tout endomorphisme est stable par cet endomorphisme, puisque $f(f(w))$ appartient toujours à son image.

2a) Méthode 1 — Résoudre l'équation de vecteur propre.

Posons $w = (1, 1, 1)$. Pour $v = (x, y, z)$ et $q = x + y + z$, on a $f(v) = v + qw$. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé à une valeur propre réelle μ . Alors $(\mu - 1)v = qw$.

Si $q = 0$, cette relation impose $\mu = 1$. Réciproquement, tout vecteur non nul du plan $H = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ vérifie $f(v) = v$, donc 1 est valeur propre et son espace propre est H .

Si $q \neq 0$, on somme les trois coordonnées de $(\mu - 1)v = qw$. On obtient $(\mu - 1)q = 3q$, puis $\mu = 4$. L'équation donne alors $v = (q/3)w$. Réciproquement, $f(w) = 4w$, donc 4 est valeur propre et son espace propre est $\text{Vect}(w)$.

Les valeurs propres sont donc exactement 1 et 4, avec $E_1(f) = H$ et $E_4(f) = \text{Vect}(w)$.

Méthode 2 — Construire une base adaptée.

Les vecteurs $h_1 = (1, -1, 0)$ et $h_2 = (1, 0, -1)$ sont libres et engendrent H , car tout $(x, y, z) \in H$ s'écrit $-yh_1 - zh_2$. On a $f(h_1) = h_1$ et $f(h_2) = h_2$.

Le vecteur w n'appartient pas à H puisque la somme de ses coordonnées vaut 3. La famille (h_1, h_2, w) est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(w) = 4w$, la matrice de f dans cette base est $\text{diag}(1, 1, 4)$.

Les valeurs propres d'une matrice diagonale étant ses coefficients diagonaux, on retrouve exactement 1 et 4. Cette approche met directement en évidence la décomposition en un plan où f est l'identité et une droite où f multiplie par 4.

2b) La question 2a donne $\text{Ker}(f - \text{Id}) = H = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$. Ce plan a pour base (h_1, h_2) et pour dimension 2, donc c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Si $v \in H$, alors $f(v) = v \in H$. Ainsi H est stable par f .

3a) Notons A la matrice de f dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, et X, Y les colonnes de coordonnées de x, y . Dans une base orthonormale, le produit scalaire est le produit matriciel ${}^tXY$.

La matrice de f^* est ${}^tA$. Les règles de transposition donnent :

$$\langle f(x), y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Cette identité est valable pour tous $x, y \in E$. L'orthonormalité de la base est essentielle pour identifier ainsi le produit scalaire au produit des colonnes de coordonnées.

3b) L'existence d'un endomorphisme satisfaisant l'identité a été vérifiée en 3a. Pour l'unicité, supposons qu'un endomorphisme h vérifie aussi $\langle f(x), y \rangle = \langle x, h(y) \rangle$ pour tous x, y .

En soustrayant l'identité de 3a, on obtient $\langle x, h(y) - f^*(y) \rangle = 0$ pour tous $x, y \in E$. Pour un y fixé, prenons $x = h(y) - f^*(y)$. Alors $\|h(y) - f^*(y)\|^2 = 0$, donc $h(y) = f^*(y)$.

Cela vaut pour tout y , d'où $h = f^*$. L'endomorphisme f^* est donc unique.

4a) On utilise l'égalité du rang d'une matrice et de celui de sa transposée, résultat du programme. Puisque λ est valeur propre de f , $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0_E\}$. Par le théorème du rang :

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Or ${}^tA - \lambda I_n = {}^t(A - \lambda I_n)$ a le même rang. Il a donc un noyau non nul. C'est la matrice de $f^* - \lambda \text{Id}$, ce qui prouve que λ est valeur propre de f^* .

La preuve utilise les rangs et les noyaux, sans calculer de déterminant.

4b) Un vecteur propre u est non nul. L'espace $\text{Vect}(u)$ a donc dimension 1, et son supplémentaire orthogonal $H = \text{Vect}(u)^\perp$ a dimension $n - 1$: c'est un hyperplan.

Pour $v \in H$, on a $\langle v, u \rangle = 0$. En utilisant 3a et $f^*(u) = \lambda u$:

$$\langle f(v), u \rangle = \langle v, f^*(u) \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0.$$

Donc $f(v) \in H$, ce qui prouve la stabilité de H par f . L'existence de l'hyperplan stable annoncé est ainsi établie.

Exercice 3

1) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1 . Les intégrales aux deux extrémités infinies convergent par comparaison avec l'intégrale de référence de $1/x^2$.

La primitive $-1/(2x)$ donne :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Sur $] -1, 1[$, f est nulle. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Les conditions de positivité, de régularité par morceaux et de normalisation sont satisfaites : f est une densité de probabilité.

2) Pour $x \leq -1$, l'intégration de la densité donne $F(x) = \int_{-\infty}^x 1/(2t^2) dt = -1/(2x)$.

Pour $-1 < x < 1$, aucune masse supplémentaire n'est accumulée, donc $F(x) = 1/2$. Pour $x \geq 1$, on ajoute l'intégrale entre 1 et x :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x}.$$

On obtient donc :

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Les valeurs des expressions coïncident aux raccords : $F(-1) = F(1) = 1/2$.

3) Comme $n > 0$, $\{Y_n \leq x\} = \{S_n \leq nx\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq nx\}$. Par indépendance mutuelle des X_k :

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq nx) = F(nx)^n.$$

En utilisant la formule de F , il vient :

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \leq -1/n, \\ 2^{-n} & \text{si } -1/n < x < 1/n, \\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \geq 1/n. \end{cases}$$

La division par x ne concerne que les deux intervalles où $x \neq 0$. Aux deux bornes $-1/n$ et $1/n$, les expressions extérieures valent 2^{-n} , ce qui assure la cohérence de la formule.

4a) Pour $x \leq 0$, on a $nx \leq 0$. La fonction F étant croissante, $0 \leq F(nx) \leq F(0) = 1/2$.

On élève à la puissance entière n :

$$0 \leq G_n(x) = F(nx)^n \leq 2^{-n}.$$

La majoration demandée est donc valable pour tout $x \leq 0$.

4b) Fixons $x > 0$. On choisit $n_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$. Cet entier est strictement positif et vérifie $n_0 > 1/x$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $n > 1/x$, donc $x > 1/n$.

La troisième branche de la formule de 3 s'applique alors, d'où :

$$\forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n.$$

Le rang n_0 dépend du réel x fixé, ce qui correspond exactement à l'ordre des quantificateurs de l'énoncé.

5a) Si $x \leq 0$, la majoration de 4a et $2^{-n} \rightarrow 0$ donnent $G_n(x) \rightarrow 0$ par encadrement.

Si $x > 0$, on utilise l'expression de 4b pour les rangs suffisamment grands. Posons $h_n = 1/(2nx)$. Alors $h_n \rightarrow 0^+$, et la base $1 - h_n$ est strictement positive aux rangs considérés. Le développement limité usuel du logarithme à l'origine donne $\ln(1 - h)/(-h) \rightarrow 1$ lorsque $h \rightarrow 0$. Donc :

$$n \ln(1 - h_n) = -\frac{1}{2x} \frac{\ln(1 - h_n)}{-h_n} \rightarrow -\frac{1}{2x}.$$

Par continuité de l'exponentielle, $G_n(x) = \exp(n \ln(1 - h_n)) \rightarrow e^{-1/(2x)}$.

Ainsi, pour tout réel x :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-1/(2x)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

5b) La fonction G est continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $e^{-1/(2x)} \rightarrow 0$, donc elle est aussi continue en 0. Elle est croissante, car pour $x > 0$:

$$G'(x) = \frac{1}{2x^2} e^{-1/(2x)} > 0.$$

Ses limites sont 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Pour établir explicitement qu'elle correspond à une loi à densité, définissons :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2x^2} e^{-1/(2x)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est positive et continue sur les deux intervalles ouverts, avec au plus une exception en 0. Pour $0 < a < b$, le théorème fondamental de l'intégration donne

$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$. En passant à la limite quand $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow +\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale impropre et sa valeur 1.

Pour $x > 0$, le même calcul avec borne supérieure x donne $\int_{-\infty}^x g(t) dt = G(x)$; pour $x \leq 0$, cette égalité vaut aussi puisque les deux membres sont nuls. Ainsi g est une densité dont la fonction de répartition est précisément G .

5c) D'après 5a, $G_n(x) \rightarrow G(x)$ pour tout réel x . D'après 5b, G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y et est continue sur tout $\mathbb{R}$.

La définition de la convergence en loi est donc satisfaite à tous les points de continuité de la fonction de répartition limite. On conclut $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

6) Comme $G(0) = 0$, on a $P(Y \leq 0) = 0$, donc $Y > 0$ presque sûrement. On peut définir $W = 1/Y$ sur cet événement et lui attribuer une valeur arbitraire sur son complément, de probabilité nulle.

Pour $z \leq 0$, $P(W \leq z) = 0$. Pour $z > 0$, la décroissance de l'application inverse sur $]0, +\infty[$ donne :

$$\{W \leq z\} = \{Y \geq 1/z\} \text{ presque sûrement.}$$

Comme Y possède une densité, $P(Y = 1/z) = 0$. On en déduit :

$$P(W \leq z) = 1 - G(1/z) = 1 - e^{-z/2}.$$

Ainsi la fonction de répartition de W est 0 pour $z \leq 0$ et $1 - e^{-z/2}$ pour $z > 0$. C'est celle de la loi exponentielle de paramètre, ou taux, $1/2$. Donc $1/Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

Problème

Partie 1

1a) Les intégrales existent car les fonctions intégrées sont continues sur $[0, \pi/2]$. Pour $n = 0$, la puissance d'exposant nul désigne la fonction constante 1. On obtient :

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

1b) Pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$. Donc $(\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$ pour tout $n \geq 0$.

La croissance de l'intégrale donne $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante. L'inégalité est même stricte, puisque $(\sin t)^n - (\sin t)^{n+1}$ est continue et strictement positive sur $]0, \pi/2[$.

1c) Sur $[\pi/6, \pi/3]$, on a $\sin t \geq 1/2$. Par positivité de l'intégrale :

$$u_n \geq \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin t)^n \, dt \geq \frac{\pi}{6} 2^{-n} > 0.$$

Cette minoration inclut le rang 0. Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel positif ou nul. La valeur de cette limite sera précisée par l'équivalent final de la partie.

2a) Pour $n \geq 0$, on écrit $u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} \sin t \, dt$. On intègre par parties sur ce segment avec $U(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $V(t) = -\cos t$. Ces fonctions sont de classe C^1 , avec $U'(t) = (n+1)(\sin t)^n \cos t$ et $V'(t) = \sin t$.

Ainsi :

$$u_{n+2} = [-(\sin t)^{n+1} \cos t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t \, dt.$$

Le terme de bord est nul : à 0, $(\sin 0)^{n+1} = 0$, et à $\pi/2$, $\cos(\pi/2) = 0$. En utilisant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, on obtient $u_{n+2} = (n+1)(u_n - u_{n+2})$.

On regroupe les termes pour conclure $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

2b) On applique la récurrence de 2a aux indices pairs. Pour $n \geq 1$:

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2} = u_0 \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}.$$

Le produit des facteurs pairs est

$$\prod_{j=1}^n 2j = 2^n n!.$$

En séparant dans $(2n)!$ les facteurs pairs et impairs, le produit des facteurs impairs est

$$\prod_{j=1}^n (2j-1) = (2n)! / (2^n n!).$$

Donc :

$$u_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

Pour $n = 0$, la formule donne aussi $u_0 = \pi/2$, avec $0! = 1$ et les produits vides égaux à 1. Elle est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2c) Posons $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \geq 0$. Par la récurrence de 2a :

$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1} = v_n.$$

La suite (v_n) est constante et sa valeur initiale est $v_0 = u_1 u_0 = \pi/2$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \pi/2.$$

2d) Méthode 1 — Utiliser le produit constant.

La question 2c au rang $2n$ donne $(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} = \pi/2$. Comme $u_{2n} > 0$ d'après 1c, on peut diviser et utiliser 2b :

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Cette formule est valable pour tout $n \geq 0$, et redonne $u_1 = 1$ au rang 0.

Méthode 2 — Itérer directement la récurrence sur les indices impairs.

Pour $n \geq 1$, 2a donne $u_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_{2n-1}$. Par itération jusqu'à $u_1 = 1$:

$$u_{2n+1} = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}.$$

Le numérateur vaut $2^n n!$. Le dénominateur est le produit des facteurs impairs de 1 à $2n+1$, le facteur 1 n'ayant aucun effet ; il vaut $(2n+1)!/(2^n n!)$. Le quotient est donc $(2^n n!)^2/(2n+1)!$. Pour $n = 0$, le produit vide vaut 1, conformément à u_1 .

La première méthode relie les termes pairs et impairs ; la seconde calcule chaque sous-suite directement à partir de sa valeur initiale.

3a) La positivité de u_n autorise la division dans la relation de 2a. On a :

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1.$$

3b) La décroissance et la positivité donnent $0 < u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$. En divisant par $u_n > 0$:

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

Les bornes tendent vers 1, donc le théorème d'encadrement prouve $u_{n+1}/u_n \rightarrow 1$.

3c) L'identité de 2c s'écrit $(n+1)u_n^2(u_{n+1}/u_n) = \pi/2$. Pour $n \geq 1$, on en déduit :

$$nu_n^2 = \frac{n}{n+1} \frac{u_n}{u_{n+1}} \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Comme tous les termes sont positifs, on peut prendre la racine carrée : $\sqrt{n} u_n \rightarrow \sqrt{\pi/2}$. Cela équivaut à :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

En particulier, la limite de (u_n) évoquée en 1c est 0.

Partie 2

1) Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-tx}/\sqrt{1-t^2}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$. Les seuls problèmes de convergence possibles se situent aux extrémités.

Lorsque $t \rightarrow 1^-$, $1-t^2 = (1-t)(1+t)$ et $1+t \rightarrow 2$, donc :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Lorsque $t \rightarrow -1^+$, $1-t \rightarrow 2$, donc :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{e^x}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

Les deux intégrales de référence convergent au voisinage de leur singularité, car l'exposant $1/2$ est strictement inférieur à 1. Par équivalence de fonctions positives, les deux intégrales impropres définissant $I(x)$ convergent. Ainsi $I(x)$ existe pour tout réel x .

2a) Pour $x > 0$ et $0 \leq t < 1$, on a $0 < e^{-tx} \leq 1$ et $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t} \geq \sqrt{1-t}$.

Donc :

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{2}{\pi}.$$

Les comparaisons peuvent d'abord être effectuées sur $[0, b]$ pour $b < 1$, puis prolongées à la borne impropre puisque les intégrales convergent. La constante $M = 2/\pi$, indépendante de x , convient.

2b) Méthode 1 — Comparer des quantités positives par leurs carrés.

Si $0 \leq u \leq 1/2$, alors $0 < 1 - u \leq 1$, donc $1/\sqrt{1-u} \geq 1$.

Pour la majoration, les quantités sont positives. Elle équivaut donc à $1 \leq (1+u)^2(1-u)$.

Or :

$$(1+u)^2(1-u) - 1 = u - u^2 - u^3 = u(1-u-u^2).$$

Sur l'intervalle considéré, $1-u-u^2 \geq 1-1/2-1/4 = 1/4 > 0$. Le produit est donc positif ou nul, ce qui prouve $1/\sqrt{1-u} \leq 1+u$.

Méthode 2 — Utiliser la concavité de la différence.

Posons $h(u) = 1+u - (1-u)^{-1/2}$ sur $[0, 1/2]$. Cette fonction est de classe C^2 sur un ouvert contenant le segment, et $h''(u) = -\frac{3}{4}(1-u)^{-5/2} < 0$. Elle est donc concave.

On a $h(0) = 0$ et $h(1/2) = 3/2 - \sqrt{2} > 0$, puisque $9/4 > 2$. Une fonction concave est au-dessus de la corde joignant deux points de son graphe. Pour $u \in [0, 1/2]$:

$$h(u) \geq (1-2u)h(0) + 2uh(1/2) \geq 0.$$

Cela prouve la même majoration. La minoration par 1 reste celle du début de la première méthode. L'approche algébrique est la plus courte ; celle par concavité est utile lorsque la différence n'admet pas de factorisation simple.

3a) Considérons une variable normale T centrée de variance $1/2$. Sa densité est

$$t \mapsto e^{-t^2}/\sqrt{\pi}.$$

La normalisation de cette densité et la parité de e^{-t^2} donnent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La variable T a un moment d'ordre 2 fini, avec $E(T^2) = V(T) = 1/2$. Par transfert :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

L'intégrande est paire et positive, donc les deux moitiés de cette intégrale sont égales.

On conclut :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

La normalisation et l'existence du moment d'ordre 2 de la loi normale justifient en même temps la convergence des deux intégrales.

3b) Pour $x > 0$ fixé, l'intégrale $A(x) = \int_0^1 e^{-tx} / \sqrt{t} dt$ converge à l'origine par comparaison avec $t^{-1/2}$, car $e^{-tx} \leq 1$.

On applique le changement de variable indiqué $u = \sqrt{tx}$, soit $t = u^2/x$ et $dt = 2u du/x$, d'abord sur $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$. Il donne :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{\varepsilon x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du.$$

En faisant tendre ε vers 0^+ , les deux membres convergent, d'où

$$A(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, la borne $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ et l'intégrale tronquée tend vers $\sqrt{\pi}/2$ par 3a. Ainsi :

$$\frac{A(x)}{\sqrt{\pi/x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du \rightarrow 1.$$

On conclut $A(x) \sim \sqrt{\pi/x}$. Il n'y a pas d'échange d'une limite avec une intégrale : on utilise la définition de l'intégrale impropre à borne supérieure variable.

3c) La fonction $t \mapsto e^{-tx} \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$, donc son intégrale existe. Le même changement de variable $u = \sqrt{tx}$, appliqué d'abord avec borne inférieure positive puis prolongé à 0, donne :

$$B(x) = \int_0^1 e^{-tx} \sqrt{t} dt = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2} du.$$

Par 3a, l'intégrale tronquée tend vers $\sqrt{\pi}/4$. Ainsi :

$$B(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

4a) On pose $u = 1 + t$ sur un segment $[-1 + \varepsilon, 0]$, avec $0 < \varepsilon < 1$. Alors $t = u - 1$,
 $dt = du$, $e^{-tx} = e^x e^{-ux}$ et $1 - t^2 = u(2 - u) = 2u(1 - u/2)$.

On obtient :

$$\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-u/2)}} du.$$

L'intégrale de droite converge en 0 : pour $0 < u \leq 1$, on a $1 - u/2 \geq 1/2$ et $e^{-ux} \leq 1$, donc son intégrande est majorée par $\sqrt{2}/\sqrt{u}$, intégrable en 0. Celle de gauche converge par la question 1. Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ donne l'égalité demandée.

4b) On utilise la majoration de 2b avec l'argument $u/2 \in [0, 1/2]$. Pour $u \in]0, 1]$:

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}} \leq 1 + \frac{u}{2}.$$

En multipliant par $e^{-ux}/\sqrt{u} \geq 0$ et en intégrant, on encadre

$$J(x) = \int_0^1 e^{-ux}/\sqrt{u(1-u/2)} du :$$

$$A(x) \leq J(x) \leq A(x) + \frac{1}{2}B(x),$$

où A et B sont les intégrales calculées en 3b et 3c. Ces intégrales convergent, ce qui justifie le passage aux bornes impropres dans l'encadrement. On a $A(x) > 0$ et, par quotient des équivalents :

$$\frac{B(x)}{A(x)} \sim \frac{1}{2x} \rightarrow 0.$$

Ainsi $1 \leq J(x)/A(x) \leq 1 + B(x)/(2A(x))$, donc $J(x)/A(x) \rightarrow 1$. En utilisant 3b,
 $J(x) \sim \sqrt{\pi/x}$.

D'après 4a, la contribution de l'intervalle $[-1, 0]$ à $I(x)$ vaut $C(x) = e^x J(x)/(\pi\sqrt{2})$. Elle vérifie :

$$C(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

La contribution restante $R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-tx}/\sqrt{1-t^2} dt$ est comprise entre 0 et M par 2a.

Le terme $e^x/\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ par croissance comparée, donc $C(x) \rightarrow +\infty$ et $0 \leq R(x)/C(x) \leq M/C(x) \rightarrow 0$.

Comme $I(x) = C(x) + R(x)$, on en déduit $I(x)/C(x) \rightarrow 1$. Finalement :

$$I(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Partie 3

1) Les événements $\{X = k, Y = k\}$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et leur réunion est $\{X = Y\}$. Par additivité des probabilités et indépendance de X et Y :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

La série des probabilités converge, car ses sommes partielles sont croissantes et majorées par 1. La série obtenue après extraction du facteur strictement positif $e^{-2\lambda}$ converge donc également pour chaque $\lambda > 0$.

2a) Soient $t \in [-1, 1]$ et $x > 0$. On a $-tx \in [-x, x]$. Tout réel u compris entre 0 et $-tx$ appartient donc à $[-x, x]$, en particulier $u \leq x$. La croissance de l'exponentielle donne $e^u \leq e^x$.

La fonction exponentielle est de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées lui sont égales. Sa dérivée d'ordre $2n + 1$ est ainsi majorée en valeur absolue par e^x sur le segment joignant 0 à $-tx$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ fournit :

$$\left| e^{-tx} - \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-tx)^j}{j!} \right| \leq \frac{e^x |tx|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x x^{2n+1} |t|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Elle vaut aussi pour $t = 0$, où les deux membres sont nuls, et pour $n = 0$.

2b) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine nécessaire est indiqué dans le sujet.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq t < 1$, $0 \leq t^k \leq 1$, donc l'intégrale converge en 1 par comparaison avec $1/\sqrt{1-t^2}$, dont l'intégrabilité résulte de la partie 2, question 1, au point $x = 0$.

Pour $0 < \alpha < \pi/2$, on pose $t = \sin v$ sur $[0, \alpha]$. La fonction sinus y est de classe C^1 et strictement croissante, avec dérivée positive. On a $dt = \cos v \, dv$ et $\sqrt{1 - \sin^2 v} = \cos v > 0$. Ainsi :

$$\int_0^{\sin \alpha} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\alpha (\sin v)^k dv.$$

Quand $\alpha \rightarrow \pi/2$ par valeurs inférieures, $\sin \alpha \rightarrow 1$. Le membre de gauche tend vers l'intégrale impropre convergente, et celui de droite vers u_k , par continuité de l'intégrande sur le segment fermé. Donc :

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = u_k.$$

La substitution a été effectuée avant d'atteindre l'extrémité où la dérivée du sinus s'annule.

2c) Posons

$$T_{2n}(t) = \sum_{j=0}^{2n} (-tx)^j / j!.$$

On multiplie l'inégalité de 2a par $1/(\pi\sqrt{1-t^2})$ pour $-1 < t < 1$, puis on l'intègre.

Pour justifier cette étape aux bornes impropres, on travaille d'abord sur $[-b, b]$, avec $0 < b < 1$, puis on fait tendre b vers 1. Le noyau $1/\sqrt{1-t^2}$ est intégrable, et les fonctions e^{-tx} , $T_{2n}(t)$ et $|t|^{2n+1}$ sont bornées sur $[-1, 1]$. Toutes les intégrales concernées sont donc absolument convergentes ; les passages aux limites sont ceux de la définition des intégrales impropres.

L'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne :

$$\left| I(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \frac{e^x x^{2n+1}}{\pi(2n+1)!} \int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

La fonction intégrée à droite est paire. D'après 2b, son intégrale vaut $2u_{2n+1}$.

À gauche, on intègre la somme finie terme à terme. Les termes d'indice impair ont une intégrale nulle par imparité; pour l'indice $2k$, l'intégrale vaut $2u_{2k}$. Par la formule de la partie 1, question 2b :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} u_{2k} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

En réunissant ces calculs, on conclut :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1}e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}.$$

Seule une somme finie a été intégrée; aucun échange avec une série infinie n'a été utilisé.

2d) Fixons $x > 0$. La décroissance de (u_n) et $u_0 = \pi/2$ donnent $0 < u_{2n+1} \leq \pi/2$. La majoration de 2c implique donc :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

La série exponentielle

$$\sum_{m=0}^{+\infty} x^m / m!$$

converge pour le réel x fixé. Son terme général tend donc vers 0, et en particulier $x^{2n+1}/(2n+1)! \rightarrow 0$.

Le membre de droite tend vers 0. Les sommes partielles de la série de gauche convergent ainsi vers $I(x)$, ce qui établit, pour tout $x > 0$:

$$I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

L'égalité résulte d'une estimation explicite du reste, sans invoquer de théorie générale des séries entières.

3) La question 1 donne

$$P(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{2k} / (k!)^2.$$

En prenant $x = 2\lambda > 0$ dans 2d, on identifie cette somme à $I(2\lambda)$, car $(2\lambda)^{2k} / 2^{2k} = \lambda^{2k}$.
Donc :

$$P(X = Y) = e^{-2\lambda} I(2\lambda).$$

Lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, la partie 2, question 4b, donne $I(2\lambda) \sim e^{2\lambda} / \sqrt{4\pi\lambda}$. En multipliant le rapport d'équivalence par les facteurs exacts, on conclut :

$$P(X = Y) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.$$

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 2a et 2b : fonction et programme adaptés en Python. Le calcul de la factorielle, la somme du dénominateur et la saisie de l'entier sont conservés ; les commandes `input` et `int` sont expliquées dans le sujet.

- Problème, partie 3, 2b : ajout de l'indication $t = \sin v$ avec son intervalle d'utilisation, afin de fournir le changement de variable non affine nécessaire conformément au référentiel. La question, les intégrales et le résultat demandé sont conservés.