



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Question préliminaire

On utilise la comparaison des séries à termes positifs. La convergence de

$$\sum x_n$$

implique $x_n \rightarrow 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $0 \leq x_n \leq 1$. Alors

$$0 \leq x_n^2 \leq x_n.$$

La série

$$\sum_{n \geq N} x_n^2$$

converge par comparaison avec

$$\sum_{n \geq N} x_n.$$

Ajouter un nombre fini de termes ne change pas la nature d'une série :

$$\sum x_n^2$$

converge.

- 1) On étudie la dérivée pour déterminer les variations. La fonction ch est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; elle est paire. Sa dérivée est

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Elle est strictement négative pour $x < 0$, nulle pour $x = 0$ et strictement positive pour $x > 0$. De plus, $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{ch}(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de ch'	$-$	0	$+$
Variations de ch	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

Ainsi, $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout réel x , avec égalité seulement pour $x = 0$.

2) On additionne les développements limités usuels de l'exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Il vient

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

3a) On raisonne par récurrence pour la positivité. On a $u_0 = 1 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $\text{ch}(u_n) > 1$, donc

$$0 < u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)} < u_n.$$

La suite est donc bien définie, strictement positive et strictement décroissante. En particulier, $0 < u_n \leq 1$ pour tout n .

3b) La suite décroît et est minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone donne une limite $\ell \geq 0$.

La fonction $x \mapsto x / \operatorname{ch}(x)$ est continue, car $\operatorname{ch}(x) \geq 1$. Le passage à la limite dans la relation de récurrence donne

$$\ell = \frac{\ell}{\operatorname{ch}(\ell)}, \quad \ell(\operatorname{ch}(\ell) - 1) = 0.$$

Si $\ell > 0$, alors $\operatorname{ch}(\ell) > 1$, ce qui contredit cette égalité. Ainsi, $u_n \rightarrow 0$.

4a) On exprime v_n à l'aide de la récurrence :

$$v_n = \frac{1}{\operatorname{ch}(u_n)} - 1.$$

Comme $u_n > 0$ et $\operatorname{ch}(u_n) > 1$, on obtient $-1 < v_n < 0$. Tous les termes de (v_n) sont strictement négatifs.

4b) La continuité de ch et $u_n \rightarrow 0$ donnent

$$v_n \longrightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}(0)} - 1 = 0.$$

4c) On fait apparaître une somme télescopique. Les nombres u_k sont strictement positifs, donc les logarithmes sont définis et

$$\ln(1 + v_k) = \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln u_{k+1} - \ln u_k.$$

Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \ln u_n - \ln u_0 = \ln u_n.$$

Puisque $u_n \rightarrow 0$ par valeurs positives, ces sommes partielles tendent vers $-\infty$.

Il reste à transférer cette divergence à

$$\sum v_n,$$

sans utiliser une comparaison de séries de signes quelconques. Le développement limité $\ln(1+t) = t + o(t)$ en 0 donne

$$\frac{-\ln(1+v_n)}{-v_n} \rightarrow 1.$$

Pour n suffisamment grand, $0 < -\ln(1+v_n) \leq 2(-v_n)$. La série positive

$$\sum [-\ln(1+v_n)]$$

diverge ; par comparaison,

$$\sum (-v_n)$$

diverge aussi. Les sommes partielles de

$$\sum v_n$$

tendent donc vers $-\infty$.

5a) On utilise le résultat de 2) sous la forme d'une limite de quotient, sans composer des développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Comme $u_n > 0$ et $u_n \rightarrow 0$, on peut évaluer ce quotient en u_n . Or

$$\frac{v_n}{-u_n^2/2} = \frac{2(\operatorname{ch}(u_n) - 1)}{u_n^2 \operatorname{ch}(u_n)} \rightarrow 1.$$

On conclut que $v_n \sim -u_n^2/2$.

5b) Les termes $-v_n$ et $u_n^2/2$ sont positifs et équivalents. La question 4c) montre que

$$\sum (-v_n)$$

diverge. Le critère d'équivalence des séries à termes positifs entraîne donc la divergence de

$$\sum u_n^2,$$

dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$.

5c) On applique la contraposée du préliminaire à la suite positive (u_n) . Si

$$\sum u_n$$

convergeait,

$$\sum u_n^2$$

convergerait aussi, ce qui contredit 5b). Par conséquent,

$$\sum u_n$$

diverge vers $+\infty$.

Exercice 2

- 1) La première occurrence peut se produire au deuxième lancer exactement lorsque le premier résultat est Pile et le deuxième Face. Par indépendance,

$$P(X = 2) = P(P_1 F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- 2a) On décrit les suites de résultats compatibles avec une première occurrence au rang k . Supposons P_1 réalisé. Si une Face apparaissait avant le rang k , sa première apparition serait immédiatement précédée d'une Pile, et le motif Pile-Face apparaîtrait avant k .

Ainsi, $(X = k)$ impose des Piles aux rangs $2, \dots, k-1$ et une Face au rang k .

Réciproquement, la suite $P_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k$ contient sa première occurrence de Pile-Face aux rangs $k-1, k$. L'équivalence demandée est établie sous l'hypothèse P_1 .

- 2b) On conditionne sur le premier résultat. Sur P_1 , le cas décrit en 2a) a une probabilité conditionnelle $2^{-(k-1)}$.

Sur F_1 , aucun motif Pile-Face ne peut se terminer au rang 2. Les lancers à partir du deuxième sont indépendants du premier et ont la même loi que la suite initiale : le rang de la première occurrence dans cette nouvelle suite doit être $k-1$. La probabilité conditionnelle vaut donc $P(X = k-1)$.

La formule des probabilités totales donne

$$P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2}2^{-(k-1)} = \frac{1}{2}P(X = k-1) + 2^{-k}.$$

- 2c) On transforme la récurrence en récurrence arithmétique. Pour $k \geq 3$,

$$u_k = 2^k P(X = k) = 2^{k-1} P(X = k-1) + 1 = u_{k-1} + 1.$$

Comme $u_2 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$, on obtient $u_k = k - 1$. Ainsi,

$$\forall k \geq 2, \quad P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

Pour déterminer la masse en 0, on somme ces probabilités. La série géométrique dérivée donne, pour $|t| < 1$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} jt^j = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

En posant $j = k - 1$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Il en résulte $P(X = 0) = 0$. La loi est entièrement donnée par cette masse nulle et les probabilités ci-dessus ; X ne prend aucune autre valeur.

3) On présente deux calculs : le premier utilise la loi, le second compte les suites sans occurrence.

Méthode 1 — Série géométrique dérivée deux fois

La seconde série géométrique dérivée donne, pour $|t| < 1$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)t^{k-2} = \frac{2}{(1-t)^3}.$$

En multipliant par t^2 et en prenant $t = 1/2$, on obtient une série convergente de somme

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{2(1/2)^2}{(1-1/2)^3} = 4.$$

Cette convergence établit l'existence de l'espérance. Ainsi, $E(X) = 4$.

Méthode 2 — Probabilités de dépassement

Pour $m \geq 1$, une suite de m lancers sans motif Pile-Face doit être formée de Faces puis de Piles. Elle s'écrit $F^j P^{m-j}$, avec $j \in \{0, \dots, m\}$, soit $m+1$ suites équiprobables. Comme $P(X = 0) = 0$,

$$P(X > m) = \frac{m+1}{2^m}.$$

La formule vaut aussi pour $m = 0$. Justifions le calcul de l'espérance à partir de ces probabilités. Pour chaque entier $N \geq 1$, une somme finie donne

$$\sum_{m=0}^{N-1} P(X > m) = \sum_{k=1}^N kP(X = k) + NP(X > N).$$

Le membre de gauche converge vers une somme finie, car

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m+1}{2^m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{2^m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = 2 + 2 = 4.$$

Le dernier terme à droite vaut $N(N+1)2^{-N}$ et tend vers 0 par croissance comparée. Les sommes partielles de la série définissant l'espérance tendent donc vers 4, ce qui prouve à nouveau son existence et sa valeur.

La première méthode est efficace lorsqu'on connaît les masses ; la seconde exploite la structure des suites de lancers avant l'apparition du motif.

4a) Les événements F_1 et P_1 forment une partition de l'univers. En distinguant le deuxième résultat lorsque le premier est Pile, on a

$$P_1 = (P_1 P_2) \cup (P_1 F_2).$$

Cette union est disjointe, et ses deux événements sont disjoints de F_1 . Ainsi, $(F_1, P_1 P_2, P_1 F_2)$ est un système complet d'événements. Leurs probabilités sont respectivement $1/2$, $1/4$ et $1/4$.

4b) On utilise le système complet de 4a), avec $k \geq 4$.

Sur F_1 , le premier lancer ne peut appartenir à un motif Pile-Pile. En repartant du deuxième lancer, les résultats sont indépendants du premier et conservent leur loi ; la probabilité conditionnelle de $(Y = k)$ vaut $P(Y = k - 1)$.

Sur $P_1 P_2$, la première occurrence est au rang 2 ; la probabilité conditionnelle de $(Y = k)$ est donc nulle.

Sur $P_1 F_2$, aucune occurrence n'a lieu avant le troisième lancer, et la Face au deuxième empêche une occurrence reliant le deuxième au troisième lancer. La suite à partir du troisième lancer est indépendante des deux premiers. Son premier motif Pile-Pile doit se terminer à son rang $k - 2$, ce qui a pour probabilité $P(Y = k - 2)$.

Les probabilités totales donnent donc

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k - 1) + \frac{1}{4}P(Y = k - 2).$$

4c) La première occurrence au rang 2 correspond à $P_1 P_2$, donc $v_2 = 1/4$. Au rang 3, les deux derniers résultats doivent être Pile-Pile et le premier doit être Face pour éviter une occurrence au rang 2. Ainsi,

$$v_3 = P(F_1 P_2 P_3) = \frac{1}{8}.$$

Avec les valeurs auxiliaires $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on vérifie

$$\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_0 = \frac{1}{4} = v_2, \quad \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_1 = \frac{1}{8} = v_3.$$

Pour $k \geq 4$, la récurrence est celle de 4b). Elle vaut donc pour tout $k \geq 2$. Attention : $v_0 = 1$ sert à prolonger la récurrence ; cette valeur n'est pas $P(Y = 0)$.

4d) On résout une récurrence linéaire d'ordre deux à racines réelles distinctes. Son équation associée est

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0.$$

Posons $s = \sqrt{5}$, $\alpha = (1 + s)/4$ et $\beta = (1 - s)/4$. Les deux racines sont α et β , d'où $v_k = A\alpha^k + B\beta^k$.

Les conditions $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$ donnent

$$A + B = 1, \quad A\alpha + B\beta = 0.$$

Puisque $\alpha - \beta = s/2 \neq 0$,

$$A = \frac{-\beta}{\alpha - \beta} = \frac{s - 1}{2s}, \quad B = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{s + 1}{2s}.$$

Ainsi,

$$\forall k \geq 0, \quad v_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^k + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^k.$$

Pour donner la loi de Y , il reste à vérifier la masse en 0. On a $0 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 0$, donc

$$\sum_{k \geq 2} v_k$$

converge absolument. Notons sa somme S . En sommant la récurrence de 4c), toutes les séries étant convergentes,

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} v_{k-1} + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} v_{k-2} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}(S+1).$$

On en déduit $S = 1$, puis $P(Y = 0) = 0$. La loi de Y est donnée par $P(Y = k) = v_k$ pour $k \geq 2$ et par une probabilité nulle en 0 et en 1.

4e) On justifie d'abord l'existence de l'espérance, puis on propose deux calculs complémentaires.

Méthode 1 — Somme de la récurrence pondérée

La formule de 4d) et $|\alpha|, |\beta| < 1$ donnent

$$0 \leq kv_k \leq |A|k|\alpha|^k + |B|k|\beta|^k.$$

Les deux séries à droite convergent par la formule de la première série géométrique

dérivée. Ainsi, Y admet une espérance finie

$$E = \sum_{k \geq 2} k v_k.$$

Pour la calculer, on multiplie la récurrence par k et on somme à partir de $k = 2$. Les changements d'indices sont licites par convergence absolue. Comme

$$\sum_{k \geq 2} v_k = 1,$$

$$v_0 = 1 \text{ et } v_1 = 0,$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k v_{k-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} (j+1) v_j = E + 1,$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k v_{k-2} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+2) v_j = E + 2(1+1) = E + 4.$$

Il vient

$$E = \frac{1}{2}(E+1) + \frac{1}{4}(E+4) = \frac{3}{4}E + \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $E(Y) = 6$.

Méthode 2 — Redémarrage après une Face

L'intégrabilité a été établie dans la première méthode, donc on peut utiliser la formule de l'espérance totale avec le système complet de $4a$). Sur F_1 , il reste à observer le motif à

partir du deuxième lancer : le nombre de lancers supplémentaires a la même loi que Y et est indépendant du premier résultat. L'espérance conditionnelle de Y vaut donc $1 + E(Y)$.

Sur P_1P_2 , on a $Y = 2$. Sur P_1F_2 , la Face du deuxième lancer empêche tout motif reliant le deuxième au troisième lancer : l'observation recommence au troisième, indépendamment des deux premiers. L'espérance conditionnelle vaut alors $2 + E(Y)$. Ces descriptions valent presque sûrement, les événements d'attente infinie ayant une probabilité nulle d'après 4d).

En notant $E = E(Y)$, les probabilités $1/2, 1/4, 1/4$ donnent

$$E = \frac{1}{2}(1 + E) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4}(2 + E) = \frac{3}{4}E + \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $E = 6$. Cette méthode explique les redémarrages dans la suite de lancers ; la première calcule à partir de la récurrence des probabilités. Finalement, $E(Y) = 6 > 4 = E(X)$.

Exercice 3

1a) On vérifie positivité, continuité et normalisation. La fonction $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \leq 0$, $f(x) = e^x/2$; pour $x \geq 0$, $f(x) = e^{-x}/2$.

Les deux intégrales impropres convergent et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La fonction f est donc une densité de probabilité.

1b) On intègre la densité sur $] - \infty, x]$, en distinguant le signe de x . Si $x \leq 0$,

$$F_Z(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^t dt = \frac{1}{2} e^x.$$

Si $x \geq 0$,

$$F_Z(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Les deux expressions valent $1/2$ en 0 . La fonction de répartition est donc

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1c) On applique la formule de convolution aux variables indépendantes Z_1 et Z_2 . Les densités sont continues, intégrables et bornées ; de plus, le calcul ci-dessous vérifie la convergence de la convolution en chaque point. Une densité de leur somme est

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-|x-t|} dt.$$

Pour $x \geq 0$, on coupe l'intégrale en 0 et x . Sur les trois intervalles, l'intégrande sans le facteur $1/4$ vaut respectivement e^{-x+2t} , e^{-x} et e^{x-2t} . Ainsi,

$$g(x) = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-x+2t} dt + \int_0^x e^{-x} dt + \int_x^{+\infty} e^{x-2t} dt \right).$$

Chacune converge, et leurs valeurs sont $e^{-x}/2$, xe^{-x} et $e^{-x}/2$. Donc

$$g(x) = \frac{1}{4}(1+x)e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Pour tout réel x , le changement de variable affine $t = -s$, effectué d'abord sur des segments puis avec les limites des intégrales convergentes, donne

$$g(-x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|-|x-s|} \mathrm{d}s = g(x).$$

La densité est donc paire, et une expression valable sur $\mathbb{R}$ est

$$g(x) = \frac{1}{4}(1 + |x|)e^{-|x|}.$$

On peut contrôler la normalisation : une intégration par parties sur $[0, A]$ donne

$$\int_0^A x e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - (A + 1)e^{-A} \rightarrow 1. \text{ Par conséquent, } \int_{\mathbb{R}} g = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

2a) On passe par la fonction de répartition de Y . Comme Y suit la loi exponentielle de paramètre 1, elle est positive presque sûrement et n'a pas d'atome. Si $x < 0$,

$$F_{-Y}(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = e^x.$$

Si $x \geq 0$, l'événement $-Y \leq x$ est presque sûr, donc $F_{-Y}(x) = 1$. La fonction est continue en 0; en dérivant sur les deux intervalles ouverts, on obtient une densité

$$h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La valeur de la densité en 0 est sans incidence sur la loi.

2b) On calcule la convolution de la densité de X avec celle de $-Y$. L'indépendance de X et Y entraîne celle de X et $-Y$, puisqu'on applique une fonction à Y seule.

On peut choisir $f_X(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon. Dans la convolution, les deux facteurs sont non nuls lorsque $t \geq 0$ et $x - t < 0$, soit $t > x$. Les éventuelles égalités aux bornes ne changent pas l'intégrale. Une densité de $Z = X + (-Y)$ est donc

$$g_Z(x) = \int_{\max(0,x)}^{+\infty} e^{-t} e^{x-t} dt = e^x \int_{\max(0,x)}^{+\infty} e^{-2t} dt.$$

Cette intégrale converge et vaut

$$g_Z(x) = \frac{1}{2} e^{x-2\max(0,x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On retrouve $g_Z(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$: Z suit la loi exponentielle bilatérale.

2c) Deux méthodes mettent en évidence la différence de variables de même moyenne ou la symétrie de la loi.

Méthode 1 — Linéarité de l'espérance

Les variables exponentielles X et Y sont intégrables, avec $E(X) = E(Y) = 1$. De plus, $|X - Y| \leq X + Y$, donc Z est intégrable. La linéarité donne

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 1 - 1 = 0.$$

Méthode 2 — Symétrie de la densité

La densité de Z est paire. L'existence absolue se vérifie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1,$$

la dernière intégrale ayant été calculée sur segments en 1c). Le changement de variable affine $x = -t$ dans la partie négative montre que les deux contributions à l'espérance sont opposées. Plus précisément,

$$E(Z) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 0.$$

La première méthode utilise la construction de Z ; la seconde s'applique à toute loi symétrique dont on a vérifié l'intégrabilité.

2d) On traduit l'événement $|Z| \leq t$. Si $t < 0$, il est impossible, donc $F_T(t) = 0$. Si $t \geq 0$, l'absence d'atomes donne

$$F_T(t) = P(-t \leq Z \leq t) = F_Z(t) - F_Z(-t).$$

À l'aide de 1b),

$$F_T(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t} = 1 - e^{-t}.$$

Ainsi,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. On conclut que $T \sim \mathcal{E}(1)$.

Problème

Partie I : étude de φ

1a) On vérifie que l'image appartient à l'espace et que l'application est linéaire. Pour un polynôme P de degré $d \geq 1$, $(X - 1)P'$ est de degré au plus d et XP'' de degré au plus $d - 1$ lorsque ce dernier polynôme est non nul. Si P est constant, les deux dérivées sont nulles.

Dans tous les cas, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. La dérivation étant linéaire, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(aP + bQ) = a\varphi(P) + b\varphi(Q).$$

Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1b) On applique directement la définition. Pour $j = 0$, $\varphi(1) = 0$. Pour $j \geq 1$,

$$\varphi(X^j) = (X - 1)jX^{j-1} - Xj(j - 1)X^{j-2} = jX^j - j^2X^{j-1}.$$

Lorsque $j = 1$, la dérivée seconde est nulle; la formule donne bien $X - 1$. La dernière expression est donc valable pour $1 \leq j \leq n$, le cas $j = 0$ ayant été traité séparément.

1c) On place les coordonnées de $\varphi(X^j)$ dans la colonne d'indice j , avec des indices de lignes et colonnes allant de 0 à n . Les coefficients sont

$$M_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j, \\ -j^2 & \text{si } i = j - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La deuxième possibilité concerne $j \geq 1$. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, avec diagonale $0, 1, \dots, n$. Pour $n = 1$, elle se

réduit à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; la formule des coefficients couvre sans ambiguïté toutes les dimensions.

1d) On utilise les valeurs propres d'une matrice triangulaire. Ce sont exactement ses coefficients diagonaux, soit les $n + 1$ réels distincts $0, 1, \dots, n$.

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. En choisissant un vecteur propre non nul pour chacune des $n + 1$ valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre de $n + 1$ vecteurs, donc une base. Ainsi, φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Les espaces propres ont chacun dimension 1 : leur somme directe a dimension $n + 1$, et chacun est de dimension au moins 1. On justifiera en 2a) que tout vecteur propre associé à k a degré k , ce qui permet de le normaliser de manière unique en un polynôme unitaire L_k .

2a) On compare les coefficients dominants. Si L_k est unitaire de degré $p \geq 1$, le calcul de 1b) montre que le coefficient de X^p dans $\varphi(L_k)$ est p , alors qu'il est k dans kL_k . L'égalité $\varphi(L_k) = kL_k$ impose $p = k$.

Si $p = 0$, alors $L_k = 1$ et $\varphi(L_k) = 0$, donc $k = 0 = p$. Dans tous les cas, $\deg L_k = k$.

Ce même argument vaut avant normalisation : pour un vecteur propre de coefficient

dominant $c \neq 0$, la comparaison donne $pc = kc$, donc $p = k$. L'existence d'un vecteur propre et la dimension 1 de chaque espace propre, établies en 1d), prouvent donc l'existence et l'unicité du polynôme unitaire annoncé.

2b) La question 2a) donne $\deg L_0 = 0$. Un polynôme constant unitaire est égal à 1. Ainsi, $L_0 = 1$, et il vérifie bien $\varphi(L_0) = 0$.

2c) On identifie les coefficients dans l'égalité propre. Avec $a_k = 1$, la formule de 1b) donne, pour $0 \leq i \leq k-1$, le coefficient de X^i dans $\varphi(L_k)$:

$$ia_i - (i+1)^2 a_{i+1}.$$

Le coefficient de X^k est ka_k , déjà conforme à kL_k . Le système demandé est donc

$$\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \quad (k-i)a_i = -(i+1)^2 a_{i+1}, \quad a_k = 1.$$

En particulier, ses premières et dernières équations sont $ka_0 = -a_1$ et $a_{k-1} = -k^2$. Chaque facteur $k-i$ est strictement positif : les coefficients se déterminent successivement à partir de a_k .

2d) On itère les relations de 2c). Pour $0 \leq i < k$,

$$a_i = -\frac{(i+1)^2}{k-i} a_{i+1}.$$

En descendant de k à i , on obtient

$$a_i = (-1)^{k-i} \frac{((i+1)(i+2) \cdots k)^2}{(k-i)!} = (-1)^{k-i} \frac{(k!)^2}{(i!)^2 (k-i)!}.$$

Or

$$(k-i)! \binom{k}{i}^2 = \frac{(k!)^2}{(i!)^2 (k-i)!}.$$

Ainsi, pour $0 \leq i \leq k$,

$$a_i = (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i}^2.$$

Pour $i = k$, la formule donne $a_k = 1$. Pour $k = 0$, elle donne également $L_0 = 1$, avec $0! = 1$.

3) On utilise la formule de Leibniz pour calculer la dérivée d'ordre k de $x^k e^{-x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_k^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} (-1)^{k-j} e^{-x}.$$

Posons $i = k - j$. Après multiplication par $(-1)^k e^x$, le coefficient de x^i devient

$$(-1)^{k+i} \binom{k}{i} \frac{k!}{i!} = (-1)^{k-i} \frac{(k!)^2}{(i!)^2 (k-i)!},$$

car les exposants $k+i$ et $k-i$ diffèrent de $2i$. On retrouve exactement les coefficients de L_k calculés en 2d). Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x).$$

Pour $k = 0$, cela se lit $e^x e^{-x} = 1 = L_0(x)$, avec la convention $f^{(0)} = f$.

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

1a) On compare l'intégrande à une exponentielle intégrable. Pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et positive. La croissance comparée donne

$$x^k e^{-x/2} \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Il existe donc $A > 0$ tel que, pour $x \geq A$,

$$0 \leq x^k e^{-x} \leq e^{-x/2}.$$

L'intégrale de $e^{-x/2}$ converge sur $[A, +\infty[$; l'intégrale sur $[0, A]$ est finie par continuité. Ainsi, I_k converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1b) On développe le produit polynomial. Écrivons

$$P(x)Q(x) = \sum_{j=0}^{2n} c_j x^j,$$

en autorisant des coefficients nuls. Pour $x \geq 0$,

$$e^{-x} |P(x)Q(x)| \leq \sum_{j=0}^{2n} |c_j| x^j e^{-x}.$$

L'intégrale de la somme finie de droite converge d'après 1a). Par comparaison, l'intégrale définissant $(P | Q)$ converge absolument, donc converge.

1c) On vérifie les propriétés d'un produit scalaire réel. L'intégrale est définie pour tout couple d'après 1b). La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité de ψ , et

$P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$ donne la symétrie.

Pour tout P ,

$$(P | P) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)^2 dx \geq 0.$$

Si P n'est pas le polynôme nul, il ne peut s'annuler sur tout $]0, +\infty[$, car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Choisissons $a > 0$ tel que $P(a) \neq 0$. La continuité de la fonction positive $e^{-x} P(x)^2$ fournit un segment de longueur strictement positive autour de a , inclus dans $]0, +\infty[$, sur lequel cette fonction est minorée par un réel strictement positif. Son intégrale est alors strictement positive, donc $(P | P) > 0$.

Ainsi, $(P | P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. La forme ψ est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire.

2) On démontre la formule par récurrence sur le nombre d'intégrations par parties.

Pour $k = 1$, c'est la formule usuelle sur le segment $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Supposons la formule vraie à l'ordre k et prenons $f, g \in C^{k+1}([a, b])$. Une première intégration par parties donne

$$\int_a^b f(t)g^{(k+1)}(t) dt = [f(t)g^{(k)}(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g^{(k)}(t) dt.$$

Les fonctions f' et g sont de classe C^k , donc l'hypothèse de récurrence s'applique à la dernière intégrale :

$$\int_a^b f'(t)g^{(k)}(t) dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j+1)}(t)g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k+1)}(t)g(t) dt.$$

Après substitution, le premier terme de bord correspond à l'indice 0. Dans la somme suivante, le changement d'indice $\ell = j + 1$ fournit les indices $1, \dots, k$, avec signe $(-1)^\ell$. Le signe du dernier terme est $(-1)^{k+1}$. On obtient la formule à l'ordre $k + 1$.

La récurrence établit donc, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t) dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t) dt.$$

3) On applique Leibniz à un ordre $i < k$. Pour $k \geq 1$ et $0 \leq i \leq k - 1$,

$$f_k^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} (-1)^{i-j} e^{-x}.$$

Chaque puissance x^{k-j} a un exposant au moins égal à $k - i \geq 1$. Tous les termes s'annulent donc en 0, et $f_k^{(i)}(0) = 0$. Pour $k = 0$, aucun indice i ne satisfait $0 \leq i \leq k - 1$: il n'y a rien à vérifier.

4a) Rectification de l'énoncé : les indices i, k sont précisés dans $\{0, \dots, n\}$, puisque seuls ces polynômes L_i, L_k ont été définis. La convention de somme vide traite le cas $k = 0$.

Pour $k \geq 1$ et $x \geq 0$, on applique 2) sur $[0, x]$ aux fonctions L_i et f_k , qui sont de classe C^∞ . Les termes de bord en 0 contiennent $f_k^{(k-j-1)}(0)$, avec $0 \leq k - j - 1 \leq k - 1$; ils sont tous nuls d'après 3). Il reste

$$\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t) dt.$$

Pour $x < 0$, on applique la formule sur $[x, 0]$, puis on multiplie par -1 en utilisant

$\int_0^x = - \int_x^0$. Les termes en 0 sont encore nuls et on obtient exactement la même identité.

Pour $x = 0$, les deux membres sont nuls.

Enfin, si $k = 0$, la somme de bord est vide, $(-1)^k = 1$ et $L_i^{(0)} = L_i$: les deux membres sont identiques. La formule vaut donc pour tout réel x et tous les indices autorisés.

4b) On justifie le passage à la limite dans l'identité sur segment. Pour $k \geq 1$, toute dérivée $f_k^{(r)}$ est de la forme e^{-x} multiplié par un polynôme, par Leibniz. Ainsi, chaque terme de bord

$$L_i^{(j)}(x) f_k^{(k-j-1)}(x)$$

tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, par croissance comparée. Les deux intégrales de 4a) convergent absolument : leurs intégrandes sont également des polynômes multipliés par e^{-t} , et 1a)-1b) s'appliquent à toute somme finie de monômes.

On peut donc passer à la limite, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} L_i(t) f_k^{(k)}(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt.$$

La question I.3 donne $L_k(t)e^{-t} = (-1)^k f_k^{(k)}(t)$. En multipliant l'égalité précédente par $(-1)^k$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt.$$

Pour $k = 0$, cette égalité est directe, puisque $L_0 = 1$ et $f_0(t) = e^{-t}$.

4c) Deux approches expliquent l'orthogonalité : la première exploite la formule obtenue, la seconde la symétrie de l'endomorphisme.

Méthode 1 — Dérivée d'un polynôme de degré inférieur

Soient $0 \leq i < k \leq n$. Comme $\deg L_i = i < k$, le polynôme $L_i^{(k)}$ est nul. D'après 4b),

$$(L_i | L_k) = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t) dt = 0.$$

Si $i > k$, la symétrie du produit scalaire donne $(L_i | L_k) = (L_k | L_i) = 0$. Les polynômes L_k sont non nuls, car unitaires. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc orthogonale.

Méthode 2 — Symétrie de φ pour le produit scalaire

Pour un polynôme P , une dérivation directe donne

$$(xe^{-x}P'(x))' = e^{-x}((1-x)P'(x) + xP''(x)) = -e^{-x}\varphi(P)(x).$$

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, une intégration par parties sur $[0, A]$ donne donc

$$\int_0^A e^{-x}\varphi(P)(x)Q(x) dx = -[xe^{-x}P'(x)Q(x)]_0^A + \int_0^A xe^{-x}P'(x)Q'(x) dx.$$

Le terme de bord en 0 est nul ; celui en A tend vers 0, puisqu'il est une exponentielle décroissante multipliée par un polynôme. Les intégrales convergent absolument par 1a), ce qui autorise le passage à la limite :

$$(\varphi(P) | Q) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}P'(x)Q'(x) dx.$$

Cette expression est symétrique en P, Q , donc $(\varphi(P) \mid Q) = (P \mid \varphi(Q))$. Pour $i \neq k$, les relations propres fournissent

$$i(L_i \mid L_k) = (\varphi(L_i) \mid L_k) = (L_i \mid \varphi(L_k)) = k(L_i \mid L_k).$$

Ainsi, $(i - k)(L_i \mid L_k) = 0$, puis $(L_i \mid L_k) = 0$, car $i - k \neq 0$. La famille est orthogonale.

La première méthode suit directement le guidage de l'énoncé ; la seconde explique le lien entre orthogonalité et valeurs propres distinctes d'un endomorphisme symétrique.

4d) On calcule d'abord les intégrales par une intégration par parties sur un segment.

Pour $A > 0$ et $k \geq 0$,

$$\int_0^A x^{k+1} e^{-x} dx = [-x^{k+1} e^{-x}]_0^A + (k+1) \int_0^A x^k e^{-x} dx.$$

Les intégrales convergent par 1a). Le terme en 0 est nul et $A^{k+1} e^{-A} \rightarrow 0$. Le passage à la limite donne

$$I_{k+1} = (k+1)I_k.$$

Comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, une récurrence fournit $I_k = k!$ pour tout entier $k \geq 0$.

Pour la norme, la formule 4b) avec $i = k$ donne

$$\|L_k\|^2 = (L_k \mid L_k) = \int_0^{+\infty} L_k^{(k)}(t) t^k e^{-t} dt.$$

Le polynôme L_k est unitaire de degré k , donc $L_k^{(k)} = k!$. Ainsi,

$$\|L_k\|^2 = k! I_k = (k!)^2, \quad \|L_k\| = k!.$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale et ses $n + 1$ vecteurs sont non nuls; elle est donc libre et forme une base de l'espace de dimension $n + 1$. En divisant chaque vecteur par sa norme, on obtient la base orthonormale

$$\left(\frac{L_0}{0!}, \frac{L_1}{1!}, \dots, \frac{L_n}{n!} \right).$$

Partie III : étude des racines de L_n

- 1) On étudie les changements de signe aux racines positives. Le polynôme R est unitaire de degré p (ou vaut 1 si $p = 0$), et L_n est unitaire de degré n . Ainsi, RL_n est unitaire de degré $n + p$ et strictement positif pour x suffisamment grand.

Toute racine strictement positive de multiplicité impaire de L_n apparaît une fois dans R : sa multiplicité dans RL_n devient paire. Les racines strictement positives de multiplicité paire de L_n n'apparaissent pas dans R ; leur multiplicité reste paire. Ce sont toutes les racines strictement positives possibles de RL_n .

Au voisinage d'une racine a de multiplicité paire $2r$, on peut écrire

$RL_n(x) = (x - a)^{2r} S(x)$, avec $S(a) \neq 0$. La continuité de S montre que le signe ne change pas en traversant a . Entre deux racines, le signe est constant par continuité et par le théorème des valeurs intermédiaires.

En partant du signe positif pour x grand et en traversant les finitement nombreuses racines positives, on obtient donc $RL_n(x) > 0$ hors de ces racines et $RL_n(x) = 0$ aux racines, pour $x > 0$. La continuité donne aussi $RL_n(0) \geq 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R(x)L_n(x) \geq 0.$$

Le mot « positif » désigne ici une valeur positive ou nulle. La formule I.2d) donne en

outre $L_n(0) = (-1)^n n! \neq 0$, de sorte qu'aucune racine n'est située en 0.

2a) Sous l'hypothèse $p < n$, on a $\deg R = p \leq n - 1$. Les polynômes $L_0, \dots, L_{n-1}$ sont de degrés respectifs $0, \dots, n - 1$ et sont unitaires. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: une relation linéaire non triviale serait contredite par le coefficient dominant du terme de plus haut degré, puis la liberté et le nombre de vecteurs donnent une base.

Il existe ainsi des réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ tels que

$$R = \sum_{j=0}^{n-1} c_j L_j.$$

La bilinéarité et l'orthogonalité de la partie II donnent

$$(R \mid L_n) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (L_j \mid L_n) = 0.$$

2b) On utilise la positivité de l'intégrande et sa continuité. D'après 2a),

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} R(x) L_n(x) \, dx = 0.$$

L'intégrale converge par II.1b), et son intégrande est continue et positive ou nulle par III.1). Si elle était strictement positive en un point $a > 0$, la continuité fournirait un segment autour de a sur lequel elle est minorée par une constante strictement positive. L'intégrale sur ce segment serait positive ; celle sur tout le demi-axe serait alors positive aussi, contradiction.

Ainsi, $e^{-x} R(x) L_n(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Comme $e^{-x} > 0$, le polynôme RL_n s'annule en tous les points de $]0, +\infty[$. Un polynôme non nul n'ayant qu'un nombre fini de racines, RL_n est le polynôme nul.

3a) Le résultat de 2b) est impossible : R et L_n sont unitaires, donc leur produit est unitaire de degré $p + n$, et n'est pas nul. L'hypothèse $p < n$ est donc fausse.

Par ailleurs, L_n est de degré n et possède p racines distinctes, donc $p \leq n$. Il reste nécessairement $p = n$.

3b) Les n racines comptées par p sont réelles, distinctes et strictement positives.

Chacune a une multiplicité au moins égale à 1. La somme de leurs multiplicités est au plus le degré n , alors qu'il y en a déjà n : chacune est donc simple.

Ainsi, L_n possède exactement n racines réelles distinctes, toutes strictement positives, et elles sont toutes simples.

Relevé des adaptations

Problème, partie II, question 4 : les indices i, k , annoncés dans le PDF comme des entiers naturels quelconques, sont limités à $\{0, \dots, n\}$ afin que les polynômes L_i, L_k employés aient été définis. Cette précision conserve toutes les conclusions nécessaires sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème, partie II, question 4a : la convention de somme vide pour $k = 0$ est explicitée ; dans ce cas, la formule se réduit à une identité et ne nécessite aucune dérivée d'ordre négatif.