



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \quad T(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Ainsi $f_n(x) = S(x)T(x)$ et $S(x), T(x) > 0$.

1) Sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$, chaque fonction coordonnée $x \mapsto x_i$ est de classe C^∞ . La fonction $x \mapsto 1/x_i$ est également de classe C^∞ puisque x_i ne s'annule pas sur U .

Par stabilité des fonctions de classe C^2 par somme finie et produit, S, T , puis $f_n = ST$ sont de classe C^2 sur U .

2) On calcule le gradient. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) = T(x) - \frac{S(x)}{x_j^2}.$$

Un point $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ est critique si et seulement si ces n dérivées sont nulles. Cela revient à :

$$\forall j, \quad a_j^2 = \frac{S(a)}{T(a)}.$$

Les coordonnées a_j étant strictement positives, elles sont toutes égales à un même réel $r > 0$. Réciproquement, si $a = (r, \dots, r)$, alors $S(a) = nr, T(a) = n/r$, et :

$$T(a) - \frac{S(a)}{r^2} = \frac{n}{r} - \frac{nr}{r^2} = 0.$$

Les points critiques sont donc exactement les points $(r, \dots, r)$, avec $r > 0$. Ils forment une famille infinie. En chacun d'eux, $f_n(r, \dots, r) = n^2$.

3) a) Pour la dérivée seconde selon une même coordonnée, on dérive l'expression du gradient :

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j^2}(x) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_j^2} + \frac{2S(x)}{x_j^3} = \frac{2S(x)}{x_j^3} - \frac{2}{x_j^2}.$$

On peut aussi écrire $\partial^2 f_n / \partial x_j^2 = 2(S(x) - x_j) / x_j^3$.

Pour $i \neq j$, le terme x_j^{-2} ne dépend pas de x_i , et :

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_j^2}.$$

Les formules sont symétriques en i, j , en accord avec le théorème de Schwarz applicable puisque f_n est de classe C^2 .

3) b) Fixons un point critique $(r, \dots, r)$, avec $r > 0$. On y a $S = nr$. Les coefficients diagonaux de la hessienne valent :

$$\frac{2nr}{r^3} - \frac{2}{r^2} = \frac{2(n-1)}{r^2}.$$

Les coefficients hors diagonale valent $-2/r^2$. La matrice $K_n = nI_n - J_n$ a précisément pour coefficients diagonaux $n-1$ et pour coefficients hors diagonale -1 .

Ainsi la hessienne en ce point critique est :

$$H_n = \frac{2}{r^2} K_n.$$

Le facteur de proportionnalité est strictement positif.

4) a) Les colonnes de J_n sont toutes égales au vecteur non nul $v_n = {}^t(1, \dots, 1)$. L'espace qu'elles engendrent est donc de dimension 1, d'où $\text{rg}(J_n) = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(J_n) = n - 1$. Puisque $n \geq 2$, ce noyau est non nul ; le nombre 0 est donc une valeur propre, et son espace propre a pour dimension $n - 1$.

Plus explicitement, pour une colonne $X = {}^t(X_1, \dots, X_n)$:

$$J_n X = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) v_n.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(J_n) = \{X : \sum_{i=1}^n X_i = 0\}.$$

4) b) Chacune des n coordonnées de $J_n v_n$ est la somme de n termes égaux à 1. Ainsi :

$$J_n v_n = n v_n.$$

Comme $v_n \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre n .

4) c) Les espaces propres associés aux valeurs distinctes 0 et n sont en somme directe.

Le premier est de dimension $n - 1$, et le second contient au moins la direction $\text{Vect}(v_n)$, de dimension 1. Ces dimensions remplissent déjà tout l'espace de dimension n .

Ainsi les seules valeurs propres de J_n sont 0 et n , avec :

$$E_0(J_n) = \{X : \sum X_i = 0\}, \quad E_n(J_n) = \text{Vect}(v_n).$$

Puisque $K_n = nI_n - J_n$, si $J_n X = \mu X$, alors $K_n X = (n - \mu)X$. Les mêmes deux sous-espaces donnent donc :

$$E_n(K_n) = E_0(J_n), \quad E_0(K_n) = E_n(J_n).$$

Les valeurs propres de K_n sont n , sur un sous-espace de dimension $n - 1$, et 0, sur une droite. Cette décomposition couvre encore tout l'espace ; aucune autre valeur propre n'est possible.

4) d) La fonction est de classe C^2 sur l'ouvert U , et ses points critiques ont été déterminés. En un point $(r, \dots, r)$, la hessienne $H_n = (2/r^2)K_n$ a pour valeurs propres $2n/r^2 > 0$ et 0.

La présence de cette valeur propre nulle, sans valeurs propres de signes opposés, place le point dans le cas où le critère local fondé sur la hessienne ne permet pas de conclure.

On ne peut donc pas affirmer l'existence d'un minimum local à partir de ce seul calcul de hessienne au point critique.

La hessienne est positive semi-définie, mais pas positive définie. Les questions suivantes établiront le minimum global par une inégalité portant directement sur les valeurs de f_n .

5) a) L'identité :

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

montre que $(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$. L'égalité a lieu si et seulement si $x_1 = x_2$.

5) b) Comme $x_1, x_2 > 0$, le produit x_1x_2 est strictement positif. On peut donc diviser l'inégalité précédente par ce produit. Or :

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2}.$$

On obtient $f_2(x_1, x_2) \geq 4$, avec égalité exactement lorsque $x_1 = x_2 > 0$. Le minimum global vaut donc 4, et il est atteint en tous les points (r, r) avec $r > 0$.

Ce minimum n'est pas strict, même localement, puisque d'autres points de la diagonale sont arbitrairement proches du point étudié et ont tous la valeur 4.

6) Méthode 1 — Appliquer Cauchy-Schwarz comme demandé.

Pour $x \in U$, on choisit les vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$p = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}), \quad q = (1/\sqrt{x_1}, \dots, 1/\sqrt{x_n}).$$

Ils sont bien définis car toutes les coordonnées x_i sont strictement positives. On a $\langle p, q \rangle = n$,

$$\|p\|^2 = \sum x_i$$

et

$$\|q\|^2 = \sum 1/x_i.$$

Cauchy-Schwarz donne :

$$n^2 = \langle p, q \rangle^2 \leq \|p\|^2 \|q\|^2 = f_n(x).$$

Les deux vecteurs non nuls sont colinéaires dans le cas d'égalité. Il existe alors un réel c tel que $\sqrt{x_i} = c/\sqrt{x_i}$ pour chaque i , soit $x_i = c$ pour tout i . Comme $x_i > 0$, on a $c > 0$.

Réciproquement, si toutes les coordonnées sont égales à $r > 0$, on a $f_n = n^2$. Le minimum global est donc n^2 , atteint exactement aux points critiques $(r, \dots, r)$.

Méthode 2 — Décomposer l'écart au minimum en termes positifs.

En développant le produit définissant f_n et en regroupant les deux termes de chaque paire d'indices distincts :

$$f_n(x) = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right).$$

Il existe $n(n-1)/2$ paires. Comme $n^2 = n + 2 \cdot n(n-1)/2$, on en déduit :

$$f_n(x) - n^2 = \sum_{i < j} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} - 2 \right) = \sum_{i < j} \frac{(x_i - x_j)^2}{x_i x_j} \geq 0.$$

Chaque dénominateur est strictement positif. L'égalité vaut exactement lorsque $x_i = x_j$ pour toutes les paires, donc lorsque toutes les coordonnées sont égales.

Cette identité prouve le même minimum global et décrit explicitement l'écart à sa valeur. Cauchy-Schwarz donne une preuve courte par produit scalaire ; la seconde méthode généralise directement l'identité du cas $n = 2$.

Exercice 2

1) Comme $\|u\| = 1$, le vecteur u est non nul et $\text{Vect}(u)$ est une droite. Dans l'espace euclidien E de dimension n :

$$\dim \text{Vect}(u)^\perp = n - \dim \text{Vect}(u) = n - 1.$$

Cette dimension est positive puisque $n \geq 2$.

2) Pour $x, y \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$f_\lambda(ax + by) = \lambda(a(x | u) + b(y | u))u + ax + by = af_\lambda(x) + bf_\lambda(y).$$

L'application est donc linéaire. Ses valeurs appartiennent à E , donc c'est un endomorphisme de E .

3) Méthode 1 — Calculer la composée.

Fixons $x \in E$ et posons $c = (x | u)$. Comme $(u | u) = 1$, on a :

$$(f_\lambda(x) | u) = (x + \lambda cu | u) = (1 + \lambda)c.$$

En appliquant de nouveau f_λ :

$$f_\lambda^2(x) = x + \lambda cu + \lambda(1 + \lambda)cu = x + \lambda(\lambda + 2)cu.$$

D'autre part :

$$(\lambda + 2)f_\lambda(x) - (\lambda + 1)x = (\lambda + 2)(x + \lambda cu) - (\lambda + 1)x = x + \lambda(\lambda + 2)cu.$$

Ces expressions sont identiques pour tout x , donc :

$$f_\lambda^2 - (\lambda + 2)f_\lambda + (\lambda + 1)\text{Id} = 0.$$

Le polynôme demandé est bien annulateur.

Méthode 2 — Utiliser un projecteur élémentaire.

Définissons $p(x) = (x | u)u$. La linéarité du produit scalaire montre que p est linéaire et :

$$p^2(x) = ((x | u)u | u)u = (x | u)(u | u)u = p(x).$$

Ainsi $p^2 = p$, et $f_\lambda = \text{Id} + \lambda p$. On calcule :

$$f_\lambda^2 = \text{Id} + 2\lambda p + \lambda^2 p^2 = \text{Id} + (2\lambda + \lambda^2)p.$$

En substituant dans le polynôme, le coefficient de Id est $1 - (\lambda + 2) + (\lambda + 1) = 0$, et celui de p est $2\lambda + \lambda^2 - \lambda(\lambda + 2) = 0$. On retrouve le polynôme annulateur.

La première méthode suit la définition de l'application ; la seconde reconnaît la projection sur la direction de u et prépare l'étude du cas $\lambda = -1$.

4) a) Pour tous $x, y \in E$:

$$(f_\lambda(x) | y) = (x | y) + \lambda(x | u)(u | y),$$

$$(x | f_\lambda(y)) = (x | y) + \lambda(y | u)(x | u).$$

La symétrie du produit scalaire donne $(u | y) = (y | u)$, donc ces deux expressions sont égales. Puisque f_λ est un endomorphisme, cette égalité prouve qu'il est symétrique.

4) b) Le vecteur u est unitaire, donc :

$$f_\lambda(u) = \lambda(u | u)u + u = (\lambda + 1)u.$$

Si $v \in \text{Vect}(u)^\perp$, alors $(v | u) = 0$, donc $f_\lambda(v) = v$.

4) c) La question 4) b) donne deux valeurs propres : $\lambda + 1$ avec vecteur propre non nul u , et 1 puisque l'espace $\text{Vect}(u)^\perp$ a une dimension $n - 1 \geq 1$. Elles sont distinctes car $\lambda \neq 0$.

Pour déterminer les espaces propres exactement, si $f_\lambda(x) = x$, alors $\lambda(x | u)u = 0$. Les facteurs λ et u sont non nuls, donc $(x | u) = 0$. Ainsi :

$$E_1(f_\lambda) = \text{Vect}(u)^\perp.$$

Si $f_\lambda(x) = (\lambda + 1)x$, alors $\lambda(x | u)u = \lambda x$. En divisant par $\lambda \neq 0$, on obtient $x = (x | u)u$, donc $x \in \text{Vect}(u)$. Réciproquement, la linéarité et 4) b) montrent que tout multiple de u vérifie cette égalité. Ainsi :

$$E_{\lambda+1}(f_\lambda) = \text{Vect}(u).$$

Ces sous-espaces orthogonaux sont supplémentaires et leurs dimensions totalisent n . Ils donnent une base de vecteurs propres ; aucune autre valeur propre n'est possible. Cela vaut aussi pour $\lambda = -1$, où la deuxième valeur propre est 0.

5) a) Dans le polynôme annulateur de 3), on remplace λ par -1 . L'identité devient :

$$f_{-1}^2 - f_{-1} = 0.$$

Un endomorphisme p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Ainsi f_{-1} est un projecteur.

5) b) Méthode 1 — Utiliser la décomposition orthogonale de chaque vecteur.

Pour tout $x \in E$, posons $v = x - (x | u)u$. On a :

$$(v | u) = (x | u) - (x | u)(u | u) = 0.$$

Ainsi $v \in \text{Vect}(u)^\perp$, tandis que $x - v = (x | u)u \in \text{Vect}(u)$. L'écriture $x = v + (x | u)u$ est la décomposition orthogonale de x selon les deux sous-espaces supplémentaires.

Or $f_{-1}(x) = x - (x | u)u = v$. C'est donc le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)^\perp$.

Méthode 2 — Utiliser le critère de symétrie des projecteurs.

La question 5) a) établit que f_{-1} est un projecteur, et 4) a) qu'il est symétrique. Un projecteur symétrique d'un espace euclidien est le projecteur orthogonal sur son image.

D'après 4) b), il est l'identité sur $\text{Vect}(u)^\perp$ et nul sur $\text{Vect}(u)$. Ces deux sous-espaces sont supplémentaires ; son image est donc $\text{Vect}(u)^\perp$, et son noyau $\text{Vect}(u)$.

Le critère donne le même projecteur orthogonal. La première méthode fournit sa décomposition vectorielle explicite ; la seconde utilise les propriétés d'endomorphisme déjà établies.

Exercice 3

On fixe $a > 0$ et on pose $D = X - Y$. Les variables X et Y sont indépendantes et uniformes sur $[0, a]$. Les valeurs choisies pour leurs densités aux extrémités ne changent pas leurs lois.

- 1) a) Pour $t < -a$, $P(-Y \leq t) = 0$; pour $t \geq 0$, cette probabilité vaut 1. Pour $-a \leq t \leq 0$, la variable uniforme n'ayant pas de masse ponctuelle :

$$P(-Y \leq t) = P(Y \geq -t) = 1 - P(Y < -t) = 1 - \frac{-t}{a} = \frac{a+t}{a}.$$

La fonction de répartition obtenue est celle de la loi uniforme sur $[-a, 0]$. Une densité de $-Y$ est donc :

$$f_{-Y}(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } t \in [-a, 0], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) b) L'indépendance de X, Y implique celle de $X, -Y$ par le lemme des coalitions. Ces deux variables possèdent des densités bornées à support borné, donc la formule de convolution s'applique à leur somme $D = X + (-Y)$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) dt.$$

Le produit des densités vaut $1/a^2$ lorsque $t \in [0, a]$ et $x-t \in [-a, 0]$, soit lorsque t appartient à l'intersection $[0, a] \cap [x, x+a]$; il est nul ailleurs.

Pour $x \in [-a, 0]$, cette intersection est $[0, x+a]$, de longueur $x+a$. Pour $x \in [0, a]$, elle est $[x, a]$, de longueur $a-x$. Pour $x < -a$ ou $x > a$, elle est vide, à l'exception d'éventuels points isolés aux bornes, qui ne contribuent pas à l'intégrale.

Ainsi :

$$g(x) = \begin{cases} (a+x)/a^2 & \text{si } -a \leq x \leq 0, \\ (a-x)/a^2 & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela s'écrit exactement $g(x) = (a - |x|)/a^2$ sur $[-a, a]$, et 0 ailleurs. La densité est paire, positive et continue ; son intégrale vaut $2a^{-2} \int_0^a (a-x) dx = 1$.

2) a) Puisque $Z = |D| \geq 0$, sa fonction de répartition H vaut 0 pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$:

$$H(x) = P(|D| \leq x) = P(-x \leq D \leq x).$$

La variable D est à densité, donc $P(D = -x) = 0$. On peut écrire :

$$H(x) = G(x) - G(-x) \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Ainsi la formule complète est $H(x) = 0$ pour $x < 0$, et $H(x) = G(x) - G(-x)$ pour $x \geq 0$.

2) b) La fonction G a pour dérivée la densité continue g . Pour $x > 0$, la dérivation de la formule précédente donne :

$$H'(x) = g(x) + g(-x) = 2g(x),$$

car g est paire. Pour $0 < x < a$, cette expression vaut $2(a-x)/a^2$, et pour $x > a$, elle vaut 0. Pour $x < 0$, H est constante nulle. La continuité en 0 résulte de $G(0) - G(0) = 0$.

Une densité de Z est donc :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La valeur $h(0) = 2/a$ est un choix de densité à une extrémité et ne correspond pas à une masse ponctuelle. En intégrant sur $[0, x]$, on obtient aussi :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x/a - x^2/a^2 & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

- 3) On a $0 \leq Z \leq a$ presque sûrement. Ses moments d'ordre 1 et 2 existent donc, par domination par les constantes intégrables a et a^2 .

Méthode 1 — Calculer les deux moments par transfert.

Par transfert avec la densité h :

$$E(Z) = \frac{2}{a^2} \int_0^a x(a-x) dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a}{3},$$

$$E(Z^2) = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2(a-x) dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

La formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(Z) = \frac{a^2}{6} - \left(\frac{a}{3} \right)^2 = \frac{a^2}{18}.$$

Méthode 2 — Utiliser les variables initiales pour le second moment.

Comme $Z^2 = (X - Y)^2$, on peut calculer ce moment sans la densité de Z . Les moments des uniformes sont finis : $E(X) = E(Y) = a/2$ et $V(X) = V(Y) = a^2/12$.

Par indépendance, $\text{Cov}(X, Y) = 0$. On a $E(X - Y) = 0$ et $V(X - Y) = a^2/6$.

Koenig-Huygens donne donc $E((X - Y)^2) = a^2/6$, soit le même $E(Z^2)$. Pour l'espérance, le transfert donne directement $E(Z) = 2a^{-2}(a^3/2 - a^3/3) = a/3$. On retrouve donc $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = a^2/18$.

Le transfert est une méthode complète à partir de la densité ; cette autre approche simplifie le calcul du second moment grâce à l'identité $|X - Y|^2 = (X - Y)^2$ et à l'indépendance.

4) Code adapté en Python.

Deux appels distincts à `rd.random()` simulent deux réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $[0, 1[$. Leur multiplication par $a > 0$ donne les deux uniformes sur $[0, a[$, puis on calcule leur différence en valeur absolue.

Python

```
import numpy.random as rd

def z(a):
    x = a * rd.random()
    y = a * rd.random()
    return abs(x - y)
```

La fonction retourne une réalisation de Z , comprise entre 0 et a . Il faut utiliser deux tirages distincts pour conserver l'indépendance. Le code a été exécuté ; la justification de sa loi repose sur les transformations des variables simulées, et non sur une observation empirique.

Problème

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2

- 1) a) La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $k \geq 1$ et $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On intègre cette inégalité sur le segment $[k, k+1]$, de longueur 1. La croissance de l'intégrale donne :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) b) Pour $n \geq 2$, on somme les inégalités de 1) a) sur $k = 1, \dots, n-1$. La relation de Chasles donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En changeant d'indice dans la somme de gauche, on obtient exactement :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2) Notons

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour $n \geq 2$, l'intégrale précédente vaut $2\sqrt{n} - 2$. Les deux inégalités de 1) b) deviennent :

$$A_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq A_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La première donne $A_n \leq 2\sqrt{n} - 1$. La seconde donne même $A_n \geq 2\sqrt{n} - 2 + 1/\sqrt{n}$, donc, en particulier, $A_n \geq 2\sqrt{n} - 2$.

Pour $n = 1$, on a $A_1 = 1$, et les bornes demandées sont $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$2\sqrt{n} - 2 \leq A_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Partie 1 : convergence complète

1) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, la série à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

converge. Son terme général tend donc vers 0 :

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Cette propriété étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, elle est précisément la définition de la convergence en probabilité vers X . La convergence complète implique donc la convergence en probabilité.

2) a) Puisque $Y_n \sim \mathcal{P}(1/n)$, on a $P(Y_n = 0) = e^{-1/n}$. La variable est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc :

$$P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-1/n}.$$

2) b) Pour $\varepsilon > 0$, si une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie $Y_n \geq \varepsilon$, alors elle est non nulle et vérifie $Y_n \geq 1$. Ainsi $(Y_n \geq \varepsilon) \subset (Y_n \geq 1)$.

Par croissance de la probabilité et par 2) a) :

$$0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-1/n}.$$

Cette inclusion reste vraie lorsque $\varepsilon > 1$: l'événement de gauche impose alors une valeur entière encore plus grande.

2) c) Méthode 1 — Encadrer par la probabilité d'être non nul.

La continuité de l'exponentielle donne $e^{-1/n} \rightarrow 1$. L'encadrement de 2) b) implique, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = P(Y_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Ainsi (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine de valeur 0.

Méthode 2 — Appliquer Markov.

Comme $Y_n \geq 0$ et $E(Y_n) = 1/n$ est finie, Markov s'applique et donne $P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1/(n\varepsilon) \rightarrow 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$. On retrouve donc la convergence en probabilité vers 0. L'encadrement par la probabilité d'être non nul exploite ici la loi exacte; Markov permet de conclure en ne connaissant que l'espérance.

2) d) Pour $\varepsilon = 1$, la série qui intervient dans la définition de la convergence complète a pour terme :

$$P(|Y_n| \geq 1) = 1 - e^{-1/n}.$$

L'équivalent usuel $1 - e^{-x} \sim x$ en 0 donne $1 - e^{-1/n} \sim 1/n$. Les termes sont positifs et la série harmonique diverge; par équivalence des séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n \geq 1} P(Y_n \geq 1)$$

diverge.

Une seule valeur de $\varepsilon > 0$ pour laquelle la série diverge suffit à exclure la convergence complète. Ainsi (Y_n) ne converge pas complètement vers 0, malgré sa convergence en probabilité.

L'indépendance des Y_n , fournie par l'énoncé, n'est pas nécessaire pour ces calculs de lois individuelles et de probabilités.

Partie 2 : étude d'un exemple

On pose $p_k = 1/\sqrt{k}$ et $\mu_n = E(S_n)$. L'énoncé adapté suppose l'indépendance mutuelle des B_k ; les questions 1) à 5) d) n'utilisent que leur indépendance deux à deux. L'hypothèse plus forte intervient dans la démonstration corrigée de 5) e).

Le cas $k = 1$ correspond à une Bernoulli de paramètre 1 : $B_1 = 1$ presque sûrement. En particulier $S_n \geq 1$ presque sûrement et $\mu_n \geq 1$; toutes les normalisations utilisées sont

bien définies.

1) a) Les variables de Bernoulli sont bornées et possèdent donc tous leurs moments.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(B_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \mu_n.$$

Les variables étant indépendantes deux à deux, leurs covariances sont nulles. La variance d'une somme finie vaut donc la somme des variances :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(B_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

On peut aussi écrire

$$V(S_n) = \mu_n - \sum_{k=1}^n 1/k.$$

1) b) Pour chaque $k \geq 1$, $0 \leq p_k \leq 1$, donc $0 \leq p_k(1 - p_k) \leq p_k$. En sommant :

$$0 \leq V(S_n) \leq \sum_{k=1}^n p_k = E(S_n).$$

2) a) La variable $Z_n = S_n/\mu_n$ possède une espérance et une variance, avec :

$$E(Z_n) = 1, \quad V(Z_n) = \frac{V(S_n)}{\mu_n^2} \leq \frac{1}{\mu_n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est applicable et donne :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mu_n}.$$

La division est licite puisque $\mu_n \geq 1$.

- 2) b) Le préliminaire donne $\mu_n \geq 2\sqrt{n} - 2$, donc $\mu_n \rightarrow +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la borne de 2) a) tend vers 0.

Ainsi $P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve la convergence en probabilité de (Z_n) vers la variable certaine de valeur 1.

On n'a pas utilisé la loi faible des grands nombres pour des variables de même loi : les paramètres des B_k dépendent de k , et la preuve repose directement sur leur variance.

- 3) Fixons $\varepsilon > 0$. En appliquant 2) a) à l'indice n^4 , puis le préliminaire :

$$P(|Z_{n^4} - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mu_{n^4}}, \quad \mu_{n^4} \geq 2n^2 - 2.$$

Pour $n \geq 2$, on a $2n^2 - 2 \geq n^2$, donc :

$$P(|Z_{n^4} - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}.$$

La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 2} 1/n^2$$

converge. Par comparaison, la série demandée converge ; le premier terme n'affecte pas sa nature.

Ainsi la sous-suite (Z_{n^4}) converge complètement vers 1.

- 4) a) Chaque B_k est positive ou nulle, donc les sommes S_m sont croissantes en m , presque sûrement. Leurs espérances μ_m sont également croissantes et strictement positives.

Posons $e = e_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor \geq 1$. On a $e^4 \leq n < (e+1)^4$, donc :

$$S_{e^4} \leq S_n \leq S_{(e+1)^4}, \quad \mu_{e^4} \leq \mu_n \leq \mu_{(e+1)^4}.$$

Toutes les sommes sont positives ou nulles et les dénominateurs positifs. Pour obtenir la borne inférieure, on minore le numérateur et majore le dénominateur ; pour la borne supérieure, on fait l'inverse. Ainsi :

$$\frac{S_{e_n^4}}{\mu_{(e_n+1)^4}} \leq \frac{S_n}{\mu_n} \leq \frac{S_{(e_n+1)^4}}{\mu_{e_n^4}}.$$

C'est l'encadrement demandé de Z_n . Les inégalités entre variables aléatoires sont comprises presque sûrement. Une éventuelle modification des Bernoulli sur des événements négligeables permet aussi de les choisir toutes à valeurs dans $\{0, 1\}$ partout.

4) b) On remplace les deux sommes encadrantes par leur définition en fonction des variables normalisées :

$$S_{e_n^4} = \mu_{e_n^4} Z_{e_n^4}, \quad S_{(e_n+1)^4} = \mu_{(e_n+1)^4} Z_{(e_n+1)^4}.$$

L'encadrement de 4) a) devient :

$$\frac{\mu_{e_n^4}}{\mu_{(e_n+1)^4}} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \frac{\mu_{(e_n+1)^4}}{\mu_{e_n^4}} Z_{(e_n+1)^4}.$$

5) a) Notons $r_n = \mu_{(e_n+1)^4} / \mu_{e_n^4}$. Par croissance de μ_m , on a $r_n \geq 1$. Pour $e_n \geq 2$, le préliminaire donne :

$$\mu_{(e_n+1)^4} \leq 2(e_n + 1)^2 - 1, \quad \mu_{e_n^4} \geq 2e_n^2 - 2 > 0.$$

Ainsi :

$$1 \leq r_n \leq \frac{2(e_n + 1)^2 - 1}{2e_n^2 - 2} = \frac{2e_n^2 + 4e_n + 1}{2e_n^2 - 2}.$$

Comme $e_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor \rightarrow +\infty$, le quotient de droite tend vers 1. Par encadrement, $r_n \rightarrow 1$, ce qui est exactement la limite demandée.

5) b) Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $r_n \rightarrow 1$, pour n assez grand on a $r_n \leq 1 + \varepsilon$.

De plus $1/r_n \rightarrow 1$. Le nombre $(2 + \varepsilon)/(2(1 + \varepsilon))$ est strictement inférieur à 1, car :

$$1 - \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} > 0.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a aussi :

$$\frac{1}{r_n} \geq \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}.$$

En choisissant un rang qui convient aux deux propriétés simultanément, on obtient les deux inégalités demandées.

5) c) Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons n assez grand pour que 5) b) soit applicable. Écrivons $e = e_n$.

Pour la déviation inférieure, supposons d'abord $0 < \varepsilon < 1$. Sur l'événement $(Z_n \leq 1 - \varepsilon)$, la borne inférieure de 4) b) donne :

$$\frac{1}{r_n} Z_{e^4} \leq Z_n \leq 1 - \varepsilon,$$

donc $Z_{e^4} \leq r_n(1 - \varepsilon)$. Comme $1 - \varepsilon > 0$, l'inégalité $r_n \leq 1 + \varepsilon$ peut être multipliée par ce facteur sans changer son sens. Ainsi :

$$Z_{e^4} \leq (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon^2.$$

Pour $\varepsilon \geq 1$, l'événement $(Z_n \leq 1 - \varepsilon)$ est négligeable, car $Z_n \geq 1/\mu_n > 0$ presque sûrement. L'inclusion recherchée est donc encore valable, à un événement négligeable près.

On a ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2).$$

Pour la déviation supérieure, sur l'événement $(Z_n \geq 1 + \varepsilon)$, la borne supérieure de 4) b) donne :

$$1 + \varepsilon \leq Z_n \leq r_n Z_{(e+1)^4}.$$

Donc $Z_{(e+1)^4} \geq (1 + \varepsilon)/r_n$. En utilisant la deuxième borne de 5) b) :

$$Z_{(e+1)^4} \geq (1 + \varepsilon) \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc aussi :

$$(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \varepsilon/2).$$

5) d) L'événement $|Z_n - 1| \geq \varepsilon$ est la réunion des événements $Z_n \leq 1 - \varepsilon$ et $Z_n \geq 1 + \varepsilon$. Les inclusions de 5) c) le placent dans la réunion :

$$(Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2) \cup (Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \varepsilon/2).$$

La probabilité d'une réunion est au plus la somme des probabilités. Chacun de ces

événements unilatéraux est inclus dans l'événement correspondant en valeur absolue.

Ainsi :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P(|Z_{e_n^4} - 1| \geq \varepsilon^2).$$

Cette majoration est valide pour tout $\varepsilon > 0$ et à partir du rang choisi en 5) b).

5) e) Question adaptée au programme actuel ; rectification de la dernière étape du sujet.

La sommabilité établie en 3) concerne uniquement les indices m^4 . Dans 5) d), chacun de ces indices est répété pour tous les entiers n d'un bloc $m^4 \leq n < (m+1)^4$. Ce bloc contient $(m+1)^4 - m^4$ entiers, quantité équivalente à $4m^3$.

On ne peut donc pas déduire la convergence de la série portant sur tous les n à partir de la seule convergence de la série portant sur m . En particulier, la majoration de 3) est de l'ordre de $1/m^2$; après multiplication par la taille des blocs, elle ne fournit pas de série convergente.

La version adaptée suppose l'indépendance mutuelle des B_k et établit une majoration plus forte, à l'aide de Markov. Tout le calcul qui suit est démontré avec des espérances de variables bornées, des produits finis et des fonctions usuelles.

Première étape — Calculer une espérance exponentielle.

Pour tout réel θ , S_n prend ses valeurs entre 0 et n ; $e^{\theta S_n}$ est donc bornée et possède une espérance. Chaque $e^{\theta B_k}$ est également bornée. Par indépendance mutuelle des B_k et par le lemme des coalitions, les variables $e^{\theta B_k}$ sont mutuellement indépendantes.

La propriété de l'espérance d'un produit de variables indépendantes, appliquée successivement aux produits finis, donne :

$$E(e^{\theta S_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{\theta B_k}) = \prod_{k=1}^n (1 - p_k + p_k e^{\theta}).$$

Pour tout réel z , on a $1 + z \leq e^z$, par l'inégalité de la tangente pour la fonction

exponentielle convexe. Ici $z = p_k(e^\theta - 1) > -1$, donc les facteurs $1 + z$ sont strictement positifs. En majorant chacun d'eux et en multipliant :

$$E(e^{\theta S_n}) \leq \prod_{k=1}^n \exp(p_k(e^\theta - 1)) = \exp(\mu_n(e^\theta - 1)).$$

Cette preuve justifie la factorisation ; l'indépendance deux à deux n'aurait pas suffi pour ce produit de n facteurs.

Deuxième étape — Majorer la déviation supérieure.

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\theta = \ln(1 + \varepsilon) > 0$. L'exponentielle de coefficient θ est croissante, donc :

$$(Z_n \geq 1 + \varepsilon) = (S_n \geq (1 + \varepsilon)\mu_n) = (e^{\theta S_n} \geq e^{\theta(1+\varepsilon)\mu_n}).$$

Markov s'applique à la variable positive $e^{\theta S_n}$ et au seuil strictement positif ci-dessus. Avec la première étape :

$$P(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \leq \exp(\mu_n(e^\theta - 1 - \theta(1 + \varepsilon))),$$

$$P(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \leq e^{-\mu_n a_\varepsilon}, \quad a_\varepsilon = (1 + \varepsilon) \ln(1 + \varepsilon) - \varepsilon.$$

La fonction $a(x) = (1 + x) \ln(1 + x) - x$ vérifie $a(0) = 0$ et $a'(x) = \ln(1 + x) > 0$ pour $x > 0$. Donc $a_\varepsilon > 0$.

Troisième étape — Majorer la déviation inférieure.

Si $0 < \varepsilon < 1$, choisissons $\theta = \ln(1 - \varepsilon) < 0$. L'exponentielle de coefficient θ est maintenant décroissante. Par conséquent :

$$(Z_n \leq 1 - \varepsilon) = (e^{\theta S_n} \geq e^{\theta(1-\varepsilon)\mu_n}).$$

Markov et la première étape donnent :

$$P(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \leq \exp(\mu_n(e^\theta - 1 - \theta(1 - \varepsilon))),$$

$$P(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \leq e^{-\mu_n b_\varepsilon}, \quad b_\varepsilon = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \ln(1 - \varepsilon).$$

La fonction $b(x) = x + (1 - x) \ln(1 - x)$ vérifie $b(0) = 0$ et $b'(x) = -\ln(1 - x) > 0$ sur $]0, 1[$. Donc $b_\varepsilon > 0$.

Si $\varepsilon \geq 1$, cette déviation inférieure est impossible presque sûrement, puisque $Z_n > 0$. Il suffit alors de la majoration de la déviation supérieure.

Quatrième étape — Prouver la sommabilité et conclure.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, posons $c_\varepsilon = \min(a_\varepsilon, b_\varepsilon) > 0$. Pour $\varepsilon \geq 1$, posons $c_\varepsilon = a_\varepsilon > 0$. Par réunion des deux déviations :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-c_\varepsilon \mu_n}.$$

Pour $n \geq 4$, le préliminaire donne $\mu_n \geq 2\sqrt{n} - 2 \geq \sqrt{n}$. Ainsi :

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-c_\varepsilon \sqrt{n}}.$$

Par croissances comparées, $\ln n / \sqrt{n} \rightarrow 0$. Pour n assez grand, $c_\varepsilon \sqrt{n} \geq 2 \ln n$, donc :

$$e^{-c_\varepsilon \sqrt{n}} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge. La série

$$\sum P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon)$$

converge donc par comparaison, pour chaque $\varepsilon > 0$.

C'est exactement la convergence complète de (Z_n) vers la variable certaine de valeur 1, sous l'hypothèse corrigée d'indépendance mutuelle.

La nouvelle majoration permet aussi de rendre sommable le membre de droite de 5) d) en tenant compte des tailles des blocs : aux indices m^4 , l'espérance est au moins $2m^2 - 2$, et les probabilités sont majorées par des exponentielles en $-m^2$. Leur multiplication par un nombre de répétitions de l'ordre de m^3 reste sommable par croissances comparées. C'est ce contrôle supplémentaire qui manque si l'on utilise uniquement 3).

Relevé des adaptations

- Exercice 3, question 4) : code adapté en Python. Les trois blancs sont conservés dans le sujet ; le corrigé utilise deux tirages indépendants de `rd.random()`, la multiplication par a et la valeur absolue de leur différence.
- Problème, partie 2, préambule et question 5) e) : remplacement de l'indépendance deux à deux par l'indépendance mutuelle, et ajout d'une indication permettant de démontrer une majoration exponentielle élémentaire. La sommabilité sur les seuls indices m^4 ne suffit pas pour la sommabilité sur tous les entiers, car chaque indice de la sous-suite est répété sur un bloc de taille de l'ordre de m^3 . Les questions 1) à 5) d) sont conservées ; la conclusion finale est prouvée sous l'hypothèse renforcée, sans invoquer un théorème de concentration non démontré.