



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2005

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On note Tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

1a) Montrer que $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$.

1b) En déduire la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$.

1c) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I)$.

2) Soit f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \text{Tr}(M)I$.

2a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f . En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit g l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \text{Tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g .

3b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g .

3c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable?

Exercice 2

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$. On note F sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \lfloor X \rfloor$ et $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$. On admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

1b) Pour tout $k \in X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F .

1c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

1d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ .

2a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2 .

2b) Justifier que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$:

$$P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}).$$

Puis montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right) \right).$$

En déduire que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad P(X_2 = k) = e^{-\lambda k/10} \frac{1 - e^{-\lambda/10}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

3) Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction de n variables réelles, notée f , définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

1a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

1b) Calculer les dérivées premières et secondes de f .

2a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \dots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

2b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

3a) Déterminer le rang de J_n . En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

3b) Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

3c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n , puis celles de A_n .

4a) Montrer que, pour toute colonne $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ non nulle, on a ${}^t H A_n H > 0$.

4b) En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, \dots, a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\frac{n}{4(n+1)}$.

Problème

On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés : chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer.

Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton, avec probabilité $1/2$ pour chacun, puis effectue une série de lancers avec ce jeton. Une fois le jeton choisi, les lancers successifs sont supposés indépendants.

On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k -ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

- 1b)** Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0, et on pose $X = 0$ si cette face n'apparaît jamais.

On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1, et on pose $Y = 0$ si cette face n'apparaît jamais.

On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- 2a)** Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

- 2b)** En déduire que $P(X = 0) = 1/2$. Ce résultat était-il prévisible ?

- 2c)** Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.

- 2d)** Montrer que $X(X - 1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.

- 3a)** Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

- 3b)** En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

- 3c)** Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.

- 3d)** Montrer que $Y(Y - 1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = 5/4$.

- 4)** On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par $S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

- 4a)** Déterminer $S(\Omega)$.

4b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = 1/2$.

4c) Pour tout entier $n \geq 2$, comparer d'une part les événements $\{X = n\}$ et $\{Y < n\}$, et d'autre part $\{Y = n\}$ et $\{X < n\}$, puis en déduire :

$$\{S = n\} = \{X = n\} \cup \{Y = n\}.$$

4d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par $I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

5a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

5b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I , ainsi que son espérance et sa variance.

Partie 2 : simulation des variables X et Y

On rappelle que `np.random.randint(0, 2)` renvoie au hasard, avec équiprobabilité, un entier de $\{0, 1\}$; sa borne supérieure est exclue. De même, `np.random.randint(1, 3)` renvoie un entier de $\{1, 2\}$ avec équiprobabilité.

1) On considère le programme suivant :

Python

```
import numpy as np

X = 0

jeton = np.random.randint(1, 3)

if jeton == 1:
    lancer = 1
    while lancer != 0:
        X = X + 1
        lancer = np.random.randint(0, 2)
```

```
print(X)
```

- 1a) Expliquer le fonctionnement de ce programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.
- 1b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?
- 2) Écrire un programme Python qui donne la valeur de la variable aléatoire Y .