



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2012

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer A^2 et A^3 , puis déterminer un polynôme annulateur de f .

1) b) En déduire les valeurs propres de f .

1) c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3) b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^2 = f$. On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g , puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

- 4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$ est un entier naturel, et on désigne par α un réel non nul. On utilise la convention $h^0 = \text{Id}$.
- 4) a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$. Montrer que :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(h^{n-1}) \oplus \text{Ker}(h - \alpha \text{Id}).$$

- 4) b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(h^{n-1}) \oplus \text{Ker}(h - \alpha \text{Id})$, alors $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) , indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

- 1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.

- 1) b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$ la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x} & \text{si } z < 0, \\ \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

- 1) c) On pose $T = X_1/X_0$ et on admet que T est une variable aléatoire définie sur (Ω, P) . Le rapport est défini presque sûrement, car $P(X_0 = 0) = 0$; on peut poser $T = 0$ sur cet événement négligeable. Déterminer la fonction de répartition F_T de T .
- 2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T . On admet également que X est une variable aléatoire définie sur (Ω, P) . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- 3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur (Ω, P) .

- 3) a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

- 3) b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n .

- 3) c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :

$$\forall x < 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

Pour le calcul de l'intégrale obtenue par convolution, on pourra effectuer le changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda t}$, où t désigne la variable d'intégration sur $[0, +\infty[$.

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* : X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide, et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

4) a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul :

$$[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leq X_0].$$

4) b) Montrer que $[Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [Y_k \leq X_0]$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

4) c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont la même probabilité.

5) Informatique.

5) a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U , puis en déduire la loi suivie par V .

5) b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def z(lam=1.0)` : qui simule la loi de Z , avec le paramètre exponentiel $\lambda = \text{lam} > 0$. On pourra utiliser `np.random.random()` après `import numpy as np` pour obtenir une réalisation de la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1, e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E .

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le reste dans la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \quad \deg(f(P)) \leq 2.$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) a) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
- 2) b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
- 2) c) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.
- 3) a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\text{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id})$.
- 3) b) Montrer que f est diagonalisable.
- 4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^2 a_k b_k,$$

où $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

- 4) a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E .
- 4) b) Vérifier que $\text{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(f)$ dans E pour ce produit scalaire.
- 5) a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ .

5) b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, puis retrouver le résultat de la question 4) b).

Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell.$$

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k, \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i.$$

1) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i) x_i.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n y_k = T_n.$$

1) b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2) Dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2) a) On admet que, si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors pour tout entier naturel n non nul et tout $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

2) b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n k x_k \right)^{1/n}.$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.

2) c) Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.

2) d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + 1/n)^n \leq e$.

2) e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

3) b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^1 \ln x \, dx$ et en déduire que :

$$\forall n \geq 2, \quad -1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

3) c) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k/n),$$

puis établir que $(1/n!)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e/n$.

- 4) On admet que, si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre n sont équivalentes lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère la suite particulière $(x_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n(N) = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n x_k(N) \right)^{1/n}.$$

- 4) a) Écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$$

sous forme de sommes finies.

- 4) b) En déduire que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

- 5) Conclure que e est la plus petite des constantes réelles λ telles que, pour toute suite de réels positifs ou nuls dont la série converge,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$