



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2008

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) On cherche les valeurs propres réelles en résolvant le système, sans déterminant.

Pour un vecteur non nul $v = {}^t(r, s)$, l'équation $Av = \lambda v$ s'écrit :

$$-s = \lambda r, \quad yr + 2xs = \lambda s.$$

Si $r = 0$, la première équation donne $s = 0$, ce qui est exclu. On peut donc utiliser $s = -\lambda r$ dans la seconde et diviser par $r \neq 0$. On obtient :

$$\lambda^2 - 2x\lambda + y = 0 \iff (\lambda - x)^2 = x^2 - y.$$

Réciproquement, chaque solution réelle λ de cette équation fournit le vecteur propre ${}^t(1, -\lambda)$. Il faut distinguer trois cas.

- Si $x^2 - y > 0$, il existe deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_- = x - \sqrt{x^2 - y}$ et $\lambda_+ = x + \sqrt{x^2 - y}$. Les vecteurs propres associés sont indépendants. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$, donc A est diagonalisable.
- Si $x^2 - y < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle. La matrice ne possède donc aucune base de vecteurs propres réels et n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si $x^2 - y = 0$, la seule valeur propre est x . Son espace propre est la droite engendrée par ${}^t(1, -x)$, d'après le système précédent. Sa dimension est 1, donc il ne fournit pas une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice n'est pas diagonalisable.

La condition nécessaire et suffisante est donc :

$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff y < x^2.$$

Le cas d'égalité doit être exclu : une seule valeur propre ne suffit pas ici à diagonaliser la matrice.

2) a) Posons $U = X^2$. Puisque X prend ses valeurs dans $[0, 1]$, pour $0 \leq t \leq 1$:

$$P(U \leq t) = P(X \leq \sqrt{t}) = \sqrt{t}.$$

Pour $t < 0$, cette probabilité vaut 0 ; pour $t > 1$, elle vaut 1. Ainsi :

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Une dérivation sur les intervalles de régularité donne la densité :

$$f_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs choisies aux points 0 et 1 n'affectent pas la loi. Le terme $1/(2\sqrt{t})$ n'est utilisé que pour $t > 0$.

- 2) b) La variable $V = -Y$ est une transformation affine d'une uniforme sur $[0, 1]$. Elle suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$, de densité :

$$f_V(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier directement la fonction de répartition : pour $-1 \leq t \leq 0$,

$P(V \leq t) = P(Y \geq -t) = 1 + t$, car Y n'a pas d'atome. La fonction vaut 0 en dessous de -1 et 1 au-dessus de 0.

- 2) c) Les variables $U = X^2$ et $V = -Y$ sont indépendantes, comme transformations séparées des variables indépendantes X et Y . Le produit de convolution de leurs densités donne une densité de $W = U + V = X^2 - Y$:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(z - t) dt.$$

L'intégrande est non nul seulement si $0 < t < 1$ et $-1 \leq z - t \leq 0$. La seconde condition

équivalent à $z \leq t \leq z + 1$. Les bornes utiles sont donc l'intersection de ces deux intervalles.

- Pour $z < -1$ ou $z > 1$, l'intersection est vide et $h(z) = 0$.
- Pour $-1 \leq z < 0$, l'intégrale porte de 0 à $z + 1$, et $h(z) = \int_0^{z+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{z+1}$.
- Pour $0 \leq z \leq 1$, l'intégrale porte de z à 1, et $h(z) = \int_z^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{z}$.

Les intégrales ayant une borne 0 sont impropres mais convergent, puisque la primitive sur $]0, +\infty[$ est $\sqrt{t}$ et tend vers 0 en 0^+ .

Ainsi, la fonction de l'énoncé est bien une densité de $X^2 - Y$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0 où les deux expressions donnent 1.

Comme contrôle de normalisation :

$$\int_{-1}^0 \sqrt{z+1} dz = \frac{2}{3}, \quad \int_0^1 (1 - \sqrt{z}) dz = \frac{1}{3}.$$

Le premier calcul utilise simplement la primitive $\frac{2}{3}(z+1)^{3/2}$; la somme des deux intégrales vaut bien 1.

- 2) d) D'après 1), la matrice aléatoire M est diagonalisable exactement lorsque $Y < X^2$, soit $W > 0$.

La variable W est à densité, donc $P(W = 0) = 0$, et :

$$P(M \text{ diagonalisable}) = P(W > 0) = \int_0^1 (1 - \sqrt{z}) dz = \left[z - \frac{2}{3}z^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2

- 1) L'intégration par parties est effectuée sur le segment $[a, b]$. La fonction f est de classe C^1 , et une primitive de $t \mapsto \cos(\lambda t)$ est $\sin(\lambda t)/\lambda$, puisque $\lambda > 0$.

Ainsi :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \left[\frac{f(t) \sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.$$

La continuité de f' sur le segment assure l'existence d'un maximum fini

$K = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. En utilisant $|\sin| \leq 1$:

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + (b-a)K}{\lambda}.$$

La borne tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Le théorème d'encadrement donne donc la limite demandée.

- 2) a) La formule d'addition rappelée, appliquée à $kt + t/2$ et $kt - t/2$, donne :

$$\cos(kt + t/2) = \cos(kt) \cos(t/2) - \sin(kt) \sin(t/2),$$

$$\cos(kt - t/2) = \cos(kt) \cos(t/2) + \sin(kt) \sin(t/2).$$

La seconde formule utilise aussi la parité de cosinus et l'imparité de sinus. En additionnant :

$$\cos(t/2) \cos(kt) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) \right).$$

- 2) b) On multiplie l'identité précédente par $(-1)^k$ et on somme de 1 à n . Posons $c_k = \cos((2k+1)t/2)$ pour $k \geq 0$. On obtient :

$$2 \cos(t/2) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \sum_{k=1}^n (-1)^k c_k + \sum_{k=1}^n (-1)^k c_{k-1}.$$

Dans la seconde somme, le changement d'indice $r = k - 1$ donne

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} c_r.$$

Les termes d'indices 1 à $n - 1$ s'annulent avec ceux de la première somme. Il reste $(-1)^n c_n - c_0$.

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$:

$$\cos(t/2) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos(t/2) \right).$$

Le raisonnement est un télescopage de sommes finies ; aucune série infinie n'est manipulée ici.

2) c) Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq t/2 \leq 1/2 < \pi/2$, donc $\cos(t/2) > 0$. La division dans l'identité de 2) b) est permise et donne :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = (-1)^n \frac{\cos((2n+1)t/2)}{2 \cos(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

On intègre sur $[0, 1]$. La somme étant finie, la linéarité de l'intégrale est applicable. Pour chaque $k \geq 1$:

$$\int_0^1 \cos(kt) dt = \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^1 = \frac{\sin k}{k}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos((2n+1)t/2)}{2 \cos(t/2)} dt - \frac{1}{2}.$$

- 3) Posons $\psi(t) = 1/(2 \cos(t/2))$ sur $[0, 1]$. Son dénominateur est strictement positif sur ce segment. Elle est de classe C^1 , avec :

$$\psi'(t) = \frac{\sin(t/2)}{4 \cos^2(t/2)}.$$

La question 1), avec $a = 0, b = 1$ et $\lambda_n = (2n + 1)/2 \rightarrow +\infty$, donne :

$$\int_0^1 \psi(t) \cos(\lambda_n t) dt \rightarrow 0.$$

Multiplier par $(-1)^n$ ne change pas la valeur absolue ; le produit tend donc aussi vers 0.

Par 2) c), les sommes partielles de la série tendent vers $-1/2$.

La série est convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Cette démonstration n'utilise ni un critère général de séries trigonométriques ni un échange entre série infinie et intégrale.

Exercice 3

- 1) a) Si f est un automorphisme, il est injectif et surjectif. Par injectivité, $\text{Ker}(f) = \{0\}$; par surjectivité, $\text{Im}(f) = E$.

Ainsi, $E = \{0\} \oplus E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

- 1) b) Pour $x = x_F + x_G$, le vecteur $s(x) = x_F - x_G$ a pour composante dans F le vecteur x_F et pour composante dans G le vecteur $-x_G$. Par définition de s :

$$s^2(x) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x.$$

Donc $s^2 = \text{Id}_E$. L'endomorphisme s est inversible, d'inverse lui-même. C'est un automorphisme, et 1) a) donne $E = \text{Ker}(s) \oplus \text{Im}(s)$.

En particulier, $\text{Ker}(s) = \{0\}$ et $\text{Im}(s) = E$; les sous-espaces F et G de sa définition ne sont pas son noyau et son image.

2) a) Si $f = 0$, alors $\text{Ker}(f) = E$ et $\text{Im}(f) = \{0\}$. Donc $E = E \oplus \{0\} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

2) b) (i) L'espace est de dimension finie et f n'est pas bijectif. Le théorème du rang implique que son noyau contient un vecteur non nul; 0 est donc valeur propre.

Puisque f est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. Si toutes les valeurs propres étaient nulles, f annulerait tous les vecteurs de cette base et serait l'endomorphisme nul, contrairement à l'hypothèse.

Il existe donc au moins une valeur propre non nulle.

2) b) (ii) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre et soit $v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. L'égalité $f(v) = \lambda v$ donne :

$$v = f(v/\lambda).$$

Ainsi, $v \in \text{Im}(f)$. Le sous-espace propre associé à toute valeur propre non nulle est donc inclus dans l'image.

2) b) (iii) Posons H la somme des espaces propres associés aux valeurs propres non nulles. La diagonalisabilité et la somme directe des espaces propres donnent :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus H.$$

La question (ii) implique $H \subset \text{Im}(f)$. De plus :

$$\dim H = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = \text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f).$$

L'inclusion entre ces sous-espaces de même dimension est donc une égalité. On obtient $H = \text{Im}(f)$, puis :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$

2) c) Choisissons une base propre $(e_1, \dots, e_d)$, où $d = \dim E$, en plaçant d'abord les vecteurs de valeur propre 0. Si leur nombre est r , la matrice de f est :

$$D = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{r \text{ termes}}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_d),$$

avec $\lambda_j \neq 0$ pour $j > r$. Sous les hypothèses de 2) b), $1 \leq r < d$.

Pour

$$v = \sum_{j=1}^d \alpha_j e_j,$$

on a

$$f(v) = \sum_{j=r+1}^d \lambda_j \alpha_j e_j.$$

Ce vecteur est nul si et seulement si $\alpha_j = 0$ pour chaque $j > r$. Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Les images de $e_1, \dots, e_r$ sont nulles et celles des autres vecteurs sont les multiples non nuls $\lambda_j e_j$. Elles engendrent donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d).$$

Ces sous-espaces sont engendrés par les deux parties complémentaires d'une même base. Leur somme est directe et égale à E . Cette preuve par coordonnées retrouve le résultat de 2) b).

3) a) (i) Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $y \in \text{Ker}(f)$, $f(y) = 0$.

Donc $f^2(x) = f(y) = 0$, ce qui établit les deux propriétés demandées pour ce même vecteur x .

3) a) (ii) Pour tout $k \geq 2$, $f^k(x) = f^{k-2}(f^2(x)) = 0$; pour $k = 2$, f^0 désigne l'identité.

Comme P est annulateur, $P(f) = 0$. En appliquant cette relation à x :

$$0 = P(f)(x) = a_1 f(x) + \sum_{k=2}^p a_k f^k(x) = a_1 y.$$

La somme d'indices 2 à p est vide si $p = 1$, et tous ses termes sont nuls sinon. Puisque $a_1 \neq 0$, on obtient $y = 0$.

Ainsi, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

3) b) Méthode 1 — Théorème du rang.

L'intersection nulle montre que la somme du noyau et de l'image est directe. Le théorème du rang donne :

$$\dim(\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f) = \dim E.$$

Cette somme directe est un sous-espace de E de même dimension que E , donc elle égale E .

Méthode 2 — Décomposition explicite à partir du polynôme.

Posons $R(T) = a_1 + a_2 T + \dots + a_p T^{p-1}$, de sorte que $P(T) = T R(T)$. Pour tout $v \in E$, définissons :

$$v_0 = \frac{1}{a_1} R(f)(v), \quad v_1 = v - v_0.$$

On a $f(v_0) = P(f)(v)/a_1 = 0$, donc $v_0 \in \text{Ker}(f)$. En développant v_1 :

$$v_1 = -\frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^p a_k f^{k-1}(v).$$

Chaque terme est dans l'image de f car $k - 1 \geq 1$. Donc $v_1 \in \text{Im}(f)$. Si $p = 1$, cette somme est nulle et le résultat reste valable.

Ainsi, tout v est somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image. L'intersection ayant été prouvée nulle, la somme est directe.

Les deux méthodes concluent : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. La première utilise seulement les dimensions ; la seconde construit les deux composantes grâce au polynôme annulateur, sans supposer connu un théorème général de décomposition des noyaux.

Problème

Dans le corrigé du problème, posons $m = 2p + 1$. Les scores sont des entiers de 0 à m . Chaque gain est compris entre 0 et $n!$, donc toutes les espérances et les espérances conditionnelles sur un événement de probabilité positive utilisées ci-dessous existent.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes

- 1) Pour une liste de prévisions fixée avant les lancers, chaque prévision a la probabilité $1/2$ d'être correcte. Les indicatrices de réussite sont indépendantes, car les lancers sont indépendants. Le score est donc une somme de m Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$.

Ainsi, pour chaque joueur i :

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right), \quad q_k = \frac{1}{2^m} \binom{m}{k} \quad (k \in \{0, \dots, m\}).$$

Lorsque la liste est aléatoire mais indépendante des lancers, on peut conditionner par chacune des listes possibles. La loi conditionnelle du score est la même loi binomiale pour chaque liste ; la formule des probabilités totales donne donc encore cette loi.

Toutes les probabilités q_k sont strictement positives. Le support des scores est donc

exactement $\{0, \dots, m\}$, et :

$$r_k = \sum_{h=0}^k q_h = \frac{1}{2^m} \sum_{h=0}^k \binom{m}{h}, \quad r_m = 1.$$

- 2) a) Les deux sommes réunies contiennent tous les coefficients binomiaux d'ordre $m = 2p + 1$, sans chevauchement :

$$S_p + T_p = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = (1+1)^{2p+1} = 2^{2p+1},$$

par la formule du binôme.

- 2) b) L'identité de symétrie des coefficients binomiaux donne $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$. Dans T_p , posons $h = m - k$. Quand k parcourt les entiers de $p + 1$ à m , h parcourt ceux de p à 0 . En réordonnant cette somme finie :

$$T_p = \sum_{h=0}^p \binom{m}{h} = S_p.$$

Donc $S_p = T_p$.

- 2) c) Les deux questions précédentes donnent $2S_p = 2^{2p+1}$, donc $S_p = 2^{2p}$.

La formule des probabilités binomiales donne alors :

$$r_p = \frac{S_p}{2^{2p+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ces résultats restent valables pour $p = 0$: $S_0 = T_0 = 1$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

On utilise ici l'indépendance mutuelle des scores annoncée dans l'énoncé. Pour en préciser la justification malgré les lancers communs, conditionnons par une suite donnée de résultats des lancers. Les listes des joueurs sont uniformes et indépendantes. Pour chaque joueur, il existe $\binom{m}{k}$ listes donnant exactement k prévisions correctes ; sa probabilité conditionnelle est donc q_k , indépendamment de la suite de résultats fixée.

Pour des scores $k_1, \dots, k_n$, la probabilité conditionnelle du vecteur de scores est ainsi

$$\prod_{i=1}^n q_{k_i}.$$

Elle est identique pour chaque suite de lancers. Par probabilités totales, la probabilité non conditionnelle vaut aussi ce produit. Les scores sont donc bien mutuellement indépendants.

- 1) Question adaptée au programme actuel : le gain nul, oublié dans le support annoncé par le PDF, est rétabli.

Si J_1 perd, son gain est 0. S'il gagne avec exactement j autres joueurs, le nombre de gagnants est $j + 1$, où $0 \leq j \leq n - 1$, et il reçoit $n!/(j + 1)$.

Toutes ces valeurs sont effectivement possibles. Pour un j donné, on peut avoir $X_1 = m$, exactement j autres joueurs de score m , et tous les autres de score 0. L'indépendance et la positivité de q_m et q_0 donnent une probabilité strictement positive à cette configuration.

Le gain nul est aussi possible : la configuration $X_1 = 0$ et $X_2 = m$, avec $m \geq 1$, a une probabilité strictement positive et fait perdre J_1 .

Ainsi :

$$G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

- 2) a) L'événement $[X_1 = 0]$ a probabilité $q_0 > 0$, donc on peut conditionner par cet événement. Si J_1 a un score nul, il ne peut être gagnant que si tous les autres scores

sont également nuls.

Dans ce cas, les n joueurs gagnent et son gain vaut $n!/n$. Réciproquement, c'est la seule manière pour lui de recevoir ce gain sachant $X_1 = 0$.

L'indépendance des scores donne :

$$P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = P(X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = (q_0)^{n-1}.$$

2) b) Si $0 \leq j \leq n-2$, recevoir $n!/(j+1)$ signifie gagner avec moins de n gagnants.

Mais sachant $X_1 = 0$, gagner impose que tous les scores soient nuls, et donc que les n joueurs soient gagnants. L'événement demandé est impossible sous cette condition.

Ainsi : $P_{(X_1=0)}(G_1 = n!/(j+1)) = 0$ pour les indices annoncés.

2) c) Sachant $X_1 = 0$, le gain vaut $n!/n$ avec probabilité q_0^{n-1} et 0 avec probabilité $1 - q_0^{n-1}$. Son espérance conditionnelle est donc :

$$E(G_1 \mid [X_1 = 0]) = \frac{n!}{n} q_0^{n-1} + 0(1 - q_0^{n-1}) = (n-1)! q_0^{n-1}.$$

Le rétablissement du gain nul ne modifie pas la valeur de cette espérance, mais il est indispensable pour décrire correctement la loi.

3) a) Fixons $k \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Puisque $q_k > 0$, on peut conditionner par $[X_1 = k]$. Les scores des autres joueurs gardent leur loi et leur indépendance.

Pour que J_1 reçoive $n!/(j+1)$, il faut et il suffit que exactement j des $n-1$ autres joueurs aient le score k , et que les autres aient un score strictement inférieur à k .

Il y a $\binom{n-1}{j}$ façons de choisir les joueurs ex æquo. Pour un choix donné, l'indépendance donne la probabilité $q_k^j r_{k-1}^{n-1-j}$. Les choix donnent des événements disjoints. Ainsi :

$$P_{(X_1=k)}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j} q_k^j r_{k-1}^{n-1-j}.$$

Le gain nul correspond à l'existence d'au moins un autre score supérieur à k , de probabilité conditionnelle $1 - r_k^{n-1}$. En sommant les probabilités des gains positifs par le binôme, on retrouve bien r_k^{n-1} .

3) b) Méthode 1 — Identité binomiale demandée par l'énoncé.

Par la formule factorielle des coefficients binomiaux :

$$\frac{1}{j+1} \binom{n-1}{j} = \frac{(n-1)!}{(j+1)!(n-1-j)!} = \frac{1}{n} \binom{n}{j+1}.$$

Le gain nul ne contribue pas à l'espérance. La formule de 3) a) donne donc :

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \binom{n-1}{j} q_k^j r_{k-1}^{n-1-j},$$

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} q_k^j r_{k-1}^{n-1-j}.$$

Comme $q_k > 0$, on peut faire apparaître la puissance q_k^{j+1} en divisant par q_k . Avec $\ell = j+1$:

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = \frac{(n-1)!}{q_k} \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} q_k^\ell r_{k-1}^{n-\ell}.$$

La somme est la formule du binôme privée de son terme d'indice 0. Elle vaut

$(q_k + r_{k-1})^n - r_{k-1}^n$. Or $q_k + r_{k-1} = r_k$. Ainsi :

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = (n-1)! \frac{r_k^n - r_{k-1}^n}{q_k}.$$

Méthode 2 — Intégration d'un polynôme pour traiter le facteur de partage.

Pour chaque entier $j \geq 0$, $1/(j+1) = \int_0^1 t^j dt$. Dans la formule d'espérance issue de 3) a), la somme contient seulement n termes; on peut donc utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = n! \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (q_k t)^j r_{k-1}^{n-1-j} dt.$$

Le binôme donne

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (q_k t)^j r_{k-1}^{n-1-j} = (r_{k-1} + q_k t)^{n-1}.$$

Puisque $q_k > 0$, une primitive de ce polynôme est $(r_{k-1} + q_k t)^n / (n q_k)$. Ainsi :

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = n! \left[\frac{(r_{k-1} + q_k t)^n}{n q_k} \right]_0^1 = (n-1)! \frac{r_k^n - r_{k-1}^n}{q_k}.$$

La première méthode transforme le coefficient binomial; la seconde transforme le facteur $1/(j+1)$ en intégrale et permet de calculer d'autres sommes binomiales pondérées.

3) c) Pour $k = 0$, on a $r_0 = q_0 > 0$ et on pose $r_{-1} = 0$. Le membre de droite devient :

$$(n-1)! \frac{q_0^n - 0^n}{q_0} = (n-1)! q_0^{n-1}.$$

Puisque $n \geq 3$, $0^n = 0$. On retrouve exactement la valeur de 2) c). La formule est donc valable pour tous les scores $k = 0, \dots, m$.

4) Méthode 1 — Espérance totale et somme télescopique demandées.

Les événements $[X_1 = k], 0 \leq k \leq m$, forment un système complet, de probabilités $q_k > 0$. Comme G_1 est borné, la formule de l'espérance totale s'applique :

$$E(G_1) = \sum_{k=0}^m q_k E(G_1 \mid [X_1 = k]) = (n-1)! \sum_{k=0}^m (r_k^n - r_{k-1}^n).$$

Cette somme finie télescope et vaut $r_m^n - r_{-1}^n = 1$. Donc :

$$E(G_1) = (n-1)!.$$

Méthode 2 — Symétrie des joueurs et conservation du gain total.

Les scores sont indépendants de même loi, et la règle de répartition est inchangée quand on permute les joueurs. Les gains ont donc tous la même loi et la même espérance.

Pour chaque réalisation, il existe au moins un gagnant ; les gagnants se partagent exactement $n!$ et les autres reçoivent 0. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n G_i = n!.$$

Les gains étant bornés, la linéarité de l'espérance donne $nE(G_1) = n!$. On obtient encore $E(G_1) = (n-1)!$.

La première méthode contrôle la loi conditionnelle calculée ; la seconde permet de connaître immédiatement le gain moyen dans tout jeu symétrique où le gain total est fixé.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

Les scores $X_1, X_3, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants de même loi binomiale, par le même raisonnement conditionnel sur les lancers que dans la partie 2. En revanche, X_2 est entièrement déterminé par X_1 : à chaque lancer, exactement une des deux prévisions opposées est correcte.

On a donc $X_2 = m - X_1$ et $Y = \max(X_1, m - X_1)$. Comme Y est une fonction de X_1 , elle est indépendante du vecteur des scores $(X_3, \dots, X_n)$; ceux-ci restent mutuellement indépendants lorsque l'on conditionne par une valeur de Y de probabilité positive.

- 1) a) La relation $X_1 + X_2 = 2p + 1$ implique qu'ils ne peuvent pas tous deux être au plus p , car leur somme serait au plus $2p$. Ils ne peuvent pas non plus être tous deux au moins $p + 1$, car leur somme serait au moins $2p + 2$.

Il y a donc exactement un joueur du groupe de score au moins $p + 1$. L'autre a un score au plus p , et leurs scores ne sont jamais égaux.

- 1) b) La question précédente donne toujours $p + 1 \leq Y \leq m = 2p + 1$.

Réciproquement, pour chaque k de cet intervalle entier, la valeur $X_1 = k$ est possible avec probabilité $q_k > 0$. Dans ce cas, $X_2 = m - k \leq p$, donc $Y = k$.

Ainsi, $Y(\Omega) = \llbracket p + 1, 2p + 1 \rrbracket$.

- 2) Pour $p = 1$, les listes sont (F, P, P) et (P, F, F) , et les scores ont toujours pour somme 3.

Si les résultats coïncident avec l'une des deux listes, le joueur correspondant a le score 3 et l'autre le score 0 ; donc $Y = 3$.

Pour les six autres suites de résultats, aucune des deux listes n'est entièrement correcte. Les scores possibles sont alors $(1, 2)$ ou $(2, 1)$, puisque leur somme vaut 3. Donc $Y = 2$.

Cela vérifie exactement les deux cas annoncés dans l'exemple.

- 3) Pour $k \geq p + 1$, les événements $[X_1 = k]$ et $[X_1 = m - k]$ sont disjoints, car $m - k \leq p < k$. De plus :

$$[Y = k] = [X_1 = k] \cup [X_1 = m - k].$$

La symétrie des probabilités binomiales donne $q_{m-k} = q_k$. Ainsi :

$$P(Y = k) = q_k + q_{m-k} = 2q_k.$$

Toutes ces probabilités sont strictement positives. Leur somme vaut $2(1 - r_p) = 1$, ce qui contrôle la loi.

- 4) Question adaptée au programme actuel : le support du gain du groupe est rectifié, en distinguant le cas $p = 0$ et le cas $p \geq 1$.

Les deux joueurs du groupe ont toujours des scores différents. Si le groupe gagne, seul son meilleur joueur peut faire partie des gagnants du jeu. Il peut être ex æquo avec j des $n - 2$ joueurs extérieurs, où $0 \leq j \leq n - 2$. Le groupe reçoit alors $n!/(j + 1)$ avant son partage interne.

Toutes ces valeurs positives sont possibles : on peut avoir $X_1 = m$, $X_2 = 0$, exactement j joueurs extérieurs de score m et les autres de score 0. L'indépendance des scores $X_1, X_3, \dots, X_n$ et la positivité de leurs probabilités assurent que chaque configuration est de probabilité positive.

Si $p = 0$, il n'y a qu'un lancer. Le meilleur score du groupe est toujours $Y = 1$, qui est le score maximal possible pour tout joueur. Le groupe gagne donc toujours, éventuellement à égalité avec des joueurs extérieurs. Le gain nul est impossible.

Si $p \geq 1$, le gain nul est possible. Par exemple, on peut avoir $X_1 = p + 1$, $X_2 = p$ et $X_3 = m$. Alors $Y = p + 1 < m$ et le groupe perd. Cet événement a une probabilité positive, et un joueur extérieur existe puisque $n \geq 3$.

On conclut :

$$G'(\Omega) = \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \right\} \quad \text{si } p = 0,$$

$$G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1} : j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \right\} \quad \text{si } p \geq 1.$$

- 5) a) Question adaptée au programme actuel : l'indice j parcourt $\llbracket 0, n-2 \rrbracket$, car il n'existe que $n-2$ joueurs extérieurs au groupe. La borne $n-1$ du PDF conduisait notamment à un exposant négatif.

Fixons $k \in \llbracket p+1, m \rrbracket$. La probabilité $P(Y = k) = 2q_k$ est positive, donc le conditionnement est défini. Le meilleur joueur du groupe a le score k et son partenaire a le score $m-k < k$.

Pour que le groupe reçoive $n!/(j+1)$, il faut et il suffit que exactement j des $n-2$ autres joueurs aient le score k , et que tous les autres joueurs extérieurs aient un score inférieur à k .

Les scores extérieurs sont indépendants entre eux et indépendants de Y . On choisit les j joueurs ex æquo de $\binom{n-2}{j}$ façons. Chaque choix donne la probabilité conditionnelle $q_k^j r_{k-1}^{n-2-j}$, et les événements correspondant aux choix sont disjoints. D'où :

$$P_{(Y=k)} \left(G' = \frac{n!}{j+1} \right) = \binom{n-2}{j} q_k^j r_{k-1}^{n-2-j}.$$

La probabilité conditionnelle du gain nul est $1 - r_k^{n-2}$: le groupe perd exactement lorsqu'au moins un joueur extérieur dépasse k . Pour $p = 0$, $k = 1 = m$ et $r_k = 1$, donc cette probabilité est bien nulle.

- 5) b) L'espérance demandée porte sur G' , le gain du groupe ; la lettre G dans la phrase du PDF est rectifiée.

Le gain nul n'a aucune contribution à l'espérance. La loi conditionnelle de 5) a) donne :

$$E(G' \mid [Y = k]) = n! \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j+1} \binom{n-2}{j} q_k^j r_{k-1}^{n-2-j}.$$

La formule factorielle donne, pour $0 \leq j \leq n-2$:

$$\frac{1}{j+1} \binom{n-2}{j} = \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{j+1}.$$

Comme $n!/(n-1) = n(n-2)!$ et $q_k > 0$, en posant $\ell = j+1$ on obtient :

$$E(G' \mid [Y = k]) = \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} q_k^\ell r_{k-1}^{n-1-\ell}.$$

Le binôme transforme la somme en $(q_k + r_{k-1})^{n-1} - r_{k-1}^{n-1} = r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}$. Ainsi :

$$E(G' \mid [Y = k]) = n(n-2)! \frac{r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) Les événements $[Y = k]$, pour $p+1 \leq k \leq m$, forment un système complet, et le gain est borné. L'espérance totale, la question 3) et la formule de 5) b) donnent :

$$E(G') = \sum_{k=p+1}^m 2q_k n(n-2)! \frac{r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}}{q_k},$$

$$E(G') = 2n(n-2)! \sum_{k=p+1}^m (r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}).$$

La somme télescope en $r_m^{n-1} - r_p^{n-1}$. Comme $r_m = 1$ et $r_p = 1/2$ d'après la partie 1 :

$$E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Le résultat est valable pour tout $p \geq 0$, y compris lorsque le groupe ne peut pas perdre. L'espérance ne dépend pas du nombre impair de lancers.

6) b) Méthode 1 — Récurrence demandée par l'énoncé.

On raisonne par récurrence à partir de $n = 3$. À ce rang, $2^{3-1} = 4 > 3$.

Supposons que, pour un entier $n \geq 3$, $2^{n-1} > n$. En multipliant par 2 :

$$2^n > 2n.$$

Or $2n \geq n+1$ pour $n \geq 1$. Donc $2^n > n+1$, ce qui est l'inégalité au rang suivant.

La récurrence donne ainsi $2^{n-1} > n$ pour tout $n \geq 3$.

Méthode 2 — Formule du binôme.

Pour $n \geq 3$, $n - 1 \geq 2$. La formule du binôme donne :

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 1 + (n-1) + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k}.$$

La dernière somme contient au moins son terme d'indice 2, strictement positif. Ainsi, $2^{n-1} > 1 + (n-1) = n$.

La récurrence explique la propagation de l'inégalité; le binôme la démontre directement par la présence de termes supplémentaires positifs.

- 6) c) Par partage équitable à chaque réalisation, $G'_1 = G'_2 = G'/2$. Les espérances existent puisque les gains sont bornés. Par linéarité :

$$E(G'_1) = E(G'_2) = \frac{1}{2}E(G') = n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Dans la stratégie indépendante de la partie 2, $E(G_1) = (n-1)! = (n-1)(n-2)!$. La différence est :

$$E(G'_1) - E(G_1) = (n-2)! \left(n - \frac{n}{2^{n-1}} - (n-1)\right) = (n-2)! \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right).$$

La factorielle est strictement positive et, par 6) b), $n/2^{n-1} < 1$. Cette différence est donc strictement positive.

La stratégie de prévisions opposées suivie d'un partage égal augmente strictement l'espérance de gain de chacun des deux joueurs, pour tout $n \geq 3$ et tout $p \geq 0$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, 1) : énoncé conservé ; la condition de diagonalisation est établie par résolution du système de vecteurs propres et étude des dimensions, sans déterminant ni polynôme caractéristique.
- Exercice 3, 3) : la variable formelle du polynôme est notée T pour la distinguer des variables aléatoires du problème. Les coefficients, les hypothèses et toutes les questions sont conservés.
- Problème, préambule et parties 2 et 3 : les lancers sont explicitement indépendants ; les prévisions aléatoires sont indépendantes des lancers, et « jouer au hasard » est précisé par le choix uniforme d'une liste. Dans la partie 3, l'indépendance des listes de $J_1, J_3, \dots, J_n$ est explicitée, afin de justifier les lois et conditionnements utilisés. Le gain des perdants, égal à 0, est précisé.
- Problème, partie 2, 1) : ajout de 0 à l'ensemble des valeurs de G_1 , car un joueur peut perdre. Cette rectification ne change pas les espérances conditionnelles ultérieures, le gain nul ayant une contribution nulle.
- Problème, partie 3, 4) : rectification du support de G' . Il faut ajouter 0 lorsque $p \geq 1$, puisqu'un joueur extérieur peut battre le meilleur du groupe. Pour $p = 0$, le meilleur du groupe a toujours le score maximal 1 et le gain nul est impossible ; ce cas est traité séparément.
- Problème, partie 3, 5) a) : la borne supérieure de j est ramenée de $n - 1$ à $n - 2$, nombre de joueurs extérieurs au groupe. Tous les exposants sont alors positifs ou nuls et les coefficients binomiaux correspondent aux choix réellement possibles.
- Problème, partie 3, 5) b) : la lettre G dans la phrase de présentation est remplacée par G' , conformément à la variable et à la formule demandées.