



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

La question 1) est formulée sur un espace vectoriel réel. Les questions 2) et 3) sont reformulées pour conserver l'étude des matrices dont le carré vaut l'opposé de l'identité, en utilisant seulement l'algèbre linéaire réelle et les produits scalaires.

1) a) Identité d'endomorphismes.

Question adaptée au programme actuel : les scalaires et l'espace vectoriel sont réels.

On calcule la différence :

$$(f - \lambda_1 \text{id}) - (f - \lambda_2 \text{id}) = (\lambda_2 - \lambda_1) \text{id}.$$

Les deux scalaires étant distincts, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. En divisant par cette constante, on obtient l'identité demandée.

1) b) Somme directe des deux noyaux.

Question adaptée au programme actuel : on démontre directement la décomposition réelle, sans invoquer de résultat général supplémentaire.

Notons $E_1 = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$ et $E_2 = \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$.

Si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, cela impose $x = 0$. Les deux noyaux sont donc en somme directe.

Il reste à prouver qu'ils engendrent tout l'espace. Pour $x \in \mathbb{R}^m$, posons :

$$x_1 = \frac{(f - \lambda_2 \text{id})(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad x_2 = \frac{(f - \lambda_1 \text{id})(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

La question 1)a) donne $x = x_1 + x_2$. L'hypothèse $(f - \lambda_1 \text{id}) \circ (f - \lambda_2 \text{id}) = \theta$ donne :

$$(f - \lambda_1 \text{id})(x_1) = 0,$$

donc $x_1 \in E_1$. De plus, les deux facteurs commutent : dans les deux ordres, leur produit vaut $f^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)f + \lambda_1\lambda_2\text{id}$. On a donc aussi $(f - \lambda_2\text{id})(x_2) = 0$, d'où $x_2 \in E_2$.

Chaque vecteur est ainsi somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 , et cette somme est directe. Conclusion :

$$\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2.$$

1) c) Diagonalisation et trois cas.

Question adaptée au programme actuel : la diagonalisation est réelle.

En réunissant une base de E_1 et une base de E_2 , on obtient une base de $\mathbb{R}^m$ dans laquelle f est diagonale. Cela prouve la diagonalisation à partir de la décomposition démontrée en 1)b).

Pour un vecteur propre non nul x de valeur propre λ , l'hypothèse donne $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)x = 0$. Toute valeur propre est donc égale à λ_1 ou à λ_2 . Les trois cas sont les suivants.

Si $f = \lambda_1\text{id}$, le seul élément du spectre est λ_1 , car $m \geq 1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Si $f = \lambda_2\text{id}$, le seul élément du spectre est λ_2 .

Si f n'est égal à aucun de ces deux endomorphismes, les espaces E_1 et E_2 sont tous deux non nuls. En effet, si $E_1 = \{0\}$, la décomposition impose $E_2 = \mathbb{R}^m$, donc $f = \lambda_2\text{id}$; l'autre cas se traite de la même façon. Les deux valeurs λ_1 et λ_2 sont donc effectivement propres.

Dans tous les cas, f est diagonalisable; le spectre est respectivement $\{\lambda_1\}$, $\{\lambda_2\}$ ou $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

2) Construction en dimension paire.

Question adaptée au programme actuel : on construit une matrice réelle en dimension paire.

Pour $n \geq 1$, considérons le bloc réel $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La multiplication donne :

$$J_0^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On prend J dont les n blocs diagonaux sont tous J_0 , les autres coefficients étant nuls. Son carré a pour blocs diagonaux $J_0^2 = -I_2$, donc $J^2 = -I_{2n}$.

Cette construction montre que l'équation possède des solutions réelles dans toute dimension paire strictement positive.

3) a) Un plan stable.

Question adaptée au programme actuel : l'argument utilise un sous-espace réel stable.

On suppose $a^2 = -\text{id}_E$ et l'on choisit $v \neq 0$. Si $a(v)$ était un multiple réel de v , il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que $a(v) = tv$. En appliquant a , on obtiendrait :

$$-v = a^2(v) = t^2v,$$

donc $(t^2 + 1)v = 0$. Comme $t^2 + 1 > 0$ et $v \neq 0$, c'est impossible. La famille $(v, a(v))$ est donc libre et $F = \text{Vect}(v, a(v))$ est de dimension deux.

Enfin, $a(v) \in F$ et $a(a(v)) = -v \in F$. Par linéarité, l'image de tout vecteur de F appartient à F . Le plan F est stable par a .

En dimension un, l'existence de cette famille libre fournirait déjà une contradiction ; la récurrence finale traitera explicitement ce cas initial.

3) b) Produit scalaire adapté à a .

Question adaptée au programme actuel : on construit un produit scalaire réel.

On pose $\langle x, y \rangle_a = \langle x, y \rangle + \langle a(x), a(y) \rangle$. La linéarité de a et la bilinéarité du produit scalaire canonique donnent la bilinéarité de cette application. La symétrie résulte de celle de chacun des deux termes.

Pour tout x , on a :

$$\langle x, x \rangle_a = \|x\|^2 + \|a(x)\|^2 \geq 0.$$

Si $x \neq 0$, le premier terme est strictement positif ; la somme est donc strictement positive. On a bien un produit scalaire.

En utilisant $a^2 = -\text{id}$:

$$\langle a(x), y \rangle_a = \langle a(x), y \rangle + \langle a^2(x), a(y) \rangle = \langle a(x), y \rangle - \langle x, a(y) \rangle,$$

$$-\langle x, a(y) \rangle_a = -\langle x, a(y) \rangle - \langle a(x), a^2(y) \rangle = -\langle x, a(y) \rangle + \langle a(x), y \rangle.$$

Les deux expressions sont égales. Ainsi $\langle a(x), y \rangle_a = -\langle x, a(y) \rangle_a$ pour tous $x, y \in E$.

3) c) Un supplémentaire stable.

Question adaptée au programme actuel : on utilise l'orthogonal du plan stable pour le produit scalaire précédent.

Posons $G = F^{\perp_a}$. Pour $x \in G$ et $y \in F$, la relation de 3)b) donne :

$$\langle a(x), y \rangle_a = -\langle x, a(y) \rangle_a = 0,$$

car $a(y) \in F$ par stabilité de F . Ainsi $a(x)$ est orthogonal à tout F , donc $a(x) \in G$. Le sous-espace G est stable.

Dans un espace euclidien, un sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires. On a donc $E = F \oplus G$ et, pour $n \geq 1$:

$$\dim G = \dim E - \dim F = (2n + 1) - 2 = 2n - 1.$$

La stabilité définit un endomorphisme $a_G : G \rightarrow G$. Pour tout $x \in G$, $a_G^2(x) = a^2(x) = -x$. Ainsi $a_G^2 = -\text{id}_G$.

3) d) Impossibilité en dimension impaire.

Question adaptée au programme actuel : la contradiction est obtenue par une récurrence entièrement réelle.

On démontre, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, qu'aucun endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension $2n + 1$ ne peut avoir pour carré l'opposé de l'identité.

Initialisation : en dimension un, un endomorphisme est représenté dans une base par une matrice (t) , avec $t \in \mathbb{R}$. Son carré vaut (t^2) ; il ne peut être égal à (-1) , car $t^2 \geq 0$.

Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons l'impossibilité établie en dimension $2n - 1$. S'il existait un endomorphisme a en dimension $2n + 1$ avec $a^2 = -\text{id}$, les questions 3)a) à 3)c) fourniraient un sous-espace stable G de dimension $2n - 1$ et un endomorphisme induit a_G vérifiant $a_G^2 = -\text{id}_G$. En choisissant une base réelle de G , cela contredirait l'hypothèse de récurrence.

La propriété est établie pour tout n . En particulier, il n'existe aucune matrice réelle A d'ordre $2n + 1$ telle que $A^2 = -I_{2n+1}$. La question 2) montre que la distinction entre dimensions paires et impaires est effective.

Exercice 2

1) a) Définition, unicité et positivité.

Le premier terme $u_1 = 1$ est fixé et strictement positif. Si les termes $u_1, \dots, u_{n-1}$ ont été définis et sont strictement positifs, leur somme est strictement positive et $2n - 1 > 0$. La

formule définit donc un unique réel $u_n > 0$.

Par récurrence, la suite existe, est unique et a tous ses termes strictement positifs.

1) b) Premiers termes.

En appliquant la définition aux indices deux et trois :

$$u_2 = \frac{u_1}{3} = \frac{1}{3}, \quad u_3 = \frac{u_1 + u_2}{5} = \frac{1 + 1/3}{5} = \frac{4}{15}.$$

2) Nature de la série et limite des sommes partielles.

Méthode 1 — Comparaison directe.

Pour $n \geq 2$, la positivité des termes donne

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geq u_1 = 1.$$

Donc :

$$u_n \geq \frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}.$$

La série harmonique

$$\sum 1/n$$

diverge. La comparaison de séries à termes positifs prouve donc la divergence de

$$\sum u_n.$$

Ses sommes partielles sont croissantes et non convergentes ; elles tendent vers $+\infty$.

Méthode 2 — Contradiction par un équivalent.

Supposons la série convergente et notons sa somme S . Comme les termes sont positifs et $u_1 = 1$, on a $S \geq 1$. La définition donne :

$$u_n = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} u_j}{2n-1} \sim \frac{S}{2n}.$$

La série de droite diverge, puisque $S > 0$. Le critère d'équivalence des séries positives imposerait alors la divergence de

$$\sum u_n,$$

contradiction.

Dans les deux approches :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_j = +\infty.$$

La première méthode donne une minoration immédiate ; la seconde est utile lorsqu'une relation entre terme général et sommes partielles permet de tester une hypothèse de convergence.

3) a) Relation entre deux termes consécutifs.

Pour $n \geq 2$, la définition donne

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_j = (2n - 1)u_n.$$

En ajoutant u_n :

$$\sum_{j=1}^n u_j = 2nu_n.$$

En appliquant ensuite la définition à $n + 1$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^n u_j = \frac{2n}{2n+1} u_n.$$

Le domaine $n \geq 2$ est important : cette relation n'est pas vraie pour $n = 1$ avec le premier terme imposé dans le sujet.

3) b) Convergence de la suite.

Pour $n \geq 2$, le quotient $2n/(2n+1)$ appartient à $]0, 1[$. Puisque $u_n > 0$, la relation précédente entraîne $0 < u_{n+1} < u_n$. De plus $u_2 = 1/3 < u_1 = 1$.

La suite entière est donc strictement décroissante et minorée par zéro. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Cette question ne permet pas encore d'identifier ℓ : le quotient des termes tend vers un, et le passage à la limite dans la récurrence donnerait seulement $\ell = \ell$.

3) c) Série des logarithmes des rapports.

Les termes u_n et u_{n+1} sont strictement positifs, donc le logarithme du rapport est défini.

Pour $n \geq 2$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Le développement limité usuel $\ln(1+t) = t + o(t)$ en zéro donne, en l'évaluant pour $t = 1/(2n)$:

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \sim \frac{1}{2n}.$$

Les termes sont positifs, et la série de référence est divergente. La série des logarithmes diverge donc, avec des sommes partielles tendant vers $+\infty$.

3) d) Limites de $\ln(u_n)$ et de u_n .

Pour $N \geq 2$, la somme des différences de logarithmes est télescopique :

$$\sum_{n=2}^N \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \sum_{n=2}^N (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) = \ln(u_2) - \ln(u_{N+1}).$$

La somme de gauche tend vers $+\infty$ d'après 3)c). Il en résulte que $\ln(u_{N+1}) \rightarrow -\infty$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La seconde conclusion utilise $u_n = \exp(\ln(u_n))$ et la limite de l'exponentielle en $-\infty$. Une suite positive peut donc tendre vers zéro tout en définissant une série divergente.

4) a) Expression par un coefficient binomial.

Méthode 1 — Vérification par récurrence.

Pour $n = 2$, on a $4^2 / (4 \times 2 \binom{4}{2}) = 16/48 = 1/3 = u_2$. La formule des factorielles donne :

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Si $u_n = 4^n / (4n \binom{2n}{n})$, alors la récurrence de 3)a) donne :

$$u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}} = \frac{4^n}{2(2n+1) \binom{2n}{n}} = \frac{4^{n+1}}{4(n+1) \binom{2n+2}{n+1}}.$$

La formule est donc établie pour tout $n \geq 2$.

Méthode 2 — Produit des rapports.

En itérant la relation de 3)a), pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{3} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{2j}{2j+1}.$$

Pour $n = 2$, le produit est vide et vaut un. Les produits pairs et impairs s'expriment par les factorielles :

$$\prod_{j=2}^{n-1} 2j = 2^{n-2} (n-1)!,$$

$$\prod_{j=2}^{n-1} (2j+1) = \frac{1}{3} (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) = \frac{(2n)!}{3 \times 2^n n!}.$$

La dernière égalité vient de la décomposition de $(2n)!$ en produit des facteurs pairs, égal à $2^n n!$, et des facteurs impairs. Par conséquent :

$$u_n = \frac{1}{3} \frac{2^{n-2} (n-1)! \times 3 \times 2^n n!}{(2n)!} = \frac{4^n (n!)^2}{4n (2n)!} = \frac{4^n}{4n \binom{2n}{n}}.$$

La récurrence vérifie une expression proposée ; le produit des rapports permet de la retrouver. Dans les deux cas, la formule est utilisée seulement pour $n \geq 2$.

4) b) Limite de nu_n et comparaison à 4^n .

En reprenant la définition, pour $n \geq 2$:

$$nu_n = \frac{n}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

Le premier facteur tend vers $1/2 > 0$, tandis que la somme tend vers $+\infty$ d'après la question 2). Donc $nu_n \rightarrow +\infty$.

La formule de 4)a) s'écrit :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{4nu_n} \rightarrow 0.$$

Conclusion

$$\binom{2n}{n} = o(4^n).$$

5) Seconde comparaison asymptotique.

Pour $n \geq 2$, la formule de 4)a) donne :

$$\frac{4^n/n}{\binom{2n}{n}} = 4u_n.$$

D'après 3)d), $u_n \rightarrow 0$. Le quotient tend donc vers zéro, ce qui prouve :

$$\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right).$$

Les deux comparaisons ont été établies à partir de la suite, sans utiliser de formule asymptotique extérieure au référentiel.

Exercice 3

On utilise la densité normale $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ et sa fonction de répartition Φ . La fonction φ est paire et strictement positive ; par symétrie, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout réel x , et $\Phi(0) = 1/2$.

1) a) Fonction de répartition de Z .

Pour tout réel x , le maximum est inférieur ou égal à x exactement lorsque ses deux arguments le sont. Ainsi :

$$(Z \leq x) = (X \leq x) \cap (Y \leq x).$$

Ces événements sont indépendants puisque X et Y le sont. Il vient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = \Phi(x)^2.$$

Les événements ainsi obtenus sont des événements de l'espace probabilisé, ce qui permet de considérer Z comme une variable aléatoire réelle. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe C^1 et $\Phi' = \varphi$. La fonction F_Z est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

Z est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition $F_Z = \Phi^2$.

b) Densité de Z .

En dérivant la fonction de répartition trouvée en a), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F'_Z(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

Cette fonction est continue et positive. Pour vérifier sa normalisation, on intègre sur un segment puis on utilise les limites de la fonction de répartition normale :

$$\int_A^B f(x) dx = \Phi(B)^2 - \Phi(A)^2 \rightarrow 1$$

lorsque $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$. Ainsi f est bien une densité de Z .

2) a) Intégrale normale de référence.

La densité φ est normalisée. Donc l'intégrale suivante converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

b) Intégrale de e^{-t^2} .

Sur tout segment $[A, B]$, le changement de variable affine $t = \sqrt{2}s$ donne :

$$\int_A^B e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \int_{A/\sqrt{2}}^{B/\sqrt{2}} e^{-s^2} ds.$$

Le membre de gauche admet une limite finie lorsque les bornes tendent vers les deux infinis. Il en est donc de même du membre de droite, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

La parité de l'intégrande donne également :

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c) Intégrale sur la demi-droite positive.

On effectue d'abord l'intégration par parties sur le segment $[0, B]$, avec $B > 0$. Les fonctions φ et Φ y sont de classe C^1 , $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ et $\Phi'(x) = \varphi(x)$. Ainsi :

$$\int_0^B x f(x) dx = -2 \int_0^B \varphi'(x) \Phi(x) dx = -2[\varphi(x) \Phi(x)]_0^B + 2 \int_0^B \varphi(x)^2 dx.$$

Comme $\Phi(0) = 1/2$, $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ et $2\varphi(x)^2 = e^{-x^2}/\pi$, cela s'écrit :

$$\int_0^B x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 2\varphi(B)\Phi(B) + \frac{1}{\pi} \int_0^B e^{-x^2} dx.$$

Or $0 \leq \Phi(B) \leq 1$ et $\varphi(B) \rightarrow 0$, donc $\varphi(B)\Phi(B) \rightarrow 0$. L'intégrale du dernier terme

converge d'après b). Par passage à la limite, on établit la convergence de l'intégrale demandée et l'identité :

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

d) Intégrale sur la demi-droite négative et espérance.

Méthode 1 — Intégration par parties imposée.

Pour $A < 0$, on effectue la même intégration par parties sur le segment $[A, 0]$:

$$\int_A^0 x f(x) dx = -2[\varphi(x)\Phi(x)]_A^0 + 2 \int_A^0 \varphi(x)^2 dx.$$

On obtient :

$$\int_A^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 2\varphi(A)\Phi(A) + \frac{1}{\pi} \int_A^0 e^{-x^2} dx.$$

Lorsque $A \rightarrow -\infty$, le produit $\varphi(A)\Phi(A)$ tend vers zéro par l'encadrement $0 \leq \Phi(A) \leq 1$, tandis que l'intégrale du dernier terme converge d'après b). Donc :

$$\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Sur la demi-droite positive, $xf(x) \geq 0$; sur la demi-droite négative, $xf(x) \leq 0$. Les deux intégrales calculées sont finies, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx = -\int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx < +\infty.$$

L'espérance de Z existe ainsi avant de la calculer. En additionnant les deux contributions :

$$E(Z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Méthode 2 — Identité du maximum et stabilité de la loi normale.

Cette seconde méthode donne directement l'espérance, sans remplacer les intégrations par parties demandées. Pour tous réels x, y , $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$. Par conséquent :

$$Z = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|).$$

Comme X et Y sont des variables normales indépendantes, $D = X - Y$ suit la loi normale de moyenne zéro et de variance deux. Ainsi $D/\sqrt{2}$ suit la loi normale centrée réduite. Pour une variable N suivant cette dernière loi, la parité de sa densité donne :

$$E(|N|) = 2 \int_0^{+\infty} t\varphi(t) dt = 2\varphi(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

La convergence de cette intégrale découle du calcul sur $[0, B]$,

$$\int_0^B t\varphi(t) dt = \varphi(0) - \varphi(B), \text{ suivi du passage à la limite. Par transfert,}$$

$$E(|D|) = \sqrt{2}E(|N|) = 2/\sqrt{\pi}.$$

Les variables X, Y admettent une espérance absolue finie ; de plus $|Z| \leq |X| + |Y|$.

L'espérance de Z existe donc, et la linéarité appliquée à l'identité précédente fournit :

$$E(Z) = \frac{1}{2}(E(X) + E(Y) + E(|D|)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

La première méthode est adaptée au calcul d'intégrales faisant intervenir $\varphi\Phi$; la seconde exploite une identité réutilisable pour les maxima et la stabilité des normales indépendantes.

3) a) Loi des carrés.

Les deux carrés sont positifs, donc leurs fonctions de répartition sont nulles sur $] -\infty, 0[$. Fixons maintenant $t \geq 0$ et posons $a = \sqrt{t}$.

La variable Z étant à densité, elle n'a aucun atome. Ainsi :

$$P(Z^2 \leq t) = P(-a \leq Z \leq a) = F_Z(a) - F_Z(-a) = \Phi(a)^2 - \Phi(-a)^2.$$

En factorisant et en utilisant $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$:

$$P(Z^2 \leq t) = (\Phi(a) - \Phi(-a))(\Phi(a) + \Phi(-a)) = 2\Phi(a) - 1.$$

Pour X , qui est aussi à densité :

$$P(X^2 \leq t) = P(-a \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Ces expressions restent valables en $t = 0$, où elles valent zéro. Les fonctions de répartition de X^2 et de Z^2 coïncident donc sur tout $\mathbb{R}$: les deux variables suivent la même loi.

b) Moment d'ordre deux et variance.

La variable normale centrée réduite X a un moment d'ordre deux fini, avec :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1.$$

L'égalité des lois établie en a) implique que Z^2 admet aussi une espérance finie et que $E(Z^2) = 1$. En particulier, la variance de Z existe. La formule de Koenig-Huygens donne :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - \frac{1}{\pi}.$$

Problème

Dans ce problème, (u_n) désigne la nouvelle suite $u_n = P(X_n = 0)$, sans rapport avec celle de l'exercice 2. On a $X_0 = 0$, donc $u_0 = 1$. Les probabilités de transition dépendent uniquement de la position actuelle ; on utilisera les probabilités composées, sans supposer les positions successives indépendantes.

Partie 1 : étude de la variable X_n

1) Loi au premier instant.

Depuis l'abscisse zéro, le mobile avance à l'abscisse un avec la probabilité $\frac{0+1}{0+2} = 1/2$ et retourne à l'abscisse zéro avec la probabilité $1/(0+2) = 1/2$.

Les deux valeurs sont donc atteignables, et :

$$X_1(\Omega) = \{0, 1\}, \quad P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

2) Valeurs possibles à l'instant n .

On raisonne par récurrence en montrant également que chaque valeur annoncée a une probabilité strictement positive.

À l'instant zéro, $X_0 = 0$ avec probabilité un. Supposons qu'à l'instant n les valeurs possibles soient exactement $0, 1, \dots, n$, toutes de probabilité strictement positive.

Depuis une abscisse k comprise entre zéro et n , la position suivante est zéro ou $k+1$.

Aucune valeur extérieure à $\{0, 1, \dots, n+1\}$ ne peut donc être atteinte.

Pour chaque $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, l'événement $(X_n = j-1)$ a une probabilité positive et la transition de $j-1$ vers j a la probabilité $j/(j+1) > 0$. Ainsi $P(X_{n+1} = j) > 0$. De même, la transition de zéro vers zéro a la probabilité $1/2 > 0$, donc

$$P(X_{n+1} = 0) \geq P(X_n = 0)/2 > 0.$$

La propriété est héréditaire. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, et chacune de ces valeurs a une probabilité positive.

3) a) Récurrence sur les probabilités.

Fixons $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour arriver en k , le mobile doit être en $k-1$ à l'instant précédent et avancer ; un retour à l'origine ne peut pas produire $k > 0$.

L'événement $(X_{n-1} = k-1)$ a une probabilité positive d'après 2), et la probabilité conditionnelle de la transition est $k/(k+1)$. Il vient :

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P(X_n = k \mid X_{n-1} = k-1) = \frac{k}{k+1}P(X_{n-1} = k-1).$$

b) Expression à l'aide de (u_n) .

Pour $k \geq 1$, on itère la relation de a) exactement k fois. Toutes les positions intermédiaires sont dans les domaines autorisés, puisque $k \leq n$. Ainsi :

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} \frac{k-1}{k} \dots \frac{1}{2} P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}.$$

Pour $k = 0$, la formule est directement $P(X_n = 0) = u_n$. Elle est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, y compris $n = k = 0$.

c) Relation de normalisation.

Les événements $(X_n = k)$, pour k de zéro à n , forment un système complet d'événements. La somme de leurs probabilités vaut un. D'après b) :

$$1 = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{k+1}.$$

Le changement d'indice $j = n - k$ dans cette somme finie donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

d) Premiers termes.

On applique successivement la relation de c).

Pour $n = 0$, elle donne $u_0 = 1$. Pour $n = 1$:

$$u_1 + \frac{u_0}{2} = 1, \quad u_1 = \frac{1}{2}.$$

Pour $n = 2$:

$$u_2 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_0}{3} = 1, \quad u_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Pour $n = 3$:

$$u_3 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_0}{4} = 1, \quad u_3 = 1 - \frac{5}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Conclusion

$$u_0 = 1, u_1 = 1/2, u_2 = 5/12 \text{ et } u_3 = 3/8.$$

4) a) Accroissement de l'espérance.

Méthode 1 — Somme de la relation précédente.

Les variables X_n et X_{n-1} sont à valeurs dans des ensembles finis, donc leurs espérances existent. On somme, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'identité donnée dans la question :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n kP(X_{n-1} = k-1).$$

Le membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=1}^n kP(X_n = k) + \sum_{k=1}^n P(X_n = k) = E(X_n) + 1 - u_n.$$

En posant $j = k - 1$, le membre de droite vaut :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X_{n-1} = j) = E(X_{n-1}) + 1.$$

On en déduit $E(X_n) + 1 - u_n = E(X_{n-1}) + 1$, d'où :

$$\forall n \geq 1, \quad E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n.$$

Méthode 2 — Espérance totale sur les positions précédentes.

Conditionnellement à $(X_{n-1} = k)$, avec $0 \leq k \leq n-1$, la variable X_n vaut $k+1$ avec probabilité $(k+1)/(k+2)$ et zéro avec probabilité $1/(k+2)$. Donc :

$$E(X_n | X_{n-1} = k) = \frac{(k+1)^2}{k+2} = k + \frac{1}{k+2}.$$

L'espérance totale sur le système complet fini formé par ces événements donne :

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(X_{n-1} = k)}{k+2}.$$

La formule des probabilités totales appliquée au retour à zéro donne précisément :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P(X_n = 0 | X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(X_{n-1} = k)}{k+2}.$$

Ainsi l'accroissement de l'espérance vaut encore u_n . La première méthode exploite une relation entre les lois marginales ; la seconde calcule directement l'évolution moyenne à partir des transitions.

b) Expression de l'espérance par une somme.

On somme la relation de a) pour les indices de un à n . La somme des accroissements est télescopique :

$$E(X_n) - E(X_0) = \sum_{j=1}^n u_j.$$

Comme $X_0 = 0$, $E(X_0) = 0$. Conclusion :

$$\forall n \geq 1, \quad E(X_n) = \sum_{j=1}^n u_j.$$

c) Une seconde relation de récurrence.

Pour $n \geq 1$, la question 3)c) appliquée à $n - 1$ donne :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1.$$

La même question appliquée à n , en isolant le terme d'indice n , donne :

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

En soustrayant les deux identités, on obtient :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs puisque $j \leq n - 1$. La relation vaut notamment pour $n = 1$, où elle donne $u_1 = u_0/2$.

d) Minoration et limite de l'espérance.

Pour $0 \leq j \leq n - 1$, on a $n - j > 0$ et $n - j + 1 \leq n + 1$. Les termes u_j sont positifs puisque ce sont des probabilités, et 4)c) donne donc :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = \frac{1}{n+1}.$$

En utilisant b), il vient :

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^n u_j \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1}.$$

Le membre de droite est une somme partielle de la série harmonique privée de son premier terme, donc il tend vers $+\infty$. Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = +\infty.$$

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine

Le retour initialement compté se produit à un instant strictement positif. La valeur conventionnelle $T = 0$ correspond à l'absence de tout retour, et non à l'instant de départ.

1) a) Événement correspondant au premier retour.

Tant que le mobile ne retourne pas à zéro, il avance exactement d'une unité à chaque étape. Pour que le premier retour ait lieu à l'instant $k \geq 1$, ses abscisses aux instants un à $k-1$ doivent donc être respectivement un à $k-1$, puis il doit être en zéro à l'instant k .

$$\forall k \geq 1, \quad (T = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = j) \right) \cap (X_k = 0).$$

Pour $k = 1$, l'intersection vide est l'univers ; on retrouve bien $(T = 1) = (X_1 = 0)$.

b) Probabilité du premier retour.

On utilise les probabilités composées pour le parcours décrit en a). Conditionnellement à l'absence de retour avant l'instant j , la position à l'instant $j-1$ est $j-1$. La probabilité de poursuivre vers j est $j/(j+1)$ et celle de retourner à zéro est $1/(j+1)$.

Les probabilités de transition ne dépendent de l'histoire que par cette position. Toutes les transitions utilisées sont de probabilité positive, ce qui justifie les conditionnements

successifs. Ainsi, pour $k \geq 1$:

$$P(T = k) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{j}{j+1} \right) \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Pour $k = 1$, le produit vide vaut un ; la formule donne $P(T = 1) = 1/2$, conformément à la première partie. Aucun argument d'indépendance entre les positions successives n'a été utilisé.

c) Retour presque sûr.

En multipliant l'identité demandée par le dénominateur strictement positif $k(k+1)$, elle équivaut à :

$$\forall k \geq 1, \quad 1 = a(k+1) + bk = (a+b)k + a.$$

Cette égalité pour tout entier $k \geq 1$ impose $a+b=0$ et $a=1$. Les seuls coefficients possibles sont donc $a=1$ et $b=-1$, qui vérifient bien l'identité :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pour tout $N \geq 1$, la somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^N P(T = k) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En passant à la limite dans cette somme de probabilités d'événements deux à deux incompatibles, on obtient $P(T \geq 1) = 1$. Comme T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(T = 0) = 0$.

Conclusion

le mobile revient à l'origine après un nombre fini d'étapes avec probabilité un. Un parcours sans retour est un événement de probabilité nulle.

2) Existence de l'espérance du temps de retour.

Comme $T \geq 0$, l'existence d'une espérance finie équivaut à la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{k \geq 0} kP(T = k).$$

Le terme d'indice zéro ne contribue pas, et :

$$\sum_{k=1}^N kP(T = k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} \rightarrow +\infty.$$

La série diverge par comparaison avec la série harmonique. Conclusion : T n'a pas d'espérance finie ; au sens étendu, $E(T) = +\infty$.

Le caractère presque sûr du retour n'impose donc pas un temps moyen fini de retour.

Partie 3 : informatique

1) Calcul des probabilités et de l'espérance.

Code adapté en Python.

La relation de la partie 1, question 3)c), donne, pour $k \geq 1$:

$$u_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{k-j+1}.$$

En posant $i = j + 1$, la somme à calculer est

$$\sum_{i=1}^k u_{i-1} / (k - i + 2).$$

Le premier blanc doit donc accumuler ces termes ; le second doit cumuler les valeurs u_k selon la partie 1, question 4)b).

Le programme complété est :

Python

```
import numpy as np

n = 100
u = np.zeros(n + 1)
u[0] = 1
print(u[0])
e = 0
for k in range(1, n + 1):
    s = 0
    for i in range(1, k + 1):
        s = s + u[i - 1] / (k - i + 2)
    u[k] = 1 - s
    print(u[k])
    e = e + u[k]
print(e)
```

Le tableau u a les indices de zéro à n inclus. Lorsque la boucle extérieure commence son étape k , les termes $u_0, \dots, u_{k-1}$ ont déjà leur valeur définitive. Dans la boucle intérieure, $i - 1$ reste entre zéro et $k - 1$, tandis que le dénominateur $k - i + 2$ reste entre deux et $k + 1$: aucun indice ni aucune division ne pose donc de difficulté.

La variable s contient une somme partielle durant la boucle intérieure, puis la somme complète à sa dernière étape. L'affectation de $u[k]$ est placée dans cette boucle, comme dans le programme initial : ses valeurs intermédiaires ne sont pas réutilisées dans le

calcul de s . À la fin de la boucle, $u[k]$ a donc bien sa valeur recherchée.

Après l'étape k de la boucle extérieure, e vaut

$$\sum_{j=1}^k u_j.$$

Le programme affiche successivement $u_0, \dots, u_{100}$ puis $E(X_{100})$.

Code exécuté. Les premières valeurs affichées sont 1, 0,5, environ 0,41666666666666674, puis 0,375, en accord avec 1, 1/2, 5/12 et 3/8. Les derniers résultats sont :

$$u_{100} \simeq 0,1793655056385004, \quad E(X_{100}) \simeq 21,96747097899944.$$

Un calcul en fractions exactes des mêmes 101 termes confirme les valeurs numériques, à moins de 2×10^{-15} pour chaque terme. Les écarts d'écriture décimale proviennent de l'arithmétique flottante.

2) a) Simulation du premier retour.

Code adapté en Python.

On doit effectuer au moins un tirage puis recommencer tant que le résultat est non nul. L'initialisation `hasard = 1` garantit l'entrée dans la boucle. Le programme complété est :

Python

```
import numpy.random as rd

T = 0
hasard = 1
while hasard != 0:
    T = T + 1
    hasard = rd.randint(T + 1)
print(T)
```

Au début de la k -ième itération, aucun retour n'a eu lieu auparavant et le mobile est à l'abscisse $k - 1$. Après l'incrément, T vaut k et `rd.randint(T + 1)` tire uniformément dans $\{0, 1, \dots, k\}$. Le résultat zéro a donc la probabilité $1/(k + 1)$, exactement celle du retour depuis $k - 1$; l'ensemble des autres résultats a la probabilité $k/(k + 1)$, exactement celle de la poursuite vers k .

La valeur non nulle tirée sert seulement de signal de poursuite : elle ne représente pas l'abscisse. Tant que le signal reste non nul, l'abscisse est déterminée par le numéro de l'étape. Lorsque le premier zéro apparaît, la boucle s'arrête et T affiche l'instant de ce premier retour.

Dans le modèle de tirages successifs indépendants utilisé pour la simulation, la probabilité que cette sortie vaille k est :

$$\left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{j}{j+1} \right) \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

La simulation reproduit ainsi la loi établie dans la partie 2. Le code a été exécuté ; en fixant préalablement `rd.seed(2006)` pour un essai reproductible, la valeur affichée est 1. Cet essai vérifie l'exécution, mais la justification de la loi repose sur les probabilités précédentes.

b) Terminaison de la boucle.

Après $N \geq 1$ itérations, la boucle n'est pas encore terminée exactement lorsque les N tirages ont été non nuls. Dans le modèle probabiliste :

$$P(\text{aucun arrêt pendant les } N \text{ premières itérations}) = \prod_{j=1}^N \frac{j}{j+1} = \frac{1}{N+1}.$$

Ces événements décroissent lorsque N augmente. Par continuité monotone des probabilités, la probabilité de ne jamais terminer est leur limite, donc zéro.

Conclusion

la boucle termine presque sûrement, c'est-à-dire avec probabilité un. Il n'y a pas de borne déterministe au nombre d'itérations : pour tout N , la probabilité de dépasser N itérations vaut $1/(N+1) > 0$. La terminaison n'est pas une garantie pour chaque suite imaginable de tirages ; c'est une propriété presque sûre.

Le nombre d'itérations a la loi de T et son espérance est infinie, comme établi dans la partie 2, question 2).

Relevé des adaptations

- Exercice 1, questions 1)a), 1)b) et 1)c) : les scalaires et les espaces sont désormais réels. La décomposition en deux espaces propres est démontrée explicitement, ce qui conserve l'étude de la diagonalisation avec les outils autorisés.
- Exercice 1, question 2) : la construction initiale est remplacée par une matrice réelle en dimension paire, obtenue avec des blocs d'ordre deux. Elle prépare la comparaison entre dimensions paires et impaires sans introduire de nombres complexes.
- Exercice 1, questions 3)a) à 3)d) : la démonstration est reformulée à l'aide d'un plan stable, d'un produit scalaire construit dans l'énoncé et d'une récurrence sur la dimension impaire. Les propriétés utiles du produit scalaire et de l'orthogonal stable sont établies dans les questions ; aucun déterminant ni outil de réduction hors référentiel n'est nécessaire.
- Problème, partie 1, préambule : la dépendance des probabilités de transition à la seule position actuelle est explicitée, afin de justifier les probabilités composées sur un parcours sans supposer les positions indépendantes.
- Problème, partie 2, questions 1)a) à 1)c) et 2), et partie 3, questions 1), 2)a) et 2)b) : les questions de la quatrième page, absente de la pièce jointe, sont rétablies à partir de l'original complet de l'épreuve, dans leur ordre et avec leur numérotation d'origine.

- Problème, partie 3, questions 1), 2)a) et 2)b) : Code adapté en Python. Les deux programmes gardent les mêmes calculs et les mêmes blancs à compléter. La répétition avec un premier tirage obligatoire est traduite par une boucle `while` initialisée avec un signal non nul ; l'arrêt est étudié pour cette boucle.