



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2008

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

- 1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 2) Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On note F_X , respectivement F_Y , la fonction de répartition de X , respectivement Y .

- 2) a) Déterminer une densité de X^2 ; on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité.
- 2) b) Déterminer une densité de $-Y$; on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité.
- 2) c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 2) d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général

$u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$, pour $n \geq 1$, est convergente et de calculer sa somme.

- 1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

- 2) a) On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t , $\cos(t/2) \cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

- 2) b) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

- 2) c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos(t/2)} dt - \frac{1}{2}.$$

- 3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

1) a) Montrer que si f est un automorphisme de E , alors on a bien $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

1) b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E . Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle alors symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par $s(x) = x_F - x_G$.

Déterminer s^2 et en déduire que $E = \text{Ker}(s) \oplus \text{Im}(s)$.

2) Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif, le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question.

2) a) Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.

2) b) Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.

2) b) (i) Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

2) b) (ii) Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\text{Im}(f)$.

2) b) (iii) En déduire que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

2) c) Retrouver le résultat de la question 2) b) en considérant la matrice de f dans une base bien choisie.

- 3) Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme

$$P = \sum_{k=1}^p a_k T^k,$$

ou encore $P(T) = a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_p T^p$, avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

- 3) a) Soit y un élément de $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
- 3) a) (i) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.
- 3) a) (ii) En déduire que, pour tout entier $k \geq 2$, on a $f^k(x) = 0$, puis déterminer y .
- 3) b) Établir que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \dots, J_n$.

Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $2p + 1$ fois, les lancers étant indépendants. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $2p + 1$ caractères P pour « pile » ou F pour « face ». Les prévisions sont déterminées sans connaissance des lancers et, lorsqu'elles sont aléatoires, indépendamment de ceux-ci. Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros. Les autres joueurs gagnent 0 euro.

Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois « pile », le joueur ayant noté (P, F, P) a 2 prévisions correctes ; si les lancers donnent dans cet ordre (P, F, P) , le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions

correctes du joueur J_i , G_i la variable aléatoire égale à son gain et $E(G_i)$ son espérance de gain.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes

- 1) Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On pose alors, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

- 2) On pose

$$S_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$$

et

$$T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}.$$

- 2) a) Calculer $S_p + T_p$.

- 2) b) Montrer que $S_p = T_p$.

- 2) c) Dédire des deux résultats précédents la valeur de S_p , puis montrer que $r_p = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

Chaque joueur choisit uniformément une des 2^{2p+1} listes de prévisions. Ces choix sont mutuellement indépendants et indépendants des lancers. Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

1) Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

2) a) Montrer que $P_{(X_1=0)} \left(G_1 = \frac{n!}{n} \right) = (q_0)^{n-1}$.

2) b) Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $P_{(X_1=0)} \left(G_1 = \frac{n!}{j+1} \right) = 0$.

2) c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :

$$E(G_1 \mid [X_1 = 0]) = (n-1)!(q_0)^{n-1}.$$

3) a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$P_{(X_1=k)} \left(G_1 = \frac{n!}{j+1} \right) = \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}.$$

3) b) Établir que $\frac{1}{j+1} \binom{n-1}{j} = \frac{1}{n} \binom{n}{j+1}$, puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :

$$E(G_1 \mid [X_1 = k]) = (n-1)! \frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.$$

3) c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4) Utiliser les questions 3) b) et 3) c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard, mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de J_1 . Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) , alors J_2 choisit (P, F, F) .

Les listes de $J_1, J_3, \dots, J_n$ sont choisies uniformément, indépendamment les unes des autres et des lancers, comme dans la partie 2.

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. En désignant par G'_1 et G'_2 leurs gains respectifs après ce partage, on a donc $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.

On pose, pour tout $i \in \{1, 3, \dots, n\}$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2 .

1) a) Montrer qu'un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p + 1$ prévisions correctes.

1) b) En déduire que $Y(\Omega) = \llbracket p + 1, 2p + 1 \rrbracket$.

2) Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre (F, P, P) ou (P, F, F) , et Y prend la valeur 2 sinon.

3) Pour tout $k \in \llbracket p + 1, 2p + 1 \rrbracket$, montrer que $P(Y = k) = 2q_k$.

4) Montrer que :

$$G'(\Omega) = \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \right\} \quad \text{si } p = 0,$$

$$G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \right\} \quad \text{si } p \geq 1.$$

5) a) Établir que, pour tout $k \in \llbracket p+1, 2p+1 \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a :

$$P_{(Y=k)} \left(G' = \frac{n!}{j+1} \right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}.$$

5) b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket p+1, 2p+1 \rrbracket$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y = k]$ est :

$$E(G' \mid [Y = k]) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

6) b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 2^{n-1} > n$.

6) c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 , et donc pour J_2 , du point de vue de l'espérance de leur gain.