



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1999

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1) Étude de g_n .

- a.** La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental du calcul intégral montre que la fonction $x \mapsto \int_n^x e^{t^2} dt$, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable et a pour dérivée e^{x^2} . Sa restriction à $[n, +\infty[$ est donc dérivable, avec une dérivée à droite en n .

Ainsi $g'_n(x) = e^{x^2} > 0$: g_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

- b.** Pour $x \geq n$, on a $e^{t^2} \geq 1$ sur $[n, x]$. Par croissance de l'intégrale,

$$g_n(x) \geq \int_n^x 1 dt = x - n.$$

Ce minorant tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$.

- c.** La fonction g_n est continue et strictement croissante, avec $g_n(n) = 0$ et une limite égale à $+\infty$. Le théorème de la bijection montre qu'elle réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Il existe donc un unique $x_n \in [n, +\infty[$ tel que $g_n(x_n) = 1$. Comme $g_n(n) = 0$, on a même $x_n > n$.

2) Étude de la suite (x_n) .

- a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$. Comme $n \rightarrow +\infty$, la comparaison donne $x_n \rightarrow +\infty$.

- b.** Sur $[n, x_n]$, les nombres considérés sont positifs ou nuls, donc $n^2 \leq t^2 \leq x_n^2$. En intégrant $e^{n^2} \leq e^{t^2} \leq e^{x_n^2}$, on obtient

$$(x_n - n)e^{n^2} \leq \int_n^{x_n} e^{t^2} dt = 1 \leq (x_n - n)e^{x_n^2}.$$

Les exponentielles sont strictement positives. On peut donc diviser et conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}.$$

3) On pose $u_n = x_n - n$.

a. La question 2) b. donne $0 < u_n \leq e^{-n^2}$. Le majorant tend vers zéro, donc $u_n \rightarrow 0$ par encadrement.

b. Pour $n \geq 1$, $0 \leq nu_n \leq ne^{-n^2} \leq ne^{-n}$. Les croissances comparées donnent $ne^{-n} \rightarrow 0$. Par encadrement, $nu_n \rightarrow 0$.

c. On utilise l'encadrement demandé, sans composer directement un équivalent avec l'exponentielle. En divisant 2) b. par $e^{-n^2} > 0$, on obtient

$$e^{n^2-x_n^2} \leq \frac{x_n - n}{e^{-n^2}} \leq 1.$$

Or $x_n = n + u_n$, donc $x_n^2 - n^2 = 2nu_n + u_n^2 \rightarrow 0$ d'après 3) a. et 3) b. La continuité de l'exponentielle donne $e^{n^2-x_n^2} \rightarrow 1$. L'encadrement entraîne

$$\frac{x_n - n}{e^{-n^2}} \rightarrow 1, \quad x_n - n \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n^2}.$$

Exercice 2

Tous les tirages sont uniformes parmi les boules présentes. Les variables étudiées sont bornées : leurs espérances, variances et covariances existent.

1) a. Seuls les tirages impairs retirent une boule. Pour vider l'urne, il faut exactement n tirages impairs. Le dernier a lieu au rang $2n - 1$; l'épreuve s'arrête alors, puisqu'il ne reste plus de boule.

Il y a donc n tirages sans remise et $n - 1$ tirages avec remise, soit $N = 2n - 1$ tirages.

- b.** Avant le tirage de rang $2j$, les tirages impairs de rang $1, 3, \dots, 2j - 1$ ont retiré j boules : il en reste $n - j$.

Le tirage de rang $2j$ s'effectue avec remise, donc le nombre de boules ne change pas. Il reste également $n - j$ boules avant le tirage de rang $2j + 1$.

- 2) a.** Le premier tirage donne la boule noire avec probabilité $1/n$:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}.$$

Au deuxième tirage, la boule noire est présente si et seulement si le premier tirage a donné une boule blanche. Par probabilités composées,

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

La probabilité conditionnelle donnée par $X_1 = 1$ vaut zéro, puisque la boule noire a alors été retirée.

- b.** Méthode 1 — Rang de retrait de la boule noire.

On note $R \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le rang de la boule noire dans la succession des n tirages sans remise. Les tirages pairs ne modifient pas le contenu de l'urne. Les retraits impairs suivent donc un tirage sans remise classique.

Pour justifier l'équiprobabilité des rangs, on peut distinguer provisoirement les boules blanches. Toute permutation des n boules comme ordre de retrait a pour probabilité $1/(n(n-1)\cdots 1) = 1/n!$. Pour chaque rang r , il existe $(n-1)!$ permutations qui y placent la boule noire. Ainsi

$$P(R = r) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } r \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

La boule noire apparaît au tirage de rang $2j + 1$ si et seulement si $R = j + 1$. Par conséquent $P(X_{2j+1} = 1) = 1/n$.

Avant le tirage de rang $2j$, la boule noire est présente si et seulement si $R > j$, événement de probabilité $(n - j)/n$. Dans ce cas, il reste $n - j$ boules et la probabilité de tirer la noire vaut $1/(n - j)$. Ainsi

$$P(X_{2j} = 1) = \frac{n - j}{n} \frac{1}{n - j} = \frac{1}{n}.$$

Méthode 2 — Probabilités de présence dans l'urne.

Notons q_j la probabilité que la boule noire soit encore présente après les j premiers retraits impairs, avec $q_0 = 1$. Pour $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, avant le retrait suivant il reste $n - j$ boules. Si la noire est présente, elle survit à ce retrait avec probabilité $(n - j - 1)/(n - j)$. Les tirages pairs avec remise ne changent pas cet état. On obtient donc

$$q_{j+1} = q_j \frac{n - j - 1}{n - j}.$$

Par récurrence, $q_j = (n - j)/n$ pour $0 \leq j \leq n$. Avant les tirages de rang $2j$ et $2j + 1$, la noire est présente avec probabilité q_j et il reste $n - j > 0$ boules. Pour chacun de ces deux tirages,

$$P(X_{2j} = 1) = P(X_{2j+1} = 1) = \frac{q_j}{n - j} = \frac{1}{n}.$$

La première approche utilise la symétrie globale des retraits ; la seconde suit pas à pas l'état de l'urne et se réutilise lorsque les règles de retrait varient.

- c. Chaque X_k ne prend que les valeurs 0 et 1. D'après 2) a. et 2) b., pour tout $k \in \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$,

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n}, \quad P(X_k = 0) = \frac{n-1}{n}.$$

Ainsi X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. En particulier, $E(X_k) = 1/n$ et $V(X_k) = (n-1)/n^2$. Cette identité des lois ne signifie pas que les variables sont indépendantes.

- 3) a. Avant le tirage de rang $2n-2$, il ne reste qu'une boule. Si la boule noire n'a jamais été tirée auparavant, elle est encore dans l'urne et en est donc l'unique boule. Le tirage de rang $2n-2$ la donne nécessairement. Sa première apparition ne peut alors avoir lieu au rang $2n-1$. Si elle est déjà apparue, l'événement U_n est également impossible. Ainsi $P(U_n) = 0$.

Fixons maintenant $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Pour réaliser U_j , il faut obtenir des boules blanches aux $2j-2$ premiers tirages, puis la boule noire au tirage de rang $2j-1$.

Pour $\ell \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$, sous la condition que tous les tirages précédents sont blancs, avant le tirage de rang $2\ell-1$ il reste $n-\ell+1$ boules, dont une noire. La probabilité de tirer une blanche vaut $(n-\ell)/(n-\ell+1)$. Après ce retrait, la probabilité de tirer une blanche au tirage de rang 2ℓ vaut $(n-\ell-1)/(n-\ell)$.

Avant le tirage final de rang $2j-1$, il reste $n-j+1$ boules dont une noire. La formule des probabilités composées donne

$$P(U_j) = \left(\prod_{\ell=1}^{j-1} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} \frac{n-\ell-1}{n-\ell} \right) \frac{1}{n-j+1}.$$

Les deux produits télescopiques vérifient

$$\prod_{\ell=1}^{j-1} \frac{n-\ell}{n-\ell+1} = \frac{n-j+1}{n}, \quad \prod_{\ell=1}^{j-1} \frac{n-\ell-1}{n-\ell} = \frac{n-j}{n-1}.$$

Pour $j=1$, les produits sont vides et valent 1 ; les formules restent valables. Il vient

$$P(U_j) = \frac{n-j+1}{n} \frac{n-j}{n-1} \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n(n-1)}.$$

Pour $j = n$, cette expression vaut zéro, conformément au raisonnement initial. Elle est donc valable pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- b.** La boule noire finit nécessairement par être retirée à un tirage impair et apparaît donc au moins une fois. Si sa première apparition est impaire, elle est retirée immédiatement et ne réapparaît pas : U_j implique $X = 1$.

Réciproquement, si sa première apparition était paire, elle serait remise dans l'urne et apparaîtrait de nouveau lors de son retrait impair. On aurait alors $X \geq 2$. Ainsi une seule apparition signifie que la première apparition est impaire.

Les événements U_j sont deux à deux incompatibles. On a donc

$$\{X = 1\} = \bigcup_{j=1}^n U_j, \quad P(X = 1) = \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)/2}{n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

- c.** La noire apparaît exactement une fois lors d'un tirage impair, celui qui la retire. Elle peut aussi apparaître lors de certains des $n-1$ tirages pairs. Par conséquent $1 \leq X \leq n$.

Pour que $X = n$, il faut et il suffit que tous les tirages pairs donnent la noire. Cela impose que les $n-1$ premiers tirages impairs donnent des blanches, la noire étant retirée au dernier tirage.

Pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sous la condition que les paires précédentes ont ce comportement, la probabilité de tirer une blanche au rang $2j-1$ vaut $(n-j)/(n-j+1)$. Il reste ensuite $n-j$ boules, et la probabilité de tirer la noire au rang $2j$ vaut $1/(n-j)$. Le dernier tirage donne la noire avec probabilité 1. Par probabilités composées,

$$P(X = n) = \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{n-j}{n-j+1} \frac{1}{n-j} \right) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-j+1} = \frac{1}{n!}.$$

4) Méthode 1 — Somme des indicatrices.

Chaque X_k compte l'apparition éventuelle de la noire au tirage de rang k . Leur somme compte donc exactement toutes ses apparitions :

$$X = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k.$$

Toutes ces variables étant bornées, la linéarité de l'espérance s'applique sans hypothèse d'indépendance. D'après 2) c.,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Méthode 2 — Conditionnement par le rang de retrait.

On conserve le rang uniforme R défini en 2) b. Sous la condition $R = r$, la noire est tirée une fois au rang impair $2r - 1$. Elle est encore présente aux tirages pairs de rang $2j$ avec $1 \leq j < r$.

Les tirages pairs ne modifient pas l'ordre des retraits. Conditionnellement à un ordre de retrait fixé plaçant la noire au rang r , chacun de ces tirages pairs est uniforme parmi $n - j$ boules, donc donne la noire avec probabilité $1/(n - j)$. Cette probabilité ne dépend pas du reste de l'ordre de retrait ; elle est donc aussi valable conditionnellement à $R = r$. Par linéarité,

$$E(X \mid R = r) = 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{n - j}.$$

L'espérance totale pour le système complet $\{R = r\}$ donne, en réordonnant seulement des sommes finies,

$$E(X) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{n-j} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{n-j} = 2 - \frac{1}{n}.$$

La première méthode compte les apparitions par instant ; la seconde les organise autour de l'instant du retrait définitif.

5) Soit $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

- a. L'événement $\{X_{2i+1} = 1\}$ a pour probabilité $1/n > 0$. Le tirage de rang $2i+1$ s'effectue sans remise : sous cet événement, la noire est retirée définitivement. Aucun tirage ultérieur ne peut la donner.

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, 2n-2i-2 \rrbracket$,

$$P(X_{2i+j+1} = 1 \mid X_{2i+1} = 1) = 0.$$

- b. Pour deux indicatrices A et B , $E(AB)$ est la probabilité qu'elles valent simultanément 1. D'après 5) a.,

$$E(X_{2i+1}X_{2i+j+1}) = P(X_{2i+1} = 1)P(X_{2i+j+1} = 1 \mid X_{2i+1} = 1) = 0.$$

Les deux espérances valent $1/n$. La formule de la covariance donne donc

$$\text{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = 0 - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}.$$

- 6) Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Posons $m = n-i \geq 1$ et $A = \{X_{2i} = 1\}$, événement de probabilité $1/n > 0$.

Conditionnellement à A , après le tirage de rang $2i$, la noire a été remise et l'urne contient m boules dont une noire. L'épreuve restante commence par un tirage sans remise et suit

les mêmes règles. Quel que soit l'historique ayant conduit à A , les futurs tirages sont uniformes dans cette urne. Le raisonnement sur les retraits de 2) b. s'applique donc conditionnellement : la probabilité que la noire survive à k nouveaux retraits impairs vaut $(m - k)/m$ pour $0 \leq k \leq m$.

- a. Si $k \in \llbracket 1, m - 1 \rrbracket$, avant le tirage de rang $2i + 2k$, il y a eu k nouveaux retraits et il reste $m - k > 0$ boules. D'où

$$P(X_{2i+2k} = 1 \mid A) = \frac{m - k}{m} \frac{1}{m - k} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n - i}.$$

Si $i = n - 1$, l'intervalle des indices est vide : il n'y a aucun tirage pair ultérieur et aucune égalité à établir dans cette sous-question.

- b. Pour $k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$, avant le tirage de rang $2i + 2k + 1$, il y a également eu k nouveaux retraits. La même décomposition donne

$$P(X_{2i+2k+1} = 1 \mid A) = \frac{m - k}{m} \frac{1}{m - k} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n - i}.$$

Cela inclut $k = 0$, c'est-à-dire le tout prochain tirage. Si $m = 1$, cet unique tirage donne nécessairement la noire, et la formule vaut bien 1.

- c. Les rangs $2i + j$, avec $1 \leq j \leq 2n - 2i - 1$, recouvrent tous les tirages ultérieurs, pairs ou impairs. Les questions 6) a. et 6) b. donnent dans tous les cas

$$E(X_{2i}X_{2i+j}) = P(X_{2i} = 1)P(X_{2i+j} = 1 \mid X_{2i} = 1) = \frac{1}{n(n - i)}.$$

D'après les lois marginales, $E(X_{2i}) = E(X_{2i+j}) = 1/n$. Ainsi

$$\text{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \frac{1}{n(n - i)} - \frac{1}{n^2} = \frac{i}{n^2(n - i)}.$$

7) On applique la formule de la variance d'une somme finie :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq 2n-1} \text{Cov}(X_k, X_\ell).$$

Le premier terme vaut $(2n-1)(n-1)/n^2$. Pour calculer la somme des covariances, on distingue la parité du premier rang k , ce qui compte chaque paire exactement une fois.

Si $k = 2i + 1$, avec $0 \leq i \leq n-2$, il existe $2n - 2i - 2 = 2(n - i - 1)$ rangs ultérieurs.

D'après 5) b., leur contribution totale vaut

$$S_{\text{imp}} = -\frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} 2(n-i-1) = -\frac{n(n-1)}{n^2}.$$

Le dernier rang impair $2n-1$ n'a pas de rang ultérieur. Si $k = 2i$, avec $1 \leq i \leq n-1$, il existe $2n - 2i - 1 = 2(n-i) - 1$ rangs ultérieurs. D'après 6) c.,

$$S_{\text{pair}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(2(n-i)-1)}{n-i} = \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-i} \right).$$

Posons

$$H_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} 1/j.$$

En effectuant le changement d'indice $j = n - i$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} = nH_{n-1} - (n-1).$$

Comme

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1),$$

on obtient

$$S_{\text{pair}} = \frac{n(n-1) - nH_{n-1} + (n-1)}{n^2} = \frac{n^2 - 1 - nH_{n-1}}{n^2}.$$

La somme de toutes les covariances non doublée est donc

$$S_{\text{imp}} + S_{\text{pair}} = \frac{n-1 - nH_{n-1}}{n^2}.$$

Finalement,

$$V(X) = \frac{(2n-1)(n-1) + 2(n-1) - 2nH_{n-1}}{n^2} = \frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Pour le cas limite $n = 2$, cela donne $V(X) = 1/4$, en accord avec

$$P(X = 1) = P(X = 2) = 1/2.$$

Exercice 3

On travaille exclusivement sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. On pose $w = v - Id$: les assertions (A_2) et (A_3) signifient $w \neq \theta$ et $w^2 = \theta$.

1) Étude d'un exemple.

On vérifie chaque assertion sur les matrices proposées. Avec I_2 la matrice identité et 0_2 la matrice nulle,

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Ensuite $V \neq I_2$ et

$$V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (V - I_2)^2 = 0_2.$$

Enfin,

$$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice envoie le vecteur de coordonnées (x, y) sur celui de coordonnées $(0, x)$.

Son noyau est donc $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(j)$, qui n'est pas réduit à zéro.

Les quatre assertions sont vérifiées : ce couple est solution.

On revient désormais à un couple quelconque satisfaisant les quatre assertions.

2) a. L'égalité $u^2 = -Id$ entraîne

$$u \circ (-u) = (-u) \circ u = Id.$$

Ainsi u est un automorphisme et $u^{-1} = -u$.

Puisque $v = Id + w$ et $w^2 = \theta$,

$$(Id + w) \circ (Id - w) = (Id - w) \circ (Id + w) = Id - w^2 = Id.$$

Ainsi v est un automorphisme et $v^{-1} = Id - w = 2Id - v$.

b. Méthode 1 — Binôme et carré nul.

Les endomorphismes Id et w commutent. Pour $n \geq 1$, le binôme donne

$$v^n = (Id + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k = Id + nw,$$

car $w^k = \theta$ pour $k \geq 2$. La formule est aussi vraie pour $n = 0$, puisque $v^0 = Id$. En remplaçant w par $v - Id$, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v^n = nv + (1 - n)Id.$$

Méthode 2 — Récurrence à partir de la relation quadratique.

L'égalité $(v - Id)^2 = \theta$ donne $v^2 = 2v - Id$. La formule annoncée est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie au rang n . Alors

$$v^{n+1} = v \circ (nv + (1 - n)Id) = nv^2 + (1 - n)v = n(2v - Id) + (1 - n)v = (n + 1)v - nId.$$

C'est la formule au rang $n + 1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Le binôme exploite directement la décomposition $v = Id + w$; la récurrence illustre le calcul de puissances à partir d'une relation polynomiale concrète.

- 3) a. Si $y \in \text{Im}(w)$, il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = w(x)$. Alors $w(y) = w^2(x) = 0$, donc $y \in \text{Ker}(w)$.

On a bien $\text{Im}(v - Id) \subset \text{Ker}(v - Id)$.

- b. Posons $r = \dim \text{Im}(w)$. Comme $w \neq \theta$, on a $r \geq 1$. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(w) = 2 - r$. L'inclusion précédente implique $r \leq 2 - r$, donc $r \leq 1$.

Ainsi $r = 1$ et $\dim \text{Ker}(w) = 1$. Les deux sous-espaces ont la même dimension, et l'un est inclus dans l'autre :

$$\text{Im}(v - Id) = \text{Ker}(v - Id), \quad \dim \text{Im}(v - Id) = \dim \text{Ker}(v - Id) = 1.$$

- 4) D'après (A_4) , le noyau de $u + w$ a une dimension au moins égale à 1. Sa dimension vaut donc 1 ou 2.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle vaut 2. Le noyau serait tout $\mathbb{R}^2$, donc $u + w = \theta$ et $w = -u$. On aurait alors

$$\theta = w^2 = (-u)^2 = u^2 = -Id,$$

ce qui est impossible : Id n'est pas l'endomorphisme nul sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent $\dim \text{Ker}(u + v - Id) = 1$.

- 5) On choisit $e_2 \neq 0$ engendrant $\text{Ker}(u + w)$ et on pose $e_1 = -u(e_2)$.

- a. Comme u est injectif et $e_2 \neq 0$, $e_1 \neq 0$. Supposons que la famille (e_1, e_2) soit liée. Il existerait alors un réel t tel que $e_1 = te_2$. Par définition, $u(e_2) = -te_2$, donc

$$u^2(e_2) = u(-te_2) = -tu(e_2) = t^2e_2.$$

Mais $u^2(e_2) = -e_2$. On obtient $(t^2 + 1)e_2 = 0$. Comme $e_2 \neq 0$, cela impose $t^2 + 1 = 0$, impossible pour un réel t .

La famille (e_1, e_2) est donc libre. Elle possède deux vecteurs dans un espace de dimension 2 : c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Par définition et par (A_1) ,

$$u(e_2) = -e_1, \quad u(e_1) = -u^2(e_2) = e_2.$$

On lit les coordonnées de ces images en colonnes :

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

Comme $e_2 \in \text{Ker}(u + w)$, on a $w(e_2) = -u(e_2) = e_1$. Puis $w(e_1) = w^2(e_2) = 0$. Ainsi

$$v(e_1) = e_1, \quad v(e_2) = e_2 + e_1,$$

et donc

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V.$$

6) La construction précédente prouve la nécessité : tout couple solution possède une même base dans laquelle ses deux matrices sont respectivement U et V .

Réciproquement, si deux endomorphismes ont ces matrices dans une même base, les calculs de la question 1) donnent $u^2 = -Id$, $v \neq Id$ et $(v - Id)^2 = \theta$. La matrice

$U + V - I_2$ a pour noyau la droite engendrée par le second vecteur de cette base, ce qui établit également (A_4) . Les quatre assertions sont donc satisfaites.

Les solutions sont exactement les couples admettant une base commune avec les matrices U et V . En termes de matrices dans la base canonique, elles sont exactement

$$(PUP^{-1}, PVP^{-1}), \quad P \in \text{GL}_2(\mathbb{R}),$$

avec la même matrice réelle inversible P pour les deux conjugaisons. Ici $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ désigne simplement l'ensemble des matrices réelles inversibles d'ordre 2.

Problème

On fixe $n \geq 1$. Tous les éléments de E_n sont de la forme $x \mapsto Q(x)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, avec Q un polynôme réel de degré au plus n . Ces fonctions sont restrictions de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$; en zéro, leur dérivée sur $\mathbb{R}_+$ est comprise à droite.

Partie 1

- 1) La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est génératrice par définition de E_n . Pour montrer qu'elle est libre, supposons

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0.$$

Pour tout $x \geq 0$, cela donne

$$e^{-x} \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k = 0.$$

L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$$

s'annule pour tout $x \geq 0$.

Un polynôme non nul ne possède qu'un nombre fini de racines. Ainsi Q est le polynôme nul, et tous les λ_k sont nuls. La famille est libre et génératrice : c'est une base de E_n . En particulier, $\dim E_n = n + 1$.

2) a. La dérivée de $f_0(x) = e^{-x}$ est $-e^{-x}$, donc $d(f_0) = -f_0$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la dérivation d'un produit donne

$$f'_k(x) = kx^{k-1}e^{-x} - x^k e^{-x}.$$

Ainsi $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$, y compris en zéro par dérivation à droite ou par restriction du prolongement sur $\mathbb{R}$.

b. La dérivation est linéaire. De plus, d'après 2) a., l'image de chaque vecteur de la base $(f_0, \dots, f_n)$ appartient à E_n . Par linéarité, l'image de toute combinaison linéaire de cette base appartient encore à E_n .

L'application d est donc un endomorphisme de E_n .

3) a. Méthode 1 — Matrice triangulaire.

Dans la base $(f_0, \dots, f_n)$, les images trouvées en 2) a. montrent que la matrice de d est triangulaire supérieure. Tous ses coefficients diagonaux valent -1 ; le coefficient en ligne $k - 1$ et colonne k vaut k pour $1 \leq k \leq n$, en indexant à partir de zéro.

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Ils valent ici -1 , donc la matrice est inversible et d est un automorphisme.

Méthode 2 — Noyau et comportement à l'infini.

Soit $f \in \text{Ker } d$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $f' = 0$. Par le théorème des accroissements finis sur chaque segment, elle est constante.

Mais $f(x) = Q(x)e^{-x}$ avec Q polynomial. Les croissances comparées donnent $x^k e^{-x} \rightarrow 0$ pour tout entier $k \geq 0$, donc $f(x) \rightarrow 0$ comme somme finie de tels termes. La constante est nécessairement nulle : $\text{Ker } d = \{0\}$.

Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif. Ainsi d est un automorphisme.

La première méthode reconnaît l'inversibilité dans la matrice ; la seconde utilise la signification fonctionnelle d'une dérivée nulle.

b. Par linéarité de d et par 2) a., pour $1 \leq k \leq n$,

$$d\left(\frac{1}{k!}f_k\right) = \frac{1}{k!}(kf_{k-1} - f_k) = \frac{1}{(k-1)!}f_{k-1} - \frac{1}{k!}f_k.$$

C'est exactement la relation demandée.

c. Méthode 1 — Télescopage des dérivées normalisées.

Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons

$$S_j = \sum_{k=0}^j f_k/k!.$$

Si $j \geq 1$, la question 3) b. et $d(f_0) = -f_0$ donnent

$$d(S_j) = -f_0 + \sum_{k=1}^j \left(\frac{f_{k-1}}{(k-1)!} - \frac{f_k}{k!} \right) = -\frac{f_j}{j!}.$$

Pour $j = 0$, on obtient également $d(S_0) = -f_0$. Par conséquent $d(-j!S_j) = f_j$.

L'inversibilité de d justifie l'identification unique :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad d^{-1}(f_j) = -j! \sum_{k=0}^j \frac{f_k}{k!}.$$

Les coordonnées dans la base sont donc $-j!/k!$ pour $0 \leq k \leq j$, et zéro pour $k > j$.

Méthode 2 — Inverse d'une somme avec un endomorphisme à puissance nulle.

Posons $T = d + Id_{E_n}$. Les relations de 2) a. donnent $T(f_0) = 0$ et $T(f_k) = kf_{k-1}$ pour $k \geq 1$. En itérant,

$$T^r(f_j) = \frac{j!}{(j-r)!} f_{j-r} \quad \text{si } 0 \leq r \leq j, \quad T^r(f_j) = 0 \quad \text{si } r > j.$$

Ainsi $T^{n+1} = 0$ sur une base, donc sur tout E_n . La multiplication de sommes finies donne

$$(Id_{E_n} - T) \left(\sum_{r=0}^n T^r \right) = \left(\sum_{r=0}^n T^r \right) (Id_{E_n} - T) = Id_{E_n} - T^{n+1} = Id_{E_n}.$$

Comme $d = -(Id_{E_n} - T)$, on en déduit

$$d^{-1} = - \sum_{r=0}^n T^r.$$

En appliquant cette identité à f_j ,

$$d^{-1}(f_j) = - \sum_{r=0}^j \frac{j!}{(j-r)!} f_{j-r} = -j! \sum_{k=0}^j \frac{f_k}{k!}.$$

Le télescopage suit directement l'indication de l'énoncé ; la seconde méthode calcule un inverse par une identité polynomiale finie, sans théorie générale de réduction.

4) Méthode 1 — Primitive explicite fournie par la question précédente.

Fixons un entier naturel j . Le raisonnement précédent est valable dans tout espace E_N avec $N \geq \max(1, j)$: il fournit la primitive

$$F_j(x) = -j!e^{-x} \sum_{k=0}^j \frac{x^k}{k!}$$

de $x \mapsto x^j e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $A > 0$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\int_0^A x^j e^{-x} dx = F_j(A) - F_j(0) = j! - j!e^{-A} \sum_{k=0}^j \frac{A^k}{k!}.$$

Chaque terme $A^k e^{-A}$ tend vers zéro par croissances comparées. Comme la somme est finie, son produit avec e^{-A} tend vers zéro. La limite des intégrales sur $[0, A]$ existe donc et vaut $j!$.

Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre I_j converge et $I_j = j!$.

Méthode 2 — Convergence par comparaison, puis intégration par parties.

Pour tout entier $j \geq 0$, les croissances comparées donnent $x^j e^{-x/2} \rightarrow 0$. Il existe donc $A_j > 0$ tel que, pour $x \geq A_j$,

$$0 \leq x^j e^{-x} \leq e^{-x/2}.$$

L'intégrande est continu sur le segment $[0, A_j]$, et $\int_{A_j}^{+\infty} e^{-x/2} dx$ converge. La comparaison prouve donc la convergence de tous les I_j avant leur calcul.

On a $I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1$. Pour $j \geq 1$, une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $u(x) = x^j$ et $v'(x) = e^{-x}$, donne

$$\int_0^A x^j e^{-x} dx = -A^j e^{-A} + j \int_0^A x^{j-1} e^{-x} dx.$$

Le terme de bord en zéro est nul puisque $j \geq 1$. Les intégrales ont des limites finies déjà justifiées, et $A^j e^{-A} \rightarrow 0$. En passant à la limite, $I_j = j I_{j-1}$. Une récurrence à partir de $I_0 = 1$ donne $I_j = j!$.

La première méthode exploite l'inverse de la dérivation imposé par l'énoncé; la seconde est le calcul classique des moments exponentiels par intégration par parties.

5) Il faut d'abord vérifier que l'intégrale proposée est bien définie pour tous les éléments de E_n . Écrivons $f(x) = Q(x)e^{-x}$ et $g(x) = R(x)e^{-x}$, avec Q et R de degrés au plus n . Le produit QR est un polynôme de degré au plus $2n$; écrivons

$$Q(x)R(x) = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k.$$

Pour $x \geq 0$,

$$|f(x)g(x)e^x| = |Q(x)R(x)|e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} |b_k| x^k e^{-x}.$$

Chaque intégrale I_k converge d'après la question 4). La somme est finie ; la comparaison prouve donc la convergence absolue de l'intégrale définissant (f/g) .

La symétrie résulte de $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. La bilinéarité résulte de la linéarité de l'intégrale, applicable puisque les intégrales considérées convergent absolument. Enfin,

$$(f/f) = \int_0^{+\infty} f(x)^2 e^x dx \geq 0.$$

Si $f \neq 0$, il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité, on peut choisir un segment de longueur strictement positive dans $[0, +\infty[$ sur lequel $|f(x)| \geq c$ pour un réel $c > 0$. Cette construction reste possible si $x_0 = 0$, en prenant un segment à droite de zéro. Sur ce segment, $f(x)^2 e^x \geq c^2$, donc l'intégrale est strictement positive.

Ainsi $(f/f) = 0$ implique $f = 0$. L'application est symétrique, bilinéaire et définie positive : c'est un produit scalaire sur E_n . La norme associée est $\|f\| = \sqrt{(f/f)}$.

On dispose en outre de l'identité utile pour la suite : pour $j, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(f_j/f_k) = \int_0^{+\infty} x^{j+k} e^{-x} dx = I_{j+k} = (j+k)!.$$

Partie 2

1) On considère le sous-espace $E_{n-1} = \text{Vect}(f_0, \dots, f_{n-1})$ de l'espace euclidien E_n .

a. Le théorème de projection orthogonale dans un espace euclidien affirme que, pour tout sous-espace F et tout vecteur z , il existe un unique $p_F(z) \in F$ tel que $z - p_F(z) \in F^\perp$. Ce vecteur est aussi l'unique élément de F minimisant la distance à z .

Ici E_n est de dimension finie et muni du produit scalaire de la partie 1 ; E_{n-1} est un sous-espace. Toutes les hypothèses sont satisfaites. Ainsi $h = p_{E_{n-1}}(f_n)$ existe et est l'unique élément vérifiant

$$\|f_n - h\| = \inf_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|.$$

La propriété de minimum se voit par Pythagore : pour tout $g \in E_{n-1}$, les vecteurs $f_n - h \in E_{n-1}^\perp$ et $h - g \in E_{n-1}$ sont orthogonaux, donc

$$\|f_n - g\|^2 = \|f_n - h\|^2 + \|h - g\|^2 \geq \|f_n - h\|^2.$$

L'égalité vaut si et seulement si $g = h$, ce qui donne l'unicité du minimiseur. Comme $(f_0, \dots, f_{n-1})$ est une base de E_{n-1} , les réels a_j définis par

$$h = - \sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$$

sont uniques.

- b.** Par la caractérisation du projeté orthogonal, $f_n - h \in E_{n-1}^\perp$. Chaque f_k , avec $0 \leq k \leq n-1$, appartient à E_{n-1} . Par conséquent

$$(f_n - h / f_k) = 0, \quad f_n - h \perp f_k.$$

- c.** Il faut conserver le signe de la définition de h . On a

$$f_n - h = f_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j.$$

En prenant le produit scalaire avec f_k et en utilisant l'orthogonalité,

$$0 = (f_n/f_k) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (f_j/f_k).$$

L'identité obtenue en partie 1, question 5), donne alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0.$$

2) On considère le polynôme

$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1) \cdots (x+j) + (x+1) \cdots (x+n).$$

Pour $n = 1$, la somme de $j = 1$ à $n - 1$ est vide et vaut zéro.

a. Fixons $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour $j \geq 1$,

$$(k+1) \cdots (k+j) = \frac{(k+j)!}{k!}.$$

De même, $(k+1) \cdots (k+n) = (k+n)!/k!$. Le terme constant peut s'écrire $a_0 = a_0 k!/k!$.

Ainsi

$$P(k) = \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j (k+j)! + (k+n)! \right) = 0$$

d'après la question 1) c. Comme $k! > 0$, toutes les divisions sont justifiées. On a bien $P(k) = 0$ pour chacun des n entiers $0, 1, \dots, n-1$.

- b.** Le dernier produit est un polynôme unitaire de degré n . Les autres termes sont de degrés au plus $n - 1$. Ainsi P est unitaire de degré n .

D'après 2) a., il possède les n racines distinctes $0, 1, \dots, n - 1$. Les propriétés de divisibilité des polynômes donnent

$$P(x) = \prod_{\ell=0}^{n-1} (x - \ell) = x(x - 1) \cdots (x - n + 1).$$

Le coefficient multiplicatif vaut 1 puisque P est unitaire. En particulier,

$$P(n) = n(n - 1) \cdots 1 = n!.$$

Pour $n = 1$, cette formule donne $P(x) = x$ et $P(1) = 1$, conformément à l'énoncé.

- 3) a.** Posons $r = f_n - h$. Comme $h \in E_{n-1}$ et $r \in E_{n-1}^\perp$, on a $(r/h) = 0$. Par bilinéarité,

$$\|f_n - h\|^2 = (r/r) = (r/f_n - h) = (r/f_n) - (r/h) = (r/f_n).$$

Il s'agit bien de l'identité $\|f_n - h\|^2 = (f_n - h/f_n)$.

- b.** Pour $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, posons

$$g_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_k.$$

L'expression sous l'infimum vaut

$$\int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \right)^2 e^{-x} dx = \|f_n - g_\alpha\|^2.$$

Cette intégrale converge, car son intégrande est un polynôme multiplié par e^{-x} , et la partie 1, question 4), établit la convergence de chacun des moments nécessaires. Lorsque α parcourt $\mathbb{R}^n$, g_α parcourt exactement E_{n-1} . La propriété du projeté donne donc un minimum atteint et

$$m = \|f_n - h\|^2.$$

D'après 3) a. et la définition de h ,

$$m = (f_n - h/f_n) = (f_n/f_n) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (f_j/f_n) = (2n)! + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)!.$$

En évaluant l'expression de P en n , on obtient

$$n!P(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! + (2n)!.$$

Ainsi $m = n!P(n)$. La question 2) b. donne $P(n) = n!$, d'où

$$m = (n!)^2.$$

Le minimum est atteint uniquement pour $g_\alpha = h$, c'est-à-dire $\alpha_k = -a_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puisque la famille $(f_0, \dots, f_{n-1})$ est libre.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation de fond n'est nécessaire : toutes les questions peuvent être traitées avec les outils du référentiel fourni. Aucun résultat supplémentaire n'est admis.