



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2009

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On admet que si une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors sa limite est presque sûrement unique. Plus précisément, si $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|U_n - U|) = 0$.

On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable aléatoire V à valeurs positives et possédant une espérance :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(V \geq \varepsilon) \leq \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

- 1) Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X , elle aussi définie sur cet espace probabilisé.

Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X , alors elle converge en probabilité vers X .

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ , avec $\lambda > 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^n Z_k.$$

- 2) a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.

- b)** Soit ε un réel strictement positif. Comparer les événements $(Y_n \geq \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$.
- c)** En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
- 3) a)** Montrer que, si la suite (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y , alors on aurait $P(Y = 0) = 1$.
- b)** Calculer l'espérance de Y_n .
- c)** Sous l'hypothèse de la question 3) a), établir que $E(|Y_n - Y|) \geq E(Y_n) - E(Y)$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|Y_n - Y|)$.
- 4)** Conclure.

Exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

- 1) a)** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
- b)** Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.
- 2) a)** Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1}).$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}.$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^n \left[\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $1/k$, donner un équivalent, lorsque $k \rightarrow +\infty$, de $\ln(1 - 1/(k\alpha)) - \ln(1 - 1/k)$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$. Compléter la déclaration de fonction récursive suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n .

Python

```
import numpy as np

def u(n):
    if n == 1:
        return ...
    else:
        return ...
```

Exercice 3

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n + 1$, ainsi que du polynôme nul.

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket$, on convient que l'expression $X^{2n+1} \frac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k} .

On désigne par Id l'endomorphisme identité de E et on note f l'application qui, à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme défini par :

$$f(P) = X^{2n+1} P \left(\frac{1}{X} \right),$$

cette expression étant interprétée par développement avec la convention précédente.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) a) Vérifier que $f \circ f = \text{Id}$.
- b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f .

3) Soit

$$P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

un polynôme quelconque de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

a) Montrer que les a_k , pour $0 \leq k \leq 2n + 1$, sont solutions du système :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = a_{2n+1-k}.$$

b) En déduire une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

4) Déterminer de la même façon une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

5) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k,$$

où l'on a noté

$$P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

et

$$Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k.$$

- a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E .
- b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique.
- c) En déduire que $\text{Ker}(f + \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - \text{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Problème

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

- 1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, x]$, simplifier la somme

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1}.$$

- b) En déduire que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

- d) Établir alors que la série de terme général x^p/p est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).$$

- 2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $x^{n+1}/(n(n+1))$ est convergente.

- b) Utiliser la première question pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x).$$

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f , nulle sur $] -\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de X .

- 1) Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) \ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 2) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y .

- 3) Étude d'un cas particulier.

- a) Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.

- b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X , c'est-à-dire de densité f , nulle sur $] -\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition notée F .

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g , nulle sur $] -\infty, 0[$ et définie pour tout réel $x \geq 0$ par $g(x) = -f(x) \ln(1 - F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels positifs définie par

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

On considère dès lors une variable aléatoire N , définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de la famille des variables X_i , et dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On pose alors $Z = \max(X_0, X_1, \dots, X_N)$, ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \max(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)).$$

2) a) On admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

- b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F , une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.
- c) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme densité.