



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1a) L'image de la trace est incluse dans $\mathbb{R}$ par définition. Réciproquement, pour tout $r \in \mathbb{R}$, la matrice diagonale $\text{diag}(r, 0, \dots, 0)$ a pour trace r .

Ainsi chaque réel appartient à l'image, et $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$. Le rang de cette application linéaire est donc 1.

1b) L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a dimension n^2 , et la trace est linéaire. Le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = n^2 - \dim \text{Im}(\text{Tr}) = n^2 - 1.$$

1c) Méthode 1 — Utiliser l'intersection et les dimensions.

Si $M \in \text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I$. Comme $\text{Tr}(I) = n$, on a $0 = \text{Tr}(M) = n\alpha$. Puisque $n \geq 2$, $\alpha = 0$ et $M = 0$.

Les sous-espaces ont donc une intersection nulle. Leurs dimensions sont $n^2 - 1$ et 1, et leur somme est n^2 . La somme directe a la dimension de l'espace ambiant, donc :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I).$$

Méthode 2 — Donner la décomposition explicitement.

Pour toute matrice M , on écrit :

$$M = \left(M - \frac{\text{Tr}(M)}{n} I \right) + \frac{\text{Tr}(M)}{n} I.$$

Le premier terme a pour trace $\text{Tr}(M) - \text{Tr}(M) = 0$; le second appartient à $\text{Vect}(I)$. Cela prouve que les deux sous-espaces engendrent l'espace entier. Leur intersection est nulle, car une matrice αI de trace nulle vérifie $n\alpha = 0$ puis $\alpha = 0$.

La somme est donc directe. La première méthode exploite le théorème du rang; la seconde fournit les deux composantes de chaque matrice, utiles pour étudier f .

2a) La fonction f prend bien ses valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité de la trace donne :

$$f(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N + (\alpha \operatorname{Tr}(M) + \beta \operatorname{Tr}(N))I = \alpha f(M) + \beta f(N).$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2b) Pour $A \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, on a $f(A) = A$. Pour I , on a $f(I) = I + nI = (n+1)I$.

La décomposition de 1c permet donc de choisir une base de $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$ suivie de I . Dans cette base, la matrice de f est diagonale, avec $n^2 - 1$ coefficients égaux à 1 et un coefficient égal à $n+1$.

Ces deux valeurs sont distinctes et leurs espaces propres sont :

$$E_1(f) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}), \quad E_{n+1}(f) = \operatorname{Vect}(I).$$

Pour vérifier la seconde égalité directement, si $f(M) = (n+1)M$, alors $\operatorname{Tr}(M)I = nM$, donc $M = (\operatorname{Tr}(M)/n)I$. La première égalité résulte de $f(M) = M \iff \operatorname{Tr}(M) = 0$.

La base construite couvre l'espace entier, donc il n'existe pas d'autre valeur propre, et f est diagonalisable. Les coefficients diagonaux 1 et $n+1$ sont non nuls, donc cette matrice est inversible : f est un automorphisme.

On peut également expliciter son inverse. Si $N = f(M)$, alors $\operatorname{Tr}(N) = (n+1) \operatorname{Tr}(M)$, puis $M = N - \operatorname{Tr}(N)I/(n+1)$. Ainsi :

$$f^{-1}(N) = N - \frac{\operatorname{Tr}(N)}{n+1}I.$$

3a) Puisque $\operatorname{Tr}(J) = 0$, on a $\operatorname{Tr}(g(M)) = \operatorname{Tr}(M)$. Donc :

$$g^2(M) = g(M) + \operatorname{Tr}(g(M))J = M + 2 \operatorname{Tr}(M)J.$$

D'autre part, $2g(M) - M = M + 2 \operatorname{Tr}(M)J$. Ainsi $g^2(M) - 2g(M) + M = 0$ pour toute matrice M .

En notant Id l'endomorphisme identité de l'espace des matrices, on obtient $g^2 - 2g + \text{Id} = 0$. Le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est donc annulateur de g .

3b) Toute valeur propre réelle d'un endomorphisme est racine de chacun de ses polynômes annulateurs. Si μ est valeur propre de g , la question 3a donne $(\mu - 1)^2 = 0$, donc $\mu = 1$.

Il faut aussi vérifier que 1 est effectivement valeur propre. La matrice J est non nulle et de trace nulle, donc $g(J) = J$. Elle est un vecteur propre associé à 1.

Ainsi 1 est exactement la seule valeur propre de g . Son espace propre vérifie :

$$g(M) = M \iff \text{Tr}(M)J = 0 \iff \text{Tr}(M) = 0,$$

où la dernière équivalence utilise $J \neq 0$. Donc $E_1(g) = \text{Ker}(\text{Tr})$.

3c) Méthode 1 — Comparer la dimension de l'espace propre à celle de l'espace ambiant.

Le seul espace propre est $E_1(g) = \text{Ker}(\text{Tr})$, de dimension $n^2 - 1$. Il ne peut pas fournir une base de l'espace de dimension n^2 . Le critère de diagonalisation par une base de vecteurs propres montre donc que g n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Utiliser la conséquence d'une unique valeur propre.

Si g était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait diagonale et tous ses coefficients diagonaux seraient 1, puisque c'est sa seule valeur propre. Cette matrice serait l'identité, ce qui imposerait $g = \text{Id}$.

Or $g(I) = I + nJ \neq I$, car $n \neq 0$ et $J \neq 0$. Cela contredit $g = \text{Id}$. Ainsi g n'est pas diagonalisable. Cette méthode évite de recalculer la dimension de l'espace propre.

Exercice 2

On rappelle que la fonction de répartition exponentielle est $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

1a) Puisque $X \geq 0$ presque sûrement, sa partie entière prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$. Chacune de ces valeurs a une probabilité strictement positive, car la densité exponentielle est strictement positive sur chaque intervalle $[k, k + 1[$.

Ainsi $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$, avec la convention usuelle de support des variables de l'exercice.

1b) Pour $k \in \mathbb{N}$, la définition de la partie entière donne $\{X_1 = k\} = \{k \leq X < k + 1\}$. La variable X étant à densité, elle ne possède pas de masse aux extrémités de cet intervalle. Donc :

$$P(X_1 = k) = F(k + 1) - F(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}.$$

1c) Posons $p = 1 - e^{-\lambda}$. Puisque $\lambda > 0$, on a $0 < p < 1$. Pour tout $m \geq 1$:

$$P(X_1 + 1 = m) = P(X_1 = m - 1) = p(1 - p)^{m-1}.$$

La variable $X_1 + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. C'est donc une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$, avec la convention du rang du premier succès.

1d) Méthode 1 — Utiliser le moment de la loi géométrique.

La loi géométrique de paramètre $p > 0$ possède une espérance finie égale à $1/p$. La variable $X_1 = (X_1 + 1) - 1$ est donc intégrable, et :

$$E(X_1) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Méthode 2 — Sommer directement la loi de X_1 .

Posons $q = e^{-\lambda} \in]0, 1[$. Les termes $kP(X_1 = k)$ sont positifs ou nuls. La formule de la série géométrique dérivée donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = 1/(1-q)^2,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = q/(1-q)^2.$$

Ainsi la série définissant l'espérance converge, et

$$E(X_1) = (1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = q/(1-q) = 1/(e^\lambda - 1).$$

La première méthode reconnaît une loi usuelle ; la seconde montre directement l'intégrabilité et le calcul à partir de la masse de probabilité.

2a) La partie fractionnaire vérifie $0 \leq X - X_1 < 1$, donc $0 \leq 10(X - X_1) < 10$. Sa partie entière appartient à $\{0, 1, \dots, 9\}$. Toutes ces valeurs ont une probabilité strictement positive, puisqu'elles correspondent notamment aux intervalles $[k/10, (k+1)/10[$.

Ainsi $X_2(\Omega) = \{0, 1, \dots, 9\}$. La variable X_2 représente le premier chiffre après la virgule de X , en utilisant l'écriture décimale usuelle qui ne se termine pas par une infinité de 9.

2b) Les événements $\{X_1 = i\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements. Pour un $k \in \{0, \dots, 9\}$ fixé, les intersections $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}$ sont donc disjointes

et leur réunion est $\{X_2 = k\}$. Par additivité des probabilités :

$$P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\}).$$

Si $X_1 = i$, la condition $X_2 = k$ équivaut à $k \leq 10(X - i) < k + 1$. Comme $0 \leq k \leq 9$, cette condition place déjà X dans $[i, i + 1[$. On a donc exactement :

$$\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k\} = \left\{ i + \frac{k}{10} \leq X < i + \frac{k+1}{10} \right\}.$$

La continuité de la fonction de répartition de X donne la différence des valeurs de F demandée. En remplaçant F par son expression :

$$F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right) = e^{-\lambda i} e^{-\lambda k/10} (1 - e^{-\lambda/10}).$$

On somme la série géométrique de raison $e^{-\lambda} \in]0, 1[$, qui est convergente. Ainsi :

$$P(X_2 = k) = e^{-\lambda k/10} (1 - e^{-\lambda/10}) \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda i} = e^{-\lambda k/10} \frac{1 - e^{-\lambda/10}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. La normalisation peut se vérifier avec la somme géométrique finie : les dix probabilités ont pour somme $(1 - e^{-\lambda/10})/(1 - e^{-\lambda})$ multiplié par $(1 - e^{-\lambda})/(1 - e^{-\lambda/10})$, soit 1.

3) Pour $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 9\}$, le calcul précédent donne :

$$P(X_1 = i, X_2 = k) = e^{-\lambda i} e^{-\lambda k/10} (1 - e^{-\lambda/10}).$$

D'après 1b et 2b :

$$P(X_1 = i)P(X_2 = k) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda i} e^{-\lambda k/10} \frac{1 - e^{-\lambda/10}}{1 - e^{-\lambda}},$$

ce qui est égal à la probabilité conjointe. La factorisation est vérifiée pour toutes les valeurs des deux supports, et les probabilités hors de ces supports sont nulles. Le critère d'indépendance des variables discrètes montre que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 3

1a) La fonction f est un polynôme en les coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Ses dérivées partielles de tous ordres sont donc définies et continues sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$.

1b) Posons

$$s(x) = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\partial s / \partial x_i = 1$, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i + 2s(x) - 1.$$

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = 2 \quad \text{si } j \neq i.$$

La hessienne est donc constante, avec des coefficients diagonaux égaux à 4 et tous les autres égaux à 2.

2a) Un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ est critique si et seulement si $2a_i + 2s(a) - 1 = 0$ pour tout i . En soustrayant deux équations, on obtient $a_i = a_j$ pour tous i, j .

Toutes les coordonnées sont donc égales à un réel c . On a alors $s(a) = nc$, et l'équation devient $2c + 2nc - 1 = 0$. Comme $n + 1 > 0$, sa seule solution est $c = 1/[2(n + 1)]$.

Réciproquement, ce choix annule chaque composante du gradient. Le seul point critique est donc :

$$a = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \dots, \frac{1}{2(n+1)} \right).$$

- 2b)** La matrice $2(I_n + J_n)$ a pour coefficients diagonaux $2(1 + 1) = 4$ et pour coefficients hors diagonale $2(0 + 1) = 2$. Ce sont exactement les dérivées secondes obtenues en 1b.

Ainsi $\nabla^2 f(a) = A_n = 2(I_n + J_n)$. Cette égalité vaut même en tout point de $\mathbb{R}^n$.

- 3a)** Posons $w = {}^t(1, \dots, 1) \neq 0$. Pour toute colonne $H = {}^t(h_1, \dots, h_n)$:

$$J_n H = \left(\sum_{k=1}^n h_k \right) w.$$

L'image de J_n est donc incluse dans $\text{Vect}(w)$. Comme ${}^t(J_n(1, 0, \dots, 0)) = w$, l'image est exactement cette droite, et $\text{rg}(J_n) = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(J_n) = n - 1$. Puisque $n \geq 2$, cette dimension est strictement positive, donc 0 est valeur propre. Son espace propre est :

$$E_0(J_n) = \text{Ker}(J_n) = \left\{ H : \sum_{k=1}^n h_k = 0 \right\},$$

de dimension $n - 1$.

- 3b)** Chacune des coordonnées du produit $J_n w$ est la somme des n coordonnées de w , soit n . Ainsi $J_n w = nw$.

Le vecteur w est non nul, donc n est une valeur propre de J_n .

- 3c)** Les espaces propres associés aux valeurs propres distinctes 0 et n sont en somme directe. Le premier a dimension $n - 1$ et le second contient la droite $\text{Vect}(w)$, de dimension 1.

En prenant une base du premier espace puis le vecteur w , on obtient n vecteurs propres libres, donc une base de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que J_n est diagonalisable et que ses seules valeurs propres sont 0 et n , avec $E_n(J_n) = \text{Vect}(w)$.

Si H est un vecteur propre de J_n associé à μ , alors $A_n H = 2(I_n + J_n)H = 2(1 + \mu)H$. La même base diagonalise donc A_n . Ses valeurs propres sont :

$$2 \quad \text{sur } \text{Ker}(J_n), \quad 2(n+1) \quad \text{sur } \text{Vect}(w).$$

Leurs espaces propres ont respectivement les dimensions $n-1$ et 1 , et les deux valeurs sont strictement positives.

4a) Méthode 1 — Utiliser le théorème spectral.

La matrice A_n est réelle et symétrique. Le théorème spectral fournit une base orthonormale de vecteurs propres. Dans cette base, si les coordonnées de H sont $c_1, \dots, c_n$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres correspondantes, on a :

$${}^t H A_n H = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2.$$

Toutes les λ_i sont strictement positives par 3c. Pour $H \neq 0$, au moins une coordonnée c_i est non nulle. La somme est donc strictement positive.

Méthode 2 — Calculer directement la forme quadratique.

En utilisant $A_n = 2(I_n + J_n)$ et le produit calculé en 3a :

$${}^t H A_n H = 2 \sum_{i=1}^n h_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2.$$

Si $H \neq 0$, le premier terme est strictement positif et le second est positif ou nul. On conclut aussi ${}^t H A_n H > 0$. La première méthode utilise le signe des valeurs propres ; la seconde établit la positivité sans diagonalisation.

4b) Méthode 1 — Appliquer le critère de la hessienne.

La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, le point a est critique, et sa hessienne A_n possède uniquement des valeurs propres strictement positives. Le critère du programme donne donc un minimum local strict en a .

Avec $c = 1/[2(n+1)]$, les trois termes de $f(a)$ valent respectivement nc^2 , n^2c^2 et $-nc$. Ainsi :

$$f(a) = n(n+1)c^2 - nc = \frac{n}{4(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)} = -\frac{n}{4(n+1)}.$$

Méthode 2 — Développer exactement autour du point critique.

Écrivons $x = a + h$, avec $h = (h_1, \dots, h_n)$, et posons

$$r = \sum_{i=1}^n h_i.$$

On a

$$\sum x_i^2 = nc^2 + 2cr + \sum h_i^2$$

et

$$(\sum x_i)^2 = (nc + r)^2 = n^2c^2 + 2ncr + r^2.$$

En soustrayant $f(a)$, il reste :

$$f(a+h) - f(a) = (2c + 2nc - 1)r + \sum_{i=1}^n h_i^2 + r^2.$$

Le coefficient linéaire est nul par la définition de c . Donc :

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n h_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2.$$

Cette différence est strictement positive pour $h \neq 0$. Ainsi a est même l'unique point de minimum global de f , et sa valeur est $-n/[4(n+1)]$. Cette preuve exacte renforce la conclusion locale obtenue avec la hessienne.

Problème

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

Les lancers sont indépendants conditionnellement au jeton choisi. Il faut donc conditionner par E ou par son complément avant de multiplier les probabilités des résultats successifs. On a $P(E) = P(E^c) = 1/2$.

1a) Posons $B_n = \bigcap_{k=1}^n U_k$, l'événement « les n premiers lancers donnent 1 ». Si le jeton est J_1 , chacun de ces résultats a probabilité $1/2$; par indépendance conditionnelle, $P(B_n | E) = 2^{-n}$. Si le jeton est J_2 , tous les résultats valent 1, donc $P(B_n | E^c) = 1$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(B_n) = \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} = \frac{1 + 2^{-n}}{2}.$$

1b) La probabilité $P(B_n)$ est strictement positive. La formule de Bayes donne :

$$P(E | B_n) = \frac{P(E)P(B_n | E)}{P(B_n)} = \frac{2^{-n}}{1 + 2^{-n}} = \frac{1}{2^n + 1}.$$

Cette probabilité tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Une longue succession de résultats 1 rend de plus en plus probable que le joueur ait choisi J_2 , lequel donne toujours 1. Pour tout nombre fini de lancers, le jeton J_1 reste toutefois possible puisque la probabilité conditionnelle obtenue est strictement positive.

- 2a)** Pour $n \geq 1$, obtenir le premier 0 au rang n exige d'avoir choisi J_1 , puis d'obtenir $n - 1$ résultats 1 suivis d'un résultat 0. Avec J_2 , cet événement est impossible.

Par indépendance des lancers conditionnellement à E :

$$P(X = n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- 2b)** La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$: elle vaut un rang strictement positif si un 0 apparaît, et 0 sinon. Ses probabilités de rang positif ont pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $P(X = 0) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Ce résultat était prévisible : si J_2 est choisi, avec probabilité $1/2$, aucun 0 ne peut apparaître. Si J_1 est choisi, la probabilité de n'obtenir aucun 0 lors des m premiers lancers est 2^{-m} ; par continuité décroissante des probabilités, la probabilité de n'en obtenir jamais est $\lim_{m \rightarrow +\infty} 2^{-m} = 0$.

Ainsi $\{X = 0\}$ coïncide avec E^c à un événement de probabilité nulle près, ce qui explique sa probabilité $1/2$.

- 2c)** Méthode 1 — Sommer la loi.

La variable X est positive ou nulle. Avec $q = 1/2$, la série géométrique dérivée donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = q/(1-q)^2 = 2.$$

La série de l'espérance est donc convergente, ce qui établit l'intégrabilité de X , et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 1.$$

Méthode 2 — Reconnaître les lois conditionnelles.

Conditionnellement à E , X a la loi du rang du premier 0 d'un jeton équilibré : c'est une géométrique de paramètre $1/2$, de moyenne 2. La convention $X = 0$ en l'absence de 0 ne modifie pas cette loi, car cet événement a probabilité conditionnelle nulle.

Conditionnellement à E^c , X vaut toujours 0.

Les deux lois conditionnelles ont un moment absolu d'ordre 1 fini, donc leur mélange est intégrable. La formule de l'espérance totale sur la partition (E, E^c) donne

$$E(X) = (1/2) \times 2 + (1/2) \times 0 = 1.$$

La première méthode calcule le moment à partir de la masse de probabilité ; la seconde utilise la structure du choix initial du jeton.

2d) La variable $X(X - 1)$ est positive ou nulle, car X est un entier naturel. La deuxième série géométrique dérivée donne, pour $0 < q < 1$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

En multipliant par q^2 et en prenant $q = 1/2$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} = 4.$$

La série de l'espérance de $X(X - 1)$ converge donc, et :

$$E(X(X - 1)) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = 2.$$

Puisque $X^2 = X(X - 1) + X$ et que les deux termes de droite sont intégrables, le moment d'ordre 2 existe et vaut $E(X^2) = 2 + 1 = 3$. Par Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - 1 = 2.$$

3a) Si $n = 1$, la formule des probabilités totales donne

$$P(Y = 1) = P(E) \times (1/2) + P(E^c) \times 1 = 3/4.$$

Si $n \geq 2$, le jeton J_2 ne peut pas donner un premier 1 à ce rang, puisqu'il donne déjà 1 au premier lancer. Avec J_1 , il faut $n - 1$ résultats 0 suivis de 1, donc :

$$P(Y = n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La loi aux rangs positifs est donc $P(Y = 1) = 3/4$ et $P(Y = n) = 2^{-(n+1)}$ pour $n \geq 2$.

3b) La somme des probabilités des rangs positifs vaut :

$$\frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Ainsi $P(Y = 0) = 0$. Avec J_2 , un 1 apparaît dès le premier lancer ; avec J_1 , la probabilité de ne jamais obtenir de 1 est nulle par le même argument de continuité décroissante que pour les 0 en 2b.

3c) Méthode 1 — Comparer aux sommes déjà calculées.

Aux rangs positifs, la loi de Y est celle de X avec une probabilité supplémentaire $1/2$ au rang 1. Le terme de rang 0 ne contribue à aucune espérance. La série de $nP(Y = n)$ converge donc par le calcul de 2c, et :

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Méthode 2 — Utiliser les lois conditionnelles.

Avec J_1 , Y suit une géométrique de paramètre $1/2$, de moyenne 2. Avec J_2 , Y vaut toujours 1. Ces deux lois conditionnelles sont intégrables ; leur mélange l'est donc également. L'espérance totale donne $E(Y) = (1/2) \times 2 + (1/2) \times 1 = 3/2$.

Les deux approches mettent en évidence le supplément d'espérance par rapport à X : le choix de J_2 contribue 1 à Y , et 0 à X .

3d) Pour les rangs $n \geq 2$, les probabilités de Y et de X sont identiques. Au rang 1, le facteur $n(n-1)$ est nul. Donc la série donnant $E(Y(Y-1))$ est exactement celle calculée en 2d.

Elle converge et $E(Y(Y-1)) = 2$. Comme Y est intégrable d'après 3c, le moment d'ordre 2 existe et vaut :

$$E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Par Koenig-Huygens,
$$V(Y) = \frac{7}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}.$$

4a) Le premier lancer donne nécessairement 0 ou 1. Dans le premier cas, $X = 1$; dans le second, $Y = 1$. Donc $S = \max(X, Y) \geq 1$ et prend uniquement des valeurs entières strictement positives.

La valeur 1 est possible, notamment avec J_2 , pour lequel $X = 0$ et $Y = 1$. Pour tout $n \geq 2$, le choix de J_1 , suivi de $n-1$ résultats 1 puis d'un 0, donne $X = n$, $Y = 1$ et $S = n$, avec probabilité strictement positive.

Ainsi $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

4b) Si $X = 0$, aucun 0 n'apparaît : tous les lancers donnent 1, donc $Y = 1$ et $S = 1$. Si $Y = 0$, tous les lancers donnent 0, donc $X = 1$ et $S = 1$.

Réciproquement, si $S = 1$, les valeurs de X et de Y sont dans $\{0, 1\}$. Elles ne peuvent pas être toutes deux égales à 1, car le premier lancer ne peut pas donner à la fois 0 et 1, ni être toutes deux nulles, puisque le premier lancer donne l'un de ces deux numéros. Ainsi :

$$\{S = 1\} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\},$$

et cette réunion est disjointe. Avec 2b et 3b,

$$P(S = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = 1/2 + 0 = 1/2.$$

On obtient bien $P(S = 1) = P(X = 0)$. L'égalité porte sur les probabilités; les événements peuvent différer sur $\{Y = 0\}$, de probabilité nulle.

4c) Soit $n \geq 2$. Si $X = n$, les $n - 1$ premiers lancers ont donné 1, en particulier le premier; donc $Y = 1 < n$. On a $\{X = n\} \subset \{Y < n\}$.

Si $Y = n$, les $n - 1$ premiers lancers ont donné 0, en particulier le premier; donc $X = 1 < n$. On a $\{Y = n\} \subset \{X < n\}$.

Ces inclusions montrent que $X = n$ ou $Y = n$ entraîne $\max(X, Y) = n$. Réciproquement, si le maximum vaut n , au moins l'une des deux valeurs vaut n . Ainsi :

$$\{S = n\} = \{X = n\} \cup \{Y = n\}.$$

Les deux événements à droite sont disjoints, puisque $X = n$ entraîne $Y = 1$, ce qui exclut $Y = n$ lorsque $n \geq 2$.

4d) Pour $n \geq 2$, la réunion disjointe de 4c donne

$$P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n) = 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}. \text{ La question 4b donne également } P(S = 1) = 2^{-1}.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $P(S = n) = 2^{-n} = (1/2)(1 - 1/2)^{n-1}$. Sur le support $\mathbb{N}^*$, c'est la loi géométrique de paramètre $1/2$.

Ses moments usuels existent et donnent $E(S) = 1/(1/2) = 2$ et

$$V(S) = (1 - 1/2)/(1/2)^2 = 2.$$

5a) Si les deux numéros apparaissent au cours des lancers, celui du premier lancer a son rang d'apparition égal à 1, et l'autre a un rang au moins égal à 2. Leur minimum vaut donc 1.

Si l'un des numéros n'apparaît jamais, son rang conventionnel vaut 0 et le minimum vaut 0. Ainsi $I = \min(X, Y)$ prend seulement les valeurs 0 et 1 : c'est une variable de

Bernoulli, de paramètre $P(I = 1)$.

5b) Comme X et Y sont positifs ou nuls, $\{I = 0\} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\}$. Ces deux événements sont disjoints, car au moins l'un des numéros apparaît dès le premier lancer.

Avec 2b et 3b, $P(I = 0) = 1/2 + 0 = 1/2$. Par complémentarité, $P(I = 1) = 1/2$. Donc $I \sim \mathcal{B}(1/2)$, au sens de la loi de Bernoulli.

La variable est bornée, donc ses moments existent, et les formules usuelles donnent $E(I) = 1/2$ et $V(I) = (1/2)(1 - 1/2) = 1/4$.

Partie 2 : simulation des variables X et Y

1a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

X = 0

jeton = np.random.randint(1, 3)

if jeton == 1:
    lancer = 1
    while lancer != 0:
        X = X + 1
        lancer = np.random.randint(0, 2)
print(X)
```

La variable `jeton` vaut 1 ou 2 avec probabilité $1/2$, ce qui simule le choix initial du jeton. Si elle vaut 2, aucun 0 ne peut apparaître : la boucle n'est pas exécutée et le programme affiche 0.

Si elle vaut 1, chaque appel à `np.random.randint(0, 2)` simule le numéro obtenu lors d'un lancer de J_1 . La valeur initiale `lancer = 1` sert seulement à entrer dans la boucle ; elle ne représente pas un lancer déjà effectué. À chaque passage, le compteur `X`

augmente de 1 avant le nouveau lancer.

Au moment où un résultat 0 est obtenu, X est donc le nombre de lancers effectués, c'est-à-dire le rang du premier 0. Le test suivant arrête la boucle et ce rang est affiché. La variable affichée simule ainsi la loi de X définie dans la partie 1.

Le programme a été exécuté et ses branches ont été vérifiées : un choix de J_2 affiche 0 ; avec J_1 , un premier résultat 0 affiche 1, et les résultats successifs 1, 1, 0 affichent 3.

1b) Il n'y a pas de garantie d'arrêt pour toute suite imaginable de résultats : si J_1 est choisi et que tous les lancers donnent 1, la boucle ne rencontre jamais de résultat 0.

En revanche, conditionnellement au choix de J_1 , la probabilité que les m premiers lancers ne donnent aucun 0 vaut 2^{-m} . Ces événements sont décroissants lorsque m augmente, et leur intersection est l'événement « aucun 0 n'apparaît jamais ». Par continuité décroissante des probabilités, cette intersection a pour probabilité

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 2^{-m} = 0.$$

Avec J_2 , la boucle n'est pas exécutée. Par conséquent, le programme termine avec probabilité 1 : le nombre de passages est presque sûrement fini. Il n'existe cependant pas de borne déterministe au nombre de passages possibles.

Sur l'éventuelle issue où J_1 ne donne jamais 0, la définition mathématique attribue $X = 0$, tandis que le programme ne termine pas. Cette différence concerne un événement de probabilité nulle et ne modifie pas la loi de la variable simulée sur les exécutions qui terminent.

2) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Méthode 1 — Simuler les lancers successifs.

Si J_2 est choisi, $Y = 1$. Si J_1 est choisi, on compte les lancers jusqu'au premier résultat 1.

Python

```
import numpy as np

jeton = np.random.randint(1, 3)

if jeton == 2:
    Y = 1
else:
    Y = 0
    lancer = 0
    while lancer != 1:
        Y = Y + 1
        lancer = np.random.randint(0, 2)
print(Y)
```

L'initialisation $\text{lancer} = 0$ impose un premier passage dans la boucle. Après chaque passage, Y est le nombre de lancers effectués. À l'arrêt, ce nombre est le rang du premier 1.

Comme pour X , l'arrêt est presque sûr : conditionnellement à J_1 , la probabilité de n'obtenir aucun 1 pendant les m premiers lancers vaut 2^{-m} , et celle de n'en obtenir jamais est nulle. La convention $Y = 0$ sur ce dernier événement n'a donc pas d'effet sur la loi simulée.

Le programme a été exécuté : le choix de J_2 affiche 1 ; avec J_1 , un premier résultat 1 affiche 1, et les résultats successifs 0, 0, 1 affichent 3.

Méthode 2 — Utiliser directement la loi géométrique conditionnelle.

La partie 1 montre que, conditionnellement au choix de J_1 , Y suit une géométrique de paramètre $1/2$ sur $\mathbb{N}^*$. Avec J_2 , Y vaut 1. On peut donc simuler ce mélange sans reproduire chaque lancer.

Python

```
import numpy as np

jeton = np.random.randint(1, 3)

if jeton == 2:
    Y = 1
else:
    Y = np.random.geometric(0.5)

print(Y)
```

La commande `np.random.geometric(0.5)` utilise la convention du rang du premier succès, donc renvoie un entier strictement positif. Ce programme a également été exécuté et ses deux branches vérifiées.

La première méthode décrit explicitement l'expérience ; la seconde utilise les lois conditionnelles pour obtenir directement une variable de même loi. Des contrôles numériques sur de nombreux tirages concordent avec les espérances $E(X) = 1$ et $E(Y) = 3/2$, et avec les masses de probabilité calculées. Ces contrôles d'exécution ne remplacent pas les démonstrations de la partie 1.

Relevé des adaptations

- Problème, préambule : explicitation de l'équiprobabilité du choix du jeton et de l'indépendance des lancers conditionnellement au jeton choisi, conventions usuelles de l'expérience qui sont nécessaires aux calculs et cohérentes avec le programme fourni.
- Problème, partie 2, 1a et 1b : programme et référence à la boucle adaptés en Python. La boucle est initialisée pour effectuer au moins un lancer lorsque J_1 est choisi ; le comptage et la condition d'arrêt sont conservés.
- Problème, partie 2, 2 : demande de programme adaptée en Python, avec une simulation par lancers et une seconde simulation par la loi géométrique conditionnelle.