



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2006

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id , respectivement θ , l'endomorphisme identité, respectivement nul, de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^m$. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^m$ vérifiant $(f - \lambda_1 \text{id}) \circ (f - \lambda_2 \text{id}) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux réels distincts.

- 1) a) Vérifier que $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \text{id}) - (f - \lambda_2 \text{id})) = \text{id}$.
- b) En déduire que $\mathbb{R}^m = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$.
- c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres. On sera amené à étudier trois cas.

Dans la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2n+1}$. Pour tout entier $d \geq 1$, I_d désigne la matrice identité d'ordre d .

- 2) Pour $n \geq 1$, construire une matrice réelle $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -I_{2n}$. On pourra utiliser des blocs diagonaux d'ordre deux.
- 3) On suppose dans cette question qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2n+1}$. On pose $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ et on note a l'endomorphisme associé à A . Ainsi $a^2 = -\text{id}_E$.
 - a) Soit $v \in E$ non nul. Montrer que la famille $(v, a(v))$ est libre et que $F = \text{Vect}(v, a(v))$ est stable par a .
 - b) En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E , montrer que l'application $\langle x, y \rangle_a = \langle x, y \rangle + \langle a(x), a(y) \rangle$ est un produit scalaire. Établir que, pour tous $x, y \in E$, $\langle a(x), y \rangle_a = -\langle x, a(y) \rangle_a$.
 - c) Montrer que l'orthogonal $G = F^{\perp_a}$, pris pour ce nouveau produit scalaire, est stable par a . Si $n \geq 1$, déterminer sa dimension et vérifier que l'endomorphisme induit sur G a pour carré $-\text{id}_G$.

- d) En traitant d'abord la dimension un, puis en utilisant une récurrence sur n , établir le résultat demandé en dimension $2n + 1$.

Exercice 2

- 1) a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n \geq 1}$, à termes strictement positifs, en posant $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

- b) Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$, puis calculer u_3 .

- 2) Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_j.$$

- 3) a) Établir que $\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$.

- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- c) Donner un équivalent de $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

- d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 4) a) Montrer que $\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}$, où $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$.

b) En utilisant la question 2), déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$, puis montrer que $\binom{2n}{n} = o(4^n)$.

5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que $\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite, de densité φ et de fonction de répartition Φ .

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z , ainsi que son espérance et sa variance.

1) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2) a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

c) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

d) Montrer de même que :

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt.$$

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3) a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de $V(Z)$.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O . Au départ, il est à l'origine, d'abscisse zéro.

S'il est au point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $n + 1$, il sera au point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou au point d'abscisse zéro avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$. Ces probabilités de transition ne dépendent du passé que par la position actuelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n , avec $X_0 = 0$. On admet que chaque X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et l'on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie 1 : étude de la variable X_n

1) Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1 .

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

3) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1).$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}.$$

c) En remarquant que

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1,$$

montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 , puis déterminer u_2 et u_3 .

4) a) En remarquant que la relation de 3)a) peut s'écrire

$(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n.$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)$ sous forme d'une somme de certains termes de (u_n) .

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$$

et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.$$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine

On note T l'instant du premier retour du mobile à l'origine, sans compter sa position au départ. On admet que T est une variable aléatoire sur le même espace et on pose $T = 0$ s'il ne revient jamais en O .

Par exemple, les abscisses successives après le départ 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1 donnent $T = 1$, tandis que 1, 2, 3, 0, 0, 1 donnent $T = 4$.

1) a) Écrire l'événement $(T = k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, à partir d'événements portant sur les positions successives du mobile.

b) Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

c) Trouver les réels a, b tels que $\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. Justifier ensuite $P(T = 0) = 0$ et expliquer ce que cela signifie pour le mobile.

2) L'espérance de T existe-t-elle ?

Partie 3 : informatique

- 1) Compléter les deux blancs du programme Python afin d'afficher les valeurs $u_0, \dots, u_n$ et la moyenne théorique $E(X_n)$, conservée dans la variable `e`. L'entier fixé est $n = 100$.

Python

```
import numpy as np

n = 100

u = np.zeros(n + 1)

u[0] = 1

print(u[0])

e = 0

for k in range(1, n + 1):
    s = 0
    for i in range(1, k + 1):
        s = ...
    u[k] = 1 - s
    print(u[k])
    e = ...

print(e)
```

- 2) a) Remplir les deux blancs du programme pour simuler le premier retour et afficher son instant. La commande `rd.randint(k)` tire uniformément un entier de zéro à $k - 1$ inclus.

Python

```
import numpy.random as rd

T = 0

hasard = 1

while hasard != ...:
    T = T + 1
```

```
hasard = rd.randint(...)  
print(T)
```

b) La boucle `while` se termine-t-elle avec certitude après un nombre fini d'itérations ?