



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2011

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E . On note Id l'identité de E .

Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{R}[X]$, on rappelle que $P(u) = a_0 \text{Id} + a_1u + \dots + a_pu^p$, où u^k est la composée de u avec lui-même k fois, et $u^0 = \text{Id}$ par convention.

Dans toute la suite, Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi $Q(X) = (X - 1)Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

1. Montrer que l'image de $u - \text{Id}$ est contenue dans $\text{Ker}(Q_1(u))$.
2. On note $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$.
 2. (a) Montrer que si $x \in E_1$, alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1)x$.
 2. (b) En déduire que $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.
 2. (c) En déduire, à l'aide du théorème du rang, que $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$.
3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u .
4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X - 1)(X + 1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u . On note E_1 l'espace propre associé à 1.

Montrer que, si $\dim E_1 \geq 2$, l'endomorphisme u est diagonalisable. On pourra distinguer les cas $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_1 = 3$.

Exercice 2

On considère un entier naturel $n \geq 2$. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à n , chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une succession de tirages simultanés de deux boules selon le protocole suivant :

- Si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne les remet pas dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.
- Si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
1. (b) Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de T_1 .
2. En Python, `np.random.randint(a, b)` renvoie un entier uniforme de a à $b - 1$, pour des entiers $a < b$. L'opérateur `//` est la division entière.

Pour simuler le tirage, les boules sont temporairement identifiées par $0, 1, \dots, 2n - 1$, les deux boules de la paire de numéro r ayant les identifiants $2r - 2$ et $2r - 1$. Le tirage de a , puis de b avec le décalage indiqué, sélectionne deux boules distinctes.

Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de T_1 :

Python

```
import numpy as np

n = int(input("Entrez n, avec n >= 2 : "))
t = 0
succes = False
while not succes:
    a = np.random.randint(0, 2 * n)
    b = np.random.randint(0, 2 * n - 1)
    if b >= a:
```

```

b = b + 1

t = t + 1

succes = ...

print(t)

```

3. On pose $X_1 = T_1$ et, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
3. (a) Que représente la variable X_i ?
3. (b) Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de X_i ainsi que son espérance.
3. (c) En déduire que T_n admet une espérance mathématique et que $E(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note S_n le nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.
4. (a) Calculer $P(S_n = 0)$.
4. (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$.
4. (c) Montrer que $P(S_n = n) = \frac{n! 2^n}{(2n)!}$.
5. Les conventions de simulation et les commandes Python sont celles de la question 2.
Lorsque l'urne contient m paires complètes, on réattribue temporairement à ses boules les identifiants $0, \dots, 2m - 1$, par paires consécutives.

Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :

Python

```

import numpy as np

n = int(input("Entrez n, avec n >= 2 : "))

m = n

```

```
z = 0
for k in range(n):
    a = np.random.randint(0, 2 * m)
    b = np.random.randint(0, 2 * m - 1)
    if b >= a:
        b = b + 1
    if a // 2 == b // 2:
        z = z + 1
    m = m - 1
print(z)
```

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que, pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est convergente.

On admet que l'application définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et P', Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation :

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$

2. (b) En déduire que, si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors $|P(0)| = \|P\|$.

3. On se propose de démontrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant les relations $(\mathcal{R})$ suivantes :

$$L_0 = 1, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg L_k = k, \quad L_k(0) = 1,$$

et $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) On suppose qu'il existe deux familles $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant $(\mathcal{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k = M_k$.

3. (b) On construit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ à partir de la base $(1, X, \dots, X^n)$ comme suit :

$$R_0 = 1, \quad P_0 = \frac{R_0}{\|R_0\|},$$

puis, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$R_k = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle X^k, P_j \rangle P_j, \quad P_k = \frac{R_k}{\|R_k\|}.$$

Justifier que les dénominateurs sont non nuls et que cette construction donne une famille orthonormale, avec $\deg P_k = k$.

3. (b) i. Justifier, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que $P_k(0) \neq 0$.
3. (b) ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant $(\mathcal{R})$.
3. (c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2 .

Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et, pour tout $n \geq 1$, la variable M_n définie par :

$$M_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On cherche des suites réelles $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, avec $a_n > 0$, telles que $((M_n - b_n)/a_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante. La fonction exponentielle sera indifféremment notée $x \mapsto e^x$ ou $\exp$.

Partie 1 — La loi exponentielle

Dans cette partie, la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$.
1. (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.
1. (b) Déterminer la fonction de répartition F_G de G .
2. (a) Donner, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition de M_n .
2. (b) Pour $n \geq 1$, on pose $U_n = \lambda M_n - \ln n$. Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 — La loi normale

Dans cette partie, la loi commune des X_k est la loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1 , donnée par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du$ est convergente et, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$P(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

1. (b) En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{P(X_1 > x)}{x^2} \leq P(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x},$$

puis que :

$$P(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq P(X_1 > x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

2. Soit $c > 0$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution notée x_n .

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $x_n^2 + 2 \ln x_n = 2 \ln n - \ln(2c^2\pi)$.

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4, montrer que $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \ln n}$.

En déduire que, pour $n \geq 2$, on peut écrire $x_n = \sqrt{2 \ln n} + \varepsilon_1(n)$, où $\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln n}} \rightarrow 0$.

6. (a) En utilisant la question 4, montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$2\sqrt{2\ln n} \varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

6. (b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \sim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(\ln n).$$

En déduire que :

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n), \quad \varepsilon_2(n) \frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)} \rightarrow 0.$$

On admet qu'en poursuivant le développement asymptotique, on peut écrire, pour tout $n \geq 2$:

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n),$$

avec $\varepsilon(n)\sqrt{2\ln n} \rightarrow 0$.

7. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}, \quad b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $c = e^{-x}$ et on utilise la solution x_n et le reste $\varepsilon(n)$ correspondants.

7. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$.

7. (b) Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, le quotient suivant, défini pour n suffisamment grand, vérifie :

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \sim \frac{e^{-x}}{n}.$$

7. (c) En déduire, en utilisant la question 1. (b), que :

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} P(X_1 > a_n x + b_n),$$

puis que la suite $((M_n - b_n)/a_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers la variable G définie dans la partie 1.