



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

On utilise la convention des intégrales orientées : si $x < 0$, alors

$$\int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt.$$

- 1) Pour $f \in E$, le théorème fondamental de l'analyse montre que $\Delta(f)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable, et en particulier continue : $\Delta(f) \in E$.

Pour $f_1, f_2 \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(af_1 + bf_2)(x) = \int_0^x (af_1(t) + bf_2(t)) dt = a\Delta(f_1)(x) + b\Delta(f_2)(x).$$

Ainsi, $\Delta : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est un endomorphisme de E .

- 2) a) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse donne $\Delta(f)' = f$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\Delta(f)$ est même de classe C^1 .
- b) La première approche exploite la régularité imposée à toute image ; la seconde fournit une obstruction plus immédiate grâce à une valeur particulière.

Méthode 1 — Utiliser la régularité.

Toute fonction de l'image de Δ est dérivable. Or la fonction $x \mapsto |x|$ appartient à E et n'est pas dérivable en 0, puisque ses dérivées à droite et à gauche y valent respectivement 1 et -1 . Elle n'appartient donc pas à l'image de Δ . Par conséquent, Δ n'est pas surjective.

Méthode 2 — Utiliser la valeur en 0.

Pour toute fonction $f \in E$, on a $\Delta(f)(0) = 0$. La fonction constante égale à 1, qui appartient à E , ne peut donc pas avoir d'antécédent. Cette obstruction suffit également à prouver la non-surjectivité.

3) Si $f \in \text{Ker } \Delta$, alors $\Delta(f)$ est la fonction nulle. En dérivant cette égalité et en utilisant la question 2.a, on obtient $f = 0$. Ainsi, $\text{Ker } \Delta = \{0\}$, ce qui prouve que Δ est injective.

4) a) La relation $\Delta(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$, entraîne $f = \Delta(f)/\lambda$. La fonction f est donc dérivable et la dérivation de la relation donne $f = \lambda f'$, soit $f' = f/\lambda$.

La fonction $h : x \mapsto f(x)e^{-x/\lambda}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = e^{-x/\lambda} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{\lambda} \right) = 0.$$

Le théorème des accroissements finis montre que h est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ce^{x/\lambda}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \neq 0$, on devrait avoir $C \neq 0$.

La définition du vecteur propre a été explicitée dans le sujet : la fonction propre doit être non nulle et vérifier $\Delta(f) = \lambda f$.

4) b) Pour tout réel x , une primitive de $t \mapsto Ce^{t/\lambda}$ est $t \mapsto C\lambda e^{t/\lambda}$. Ainsi,

$$\Delta(f)(x) = C\lambda (e^{x/\lambda} - 1).$$

Cette formule reste valable pour $x < 0$ grâce à la convention des intégrales orientées.

5) La valeur 0 n'est pas valeur propre de Δ , car son noyau est réduit à $\{0\}$.

Si $\lambda \neq 0$ était une valeur propre, les questions 4.a et 4.b donneraient simultanément $\lambda f(x) = C\lambda e^{x/\lambda}$ et $\Delta(f)(x) = C\lambda(e^{x/\lambda} - 1)$. Leur égalité imposerait $C\lambda = 0$, donc $C = 0$.

Cela contredit le fait que le vecteur propre est non nul. Ainsi, Δ n'a aucune valeur propre réelle.

On peut aussi voir la contradiction directement en 0 : $\Delta(f)(0) = \lambda f(0)$ impose $f(0) = 0$, alors que la question 4.a donne $f(0) = C$.

6) a) On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, la question 2.a montre que F_0 est de classe C^1 et que $F'_0 = f$.

Supposons F_{n-1} de classe C^n , pour un entier $n \geq 1$. Comme $F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(t) dt$, on a $F'_n = F_{n-1}$. La dérivée de F_n étant de classe C^n , F_n est de classe C^{n+1} . La récurrence est établie.

Les mêmes relations montrent que $F_n^{(n+1)} = f$ et que $F_n^{(r)} = F_{n-r}$ pour $0 \leq r \leq n$. Toutes les fonctions F_q s'annulent en 0, donc $F_n^{(r)}(0) = 0$ pour $0 \leq r \leq n$.

6) b) La formule de Taylor donne directement la représentation ; les intégrations par parties en expliquent la construction sans échange d'intégrales.

Méthode 1 — Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

La fonction F_n est de classe C^{n+1} sur le segment joignant 0 à x . La formule de Taylor à l'ordre n donne

$$F_n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{F_n^{(r)}(0)}{r!} x^r + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t) dt.$$

Tous les termes de la somme sont nuls et $F_n^{(n+1)} = f$. On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt.$$

Méthode 2 — Effectuer des intégrations par parties successives.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Si $n = 0$, la formule est la définition de F_0 . Si $n \geq 1$, posons, pour $0 \leq r \leq n$,

$$J_r = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-r}}{(n-r)!} F_n^{(n+1-r)}(t) dt.$$

Pour $r < n$, on intègre par parties en prenant comme primitive de $F_n^{(n+1-r)}$ la fonction $F_n^{(n-r)}$. Le terme au bord $t = x$ est nul parce que $n-r \geq 1$; celui au bord $t = 0$ est nul parce que $F_n^{(n-r)}(0) = 0$. La dérivée du facteur polynomial est $-(x-t)^{n-r-1}/(n-r-1)!$, d'où $J_r = J_{r+1}$.

Ainsi,

$$\int_0^x (x-t)^n f(t)/n! dt = J_0 = J_n = \int_0^x F_n'(t) dt = F_n(x) - F_n(0) = F_n(x).$$

Ces intégrations par parties sont valables aussi lorsque $x < 0$.

Exercice 2

- 1) a) Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la fonction g est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul.

Au voisinage de 0, le développement limité $\sin t = t - t^3/6 + o(t^3)$ donne

$g(t) = -t/6 + o(t)$. Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 = g(0)$. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- 1) b) La méthode par primitive utilise la continuité; la majoration donne en plus une borne explicite en fonction de $|x|$.

Méthode 1 — Utiliser une primitive de g .

La fonction $G : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est continue, puisque g est continue. La relation de Chasles donne $\int_x^{2x} g(t) dt = G(2x) - G(x)$. Les deux termes tendent vers $G(0)$ lorsque $x \rightarrow 0$. La limite demandée vaut donc 0.

Méthode 2 — Majorer directement l'intégrale.

La continuité de g implique qu'elle est bornée sur $[-1, 1]$. Notons M une borne de $|g|$ sur cet intervalle. Si $|x| \leq 1/2$, le segment joignant x à $2x$ est inclus dans $[-1, 1]$ et sa longueur vaut $|x|$. Ainsi, $|\int_x^{2x} g(t) dt| \leq M|x|$, ce qui donne la même limite.

- 1) c) Pour $x \neq 0$, le segment joignant x à $2x$ ne contient pas 0 et $\sin t/t^2 = g(t) + 1/t$ sur ce segment. Par conséquent,

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt + \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_x^{2x} g(t) dt + \ln|2x| - \ln|x| = \ln 2 + \int_x^{2x} g(t) dt.$$

La primitive $\ln|t|$ est utilisable sur chacun des deux intervalles où t garde un signe constant. La formule est donc valable aussi pour $x < 0$. La question 1.b entraîne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 2 = f(0)$: f est continue en 0.

- 2) Pour $x \neq 0$, le changement de variable affine $t = -u$ donne

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{u^2} (-du) = \int_x^{2x} \frac{\sin u}{u^2} du = f(x).$$

En 0, l'égalité est immédiate. Ainsi, f est paire sur $\mathbb{R}$.

- 3) a) La fonction $t \mapsto \sin t/t^2$ est continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sur l'un de ces intervalles, choisissons une primitive H de cette fonction. Pour tout x de cet intervalle, x et $2x$ y appartiennent et $f(x) = H(2x) - H(x)$. Cette expression est dérivable. Ainsi, f est dérivable sur les deux intervalles demandés.

- 3) b) La dérivation de l'expression précédente donne, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2 \frac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{2x^2} = \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^2}.$$

On a utilisé $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

- 3) c) La première méthode réutilise le calcul de f' hors de 0; la seconde traite le point singulier directement à partir de l'intégrale.

Méthode 1 — Utiliser la limite de la dérivée.

Au voisinage de 0, $\sin x = x + o(x)$ et $\cos x - 1 = -x^2/2 + o(x^2)$. Ainsi,

$$f'(x) = -x/2 + o(x) \text{ pour } x \neq 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0.$$

La fonction f est continue en 0 et dérivable de part et d'autre de 0. Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissements finis sur le segment joignant 0 à x fournit un réel c_x strictement compris entre ces deux points tel que $(f(x) - f(0))/x = f'(c_x)$. Comme $c_x \rightarrow 0$, ce quotient tend vers 0. On conclut que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. La formule précédente montre aussi que f' est continue en 0.

Méthode 2 — Étudier directement le taux d'accroissement à partir de g .

La question 1.a donne $g(t) = O(t)$ au voisinage de 0. Il existe donc $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que $|g(t)| \leq C|t|$ pour $|t| \leq \eta$. Si $0 < |x| \leq \eta/2$, le segment joignant x à $2x$ a une longueur $|x|$ et ses points vérifient $|t| \leq 2|x|$. Ainsi,

$$|f(x) - f(0)| = \left| \int_x^{2x} g(t) dt \right| \leq 2Cx^2.$$

Il en résulte $|(f(x) - f(0))/x| \leq 2C|x| \rightarrow 0$, ce qui prouve directement $f'(0) = 0$.

- 3) d) Pour $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif et $\cos x - 1 \leq 0$. Ce dernier facteur ne s'annule qu'aux multiples de 2π .

Pour chaque entier $q \geq 0$, on a $\sin x > 0$ sur $]2q\pi, (2q+1)\pi[$ et $\sin x < 0$ sur $](2q+1)\pi, (2q+2)\pi[$. Sur ces intervalles ouverts, $\cos x - 1 < 0$. Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur le premier et $f'(x) > 0$ sur le second. Aux points $x = k\pi$, avec $k \geq 1$, la dérivée est nulle.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[2q\pi, (2q+1)\pi]$ et strictement croissante sur $[(2q+1)\pi, (2q+2)\pi]$.

- 4) a) Pour $x > 0$, l'inégalité triangulaire et $|\sin t| \leq 1$ donnent

$$|f(x)| \leq \int_x^{2x} \frac{|\sin t|}{t^2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}.$$

- 4) b) L'encadrement $-1/(2x) \leq f(x) \leq 1/(2x)$ et le théorème d'encadrement donnent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Par parité, on a également } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

- 5) a) Sur $[\pi/2, \pi]$, la fonction $t \mapsto \sin t/t^2$ est continue, positive ou nulle, et strictement positive sur $] \pi/2, \pi[$. Son intégrale est donc strictement positive : $f(\pi/2) > 0$.

Sur $[\pi, 2\pi]$, cette fonction est négative ou nulle, et strictement négative à l'intérieur.

Ainsi, $f(\pi) < 0$.

- 5) b) La relation de Chasles donne

$$f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Dans la deuxième intégrale, posons $t = u + \pi$. Comme $\sin(u + \pi) = -\sin u$, elle vaut $-\int_{2\pi}^{3\pi} \sin u / (u + \pi)^2 du$. Ainsi,

$$f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t + \pi)^2} \right) \sin t dt.$$

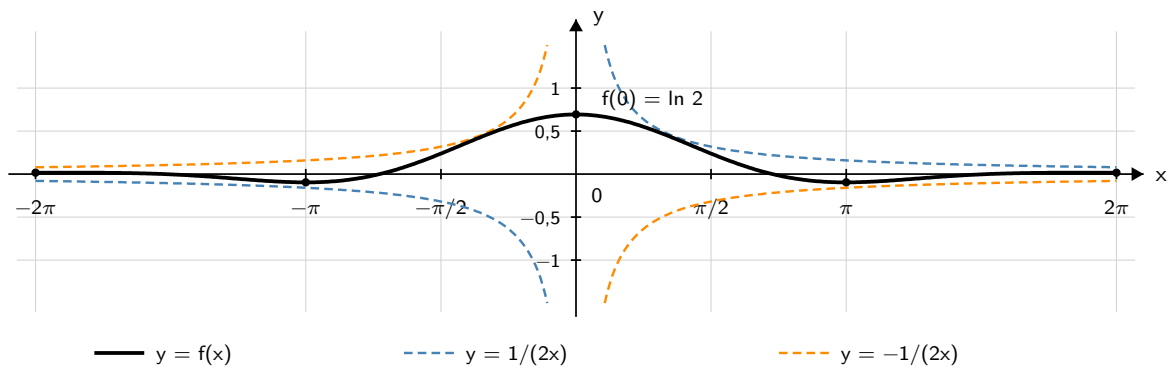
Pour $2\pi < t < 3\pi$, les deux facteurs de l'intégrande sont strictement positifs :

$t + \pi > t > 0$ et $\sin t > 0$. L'intégrande est continu sur le segment et strictement positif à l'intérieur. On en déduit $f(2\pi) > 0$.

- 5) c) La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les variations sur l'intervalle demandé sont les suivantes : elle décroît sur $[-2\pi, -\pi]$, croît sur $[-\pi, 0]$, décroît sur $[0, \pi]$, puis croît sur $[\pi, 2\pi]$. Les tangentes en $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ sont horizontales, puisque la dérivée y est nulle.

Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée $\ln 2$. Les ordonnées en $\pm\pi$ sont négatives et celles en $\pm 2\pi$ positives. Sur $[0, \pi]$, la continuité et la stricte décroissance donnent un unique zéro dans $]\pi/2, \pi[$. Sur $[\pi, 2\pi]$, la continuité et la stricte croissance donnent un unique zéro dans $]\pi, 2\pi[$. La parité fournit les deux zéros négatifs.

Pour $x \neq 0$, la courbe reste entre les deux hyperboles, car $|f(x)| \leq 1/(2|x|)$. Ces hyperboles ont pour asymptotes les deux axes. Le dessin ci-dessous utilise la même échelle sur les deux axes. Les coordonnées de la courbe sont calculées à partir de la formule $f(x) = \int_1^2 \sin(xu)/(xu) du/u$ pour $x \neq 0$, obtenue par le changement affine $t = xu$, et de $f(0) = \ln 2$.



Pour situer les points du tracé, on trouve numériquement $f(\pi/2) \simeq 0,238287$, $f(\pi) \simeq -0,096229$ et $f(2\pi) \simeq 0,016444$. Ces approximations servent au dessin ; les signes et les variations ont été démontrés aux questions précédentes.

Exercice 3

- 1) La composée de deux applications linéaires est linéaire. De plus, f envoie $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g envoie $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, donc appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Sa matrice canonique est BA .
- 2) a) Si $z \in \text{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $z = g(f(x))$. Puisque $f(x) \in \mathbb{R}^2$, on a $z \in \text{Im}(g)$. Cela prouve $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
- 2) b) L'image de g est engendrée par les images des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Elle est donc engendrée par au plus deux vecteurs et $\dim \text{Im}(g) \leq 2$.
- 2) c) L'inclusion de la question 2.a entraîne $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im}(g) \leq 2$.
- 2) d) L'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ a dimension 3, alors que l'image de $g \circ f$ a dimension au plus 2. L'application n'est donc pas surjective.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(g \circ f) = 3 - \dim \text{Im}(g \circ f) \geq 1$. Son noyau contient donc un vecteur non nul, ce qui prouve qu'elle n'est pas injective.

- 3) Il existe $Y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $(g \circ f)(Y) = 0$. En coordonnées canoniques, cela s'écrit $BA Y = 0 = 0Y$. Ainsi, 0 est une valeur propre de BA .

4) a) Posons $J = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $BX = 0$, alors $ABX = 0$, donc $JX = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0$.

Cela imposerait $x = y = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $BX \neq 0$ pour tout $X \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$.

- 4) b) Soit λ une valeur propre de AB . Il existe un vecteur $X \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $ABX = \lambda X$. La question 4.a garantit que $BX \neq 0$. Par associativité du produit matriciel,

$$BA(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda(BX).$$

Le vecteur BX est donc un vecteur propre de BA associé à λ . Ainsi, toute valeur propre de AB est aussi valeur propre de BA .

- 4) c) On vérifie

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs 1 et -1 sont donc valeurs propres de AB , puis de BA par la question 4.b.

Avec la valeur propre 0 obtenue à la question 3, la matrice $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres réelles distinctes. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En choisissant un vecteur propre non nul pour chacune des trois valeurs, on obtient donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice est diagonale, avec les valeurs 0, 1, -1 sur la diagonale. Ainsi, BA est diagonalisable.

Problème

Partie I

Puisque Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et a une espérance finie, la série à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(Z = k)$$

converge. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq kP(Z/A = k) = \frac{kP(\{Z = k\} \cap A)}{P(A)} \leq \frac{kP(Z = k)}{P(A)}.$$

Comme $P(A) > 0$, la comparaison de séries à termes positifs montre que Z/A a une espérance finie et que

$$E(Z/A) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\{Z = k\} \cap A)/P(A).$$

Le même raisonnement s'applique à $\bar{A}$, car $P(\bar{A}) = 1 - P(A) > 0$.

La partition $\{A, \bar{A}\}$ donne $P(Z = k) = P(\{Z = k\} \cap A) + P(\{Z = k\} \cap \bar{A})$. En multipliant par k et en sommant les séries convergentes, on obtient

$$E(Z) = P(A)E(Z/A) + P(\bar{A})E(Z/\bar{A}).$$

Partie II

- 1) L'urne U est initialement dans l'état E_0 , donc $X_0 = 0$ pour toute réalisation. Après le premier tirage, une boule de V est transférée dans U ; celle-ci contient alors exactement une boule. Ainsi, $X_1 = 1$ pour toute réalisation. Les variables sont certaines et $m_0 = 0, m_1 = 1$.
- 2) a) Question adaptée au programme actuel : la justification de l'accès presque sûr à chaque état est ajoutée afin de donner un sens rigoureux aux durées successives, malgré la convention $X_k = 0$ en cas de non-accès.

Fixons $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Depuis une configuration quelconque, on peut vider U en choisissant une fois chacun des numéros des boules qui s'y trouvent ; cela nécessite au plus $2n$ tirages. On peut ensuite choisir les numéros de k boules distinctes pour les placer dans U ; cela nécessite $k \leq 2n$ tirages. L'état E_k est donc atteint au cours d'une suite appropriée d'au plus $4n$ tirages.

Si la configuration de départ n'est pas déjà dans E_k , une telle suite a une longueur ℓ comprise entre 1 et $4n$. Conditionnellement à tous les tirages passés, la probabilité que les ℓ tirages suivants soient précisément cette suite vaut $(2n)^{-\ell} \geq p$, où $p = (2n)^{-4n} > 0$. Il y a donc, depuis toute configuration, une probabilité au moins p d'atteindre E_k pendant les $4n$ tirages suivants.

Découpons les tirages en blocs de $4n$. En conditionnant sur les histoires possibles au début de chaque bloc, la probabilité de ne pas atteindre E_k dans ce bloc, sachant qu'il n'a pas été atteint auparavant, est au plus $1 - p$. Par récurrence, la probabilité de ne pas l'avoir atteint après r blocs est au plus $(1 - p)^r$. Cette quantité tend vers 0. L'événement « ne jamais atteindre E_k » est inclus dans chacun de ces événements, donc a une probabilité nulle. Chaque état est ainsi atteint presque sûrement. Comme les états sont en nombre fini, ils sont tous atteints sur un même événement de probabilité 1.

À chaque tirage, le nombre de boules de U varie de 1 ou de -1 . Pour passer de 0 à $j + 1$, il faut donc d'abord passer par j . Sur l'événement de probabilité 1 précédent, $X_{j+1} > X_j$. La variable $N_j = X_{j+1} - X_j$ représente le nombre de tirages nécessaires pour accéder pour la première fois à E_{j+1} à partir du premier accès à E_j . Elle vaut au moins 1 presque sûrement. En particulier, $N_0 = 1$.

- 2) b) Les variables X_j et X_{j+1} ont une espérance finie par hypothèse. L'inégalité $|N_j| \leq X_j + X_{j+1}$ montre que N_j a une espérance finie. Par linéarité,

$$\mu_j = E(N_j) = m_{j+1} - m_j.$$

En particulier, $\mu_0 = 1$.

- 3) a) Justifions d'abord l'usage de l'indépendance après un premier accès à un état. Notons L_s le numéro choisi au tirage s . Pour toute histoire finie $h = (\ell_1, \dots, \ell_r)$, conditionner sur $L_1 = \ell_1, \dots, L_r = \ell_r$ ne modifie pas la loi des tirages suivants : ceux-ci sont encore indépendants et uniformes sur $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

Si cette histoire est une histoire de premier accès à E_j au temps r , elle détermine la configuration à cet instant. Exactement $2n - j$ numéros désignent des boules de V . La probabilité conditionnelle que le tirage suivant augmente le nombre de boules de U est donc $(2n - j)/(2n)$.

Les histoires de premier accès, de toutes les longueurs finies possibles, forment une famille dénombrable d'événements disjoints dont la réunion a probabilité 1, d'après la question 2.a. En sommant leurs probabilités, on obtient

$$P(A_j) = \frac{2n - j}{2n}, \quad P(\overline{A_j}) = \frac{j}{2n}.$$

Pour $1 \leq j \leq 2n - 1$, ces deux probabilités sont strictement positives.

- 3) b) Question adaptée au programme actuel : on distingue les durées des étapes après le premier déplacement. On établit leur loi par conditionnement sur les histoires finies, sans supposer connue une propriété générale des temps d'arrêt.

Établissons précisément que la loi d'une durée de passage de E_r à E_{r+1} ne dépend que de r . Deux configurations contenant chacune r boules dans U se déduisent l'une de l'autre par une permutation des numéros. Appliquer cette permutation à toute suite future de tirages conserve la loi de cette suite, car les numéros sont indépendants et

uniformes. Les nombres de boules obtenus après chaque tirage sont alors identiques dans les deux expériences. Les durées de premier accès à E_{r+1} ont donc la même loi. Notons cette loi D_r .

Pour toute histoire finie s'arrêtant à un accès à E_r dont le caractère d'accès est déterminé par cette histoire, les tirages suivants sont indépendants du passé, comme à la question 3.a. Conditionnellement à cette histoire, la durée de passage à E_{r+1} a donc la loi D_r .

Pour chaque entier $a \geq 1$, en sommant sur les histoires disjointes de premier accès à E_r , on obtient $P(N_r = a) = D_r(\{a\})$. Ainsi, D_r est la loi de N_r .

Sur A_j , le premier tirage après X_j atteint E_{j+1} . Par définition, $N_j = 1$ sur cet événement.

Sur $\overline{A_j}$, le premier tirage diminue le nombre de boules de U et conduit à E_{j-1} . Le temps R_j est la durée du retour à E_j à partir de ce nouvel état. Ce retour a lieu presque sûrement : l'argument par blocs de la question 2.a s'applique depuis n'importe quelle configuration. Une trajectoire partant de E_{j-1} ne peut atteindre E_{j+1} sans passer d'abord par E_j . Après ce retour, S_j est la durée jusqu'au premier accès à E_{j+1} , qui a lui aussi lieu presque sûrement. Les trois étapes se succèdent, donc $N_j = 1 + R_j + S_j$ presque sûrement sur $\overline{A_j}$.

Conditionnons sur une histoire allant jusqu'au premier déplacement vers E_{j-1} . Le raisonnement précédent donne à la durée R_j la loi D_{j-1} , quelle que soit cette histoire. En sommant sur les histoires compatibles avec $\overline{A_j}$, on obtient

$$P(R_j = a \mid \overline{A_j}) = D_{j-1}(\{a\}) = P(N_{j-1} = a) \text{ pour tout } a \geq 1.$$

De même, les histoires allant jusqu'au premier retour à E_j après ce déplacement forment une partition dénombrable de $\overline{A_j}$, à un événement négligeable près. Chaque histoire fixe le passé et la configuration au retour ; les tirages suivants ont encore leur loi indépendante uniforme. La durée S_j a donc conditionnellement la loi D_j . En sommant, on obtient $P(S_j = a \mid \overline{A_j}) = D_j(\{a\}) = P(N_j = a)$.

On conclut que les lois conditionnelles de R_j et S_j sont respectivement celles de N_{j-1} et N_j . Leurs espérances conditionnelles sont donc μ_{j-1} et μ_j . La linéarité de l'espérance suffit pour additionner ces durées ; aucune indépendance entre R_j et S_j n'est nécessaire à ce calcul.

3) c) La variable N_j est à valeurs dans $\mathbb{N}$ presque sûrement et a une espérance finie. On peut, si nécessaire, la modifier sur l'événement négligeable de nonaccès sans

changer sa loi. La partie I et la question 3.b donnent

$$\mu_j = P(A_j) \cdot 1 + P(\overline{A_j})(1 + \mu_{j-1} + \mu_j).$$

Avec les probabilités calculées en 3.a, cela devient $\mu_j = 1 + \frac{j}{2n}(\mu_{j-1} + \mu_j)$, puis $(2n - j)\mu_j = 2n + j\mu_{j-1}$. Comme $2n - j > 0$, on obtient

$$\mu_j = \frac{2n + j\mu_{j-1}}{2n - j}, \quad 1 \leq j \leq 2n - 1.$$

3) d) Pour $0 \leq j \leq 2n - 1$, posons $Q_j = 2n \int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j dx$. Les exposants sont des entiers non négatifs, donc l'intégrande est un polynôme et l'intégrale existe. On

$$\text{a} \quad Q_0 = 2n \int_0^1 x^{2n-1} dx = 1 = \mu_0.$$

Pour $1 \leq j \leq 2n - 1$, dérivons le polynôme $x^{2n-j}(2-x)^j$:

$$\frac{d}{dx} (x^{2n-j}(2-x)^j) = (2n-j)x^{2n-j-1}(2-x)^j - jx^{2n-j}(2-x)^{j-1}.$$

Son intégrale entre 0 et 1 vaut 1, puisque $2n - j \geq 1$. En multipliant par $2n$, on obtient $(2n - j)Q_j - jQ_{j-1} = 2n$. Ainsi, $Q_j = (2n + jQ_{j-1})/(2n - j)$.

Les suites (Q_j) et (μ_j) ont la même valeur initiale et vérifient la même récurrence. Une récurrence sur j donne donc

$$\mu_j = 2n \int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j dx, \quad 0 \leq j \leq 2n - 1.$$

4) a) Pour $1 \leq k \leq 2n$, la somme se télescope :

$$\sum_{j=0}^{k-1} N_j = \sum_{j=0}^{k-1} (X_{j+1} - X_j) = X_k - X_0 = X_k.$$

Cette identité découle des définitions des variables et de $X_0 = 0$.

- 4) b) Toutes les variables concernées ont une espérance finie et la somme comporte un nombre fini de termes. Par linéarité,

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j = 2n \int_0^1 \sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j dx.$$

L'échange de la somme et de l'intégrale utilise uniquement la linéarité pour une somme finie.

- 4) c) Pour tous réels a, b et tout $k \geq 1$, l'identité

$$(a-b) \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} b^j = a^k - b^k$$

s'obtient en développant le produit : les termes intermédiaires se compensent deux à deux. Prenons $a = x$ et $b = 2 - x$. Si $x \neq 1$, alors $a - b = 2(x - 1) \neq 0$, d'où

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} (2-x)^j = \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}.$$

En multipliant par x^{2n-k} , on obtient l'identité demandée :

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j = x^{2n-k} \frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}.$$

Tous les exposants sont non négatifs. On n'a pas divisé par x ; l'identité reste donc valable en $x = 0$, avec la convention donnée pour les exposants nuls.

4) d) Sur $[0, 1]$, l'intégrande est égal au polynôme

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j.$$

Ce polynôme est continu sur $[0, 1]$ et sa valeur en 1 est k . La singularité apparente du quotient en 1 est donc supprimable : sa limite vaut k .

En 0, il n'y a pas de singularité puisque tous les exposants sont non négatifs. Plus précisément, la valeur du polynôme en 0 est 0 si $k < 2n$, et 2^{2n-1} si $k = 2n$. L'intégrande se prolonge donc continûment aux deux bornes. L'intégrale est convergente et égale à l'intégrale du polynôme sur $[0, 1]$.

5) Pour $1 \leq k \leq 2n$, les questions 4.b à 4.d donnent

$$m_k = n \int_0^1 x^{2n-k} \frac{x^k - (2-x)^k}{x-1} dx.$$

Effectuons le changement de variable affine $t = 1 - x$. Alors $x = 1 - t$, $2 - x = 1 + t$ et $x - 1 = -t$. En tenant compte du renversement des bornes, on obtient

$$m_k = n \int_0^1 (1-t)^{2n-k} \frac{(1+t)^k - (1-t)^k}{t} dt.$$

Le quotient admet en 0 la limite $2k$: cela résulte, par exemple, du développement fini des deux puissances par la formule du binôme. Le facteur $(1-t)^{2n-k}$ a un exposant non négatif. L'intégrande se prolonge donc continûment sur $[0, 1]$, y compris lorsque $k = 2n$.

Pour $k = 0$, on a $m_0 = 0$. Le numérateur $(1+t)^0 - (1-t)^0$ est nul ; l'intégrande est identiquement nul sur $]0, 1[$ et se prolonge par 0 aux bornes. La formule est donc également valable pour $k = 0$, et finalement pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Partie III : étude de deux cas particuliers

- 1) a) Plus généralement, pour tout entier $q \geq 1$ et $0 < t \leq 1$, la somme géométrique finie donne

$$\frac{1 - (1 - t)^q}{t} = \sum_{r=0}^{q-1} (1 - t)^r.$$

Le membre de droite est un polynôme qui prend la valeur q en 0. Le quotient se prolonge donc continûment à cette borne, et l'intégrale est convergente. En intégrant la somme finie,

$$\int_0^1 \frac{1 - (1 - t)^q}{t} dt = \sum_{r=0}^{q-1} \int_0^1 (1 - t)^r dt = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{1}{r+1} = \sum_{k=1}^q \frac{1}{k}.$$

Avec $q = 2n$, on obtient

$$\int_0^1 [1 - (1 - t)^{2n}] / t dt = \sum_{k=1}^{2n} 1/k.$$

- 1) b) Question adaptée au programme actuel : l'indication $s = t^2$ est fournie pour guider le changement de variable non affine.

Le changement de variable ramène au calcul de 1.a ; la seconde méthode évite ce changement en donnant des primitives terme à terme.

Méthode 1 — Effectuer le changement de variable sur des segments ne contenant pas 0.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, posons $s = t^2$ dans l'intégrale entre ε et 1. On a $ds = 2t dt$, donc

$dt/t = ds/(2s)$ et

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1 - (1 - s)^n}{s} ds.$$

L'intégrale du membre de droite converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, d'après le calcul de 1.a appliqué à $q = n$. Cela prouve la convergence de l'intégrale demandée et donne

$$\int_0^1 \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t} dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Méthode 2 — Utiliser une somme finie et des primitives explicites.

La somme géométrique donne, pour $t > 0$,

$$[1 - (1 - t^2)^n]/t = t \sum_{r=0}^{n-1} (1 - t^2)^r.$$

Cette expression est un polynôme dont la valeur en 0 est nulle ; elle prouve directement la convergence. Pour $0 \leq r \leq n - 1$, une primitive de $t(1 - t^2)^r$ est $-(1 - t^2)^{r+1}/(2(r + 1))$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t} dt = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{2(r + 1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1) c) Dans la formule de II.5, prenons $k = n$. On obtient

$$m_n = n \int_0^1 \frac{(1 - t)^n (1 + t)^n - (1 - t)^{2n}}{t} dt = n \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^n - (1 - t)^{2n}}{t} dt.$$

Le numérateur s'écrit $[1 - (1 - t)^{2n}] - [1 - (1 - t^2)^n]$. Les deux intégrales correspondantes sont convergentes par 1.a et 1.b ; on peut donc les soustraire. Il vient

$$m_n = n \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Les termes d'indice pair de la première somme valent

$$\sum_{k=1}^n 1/(2k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 1/k.$$

Après leur soustraction, il reste exactement les termes d'indice impair. Ainsi,

$$m_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

2) a) Si $p = 0$, le numérateur est identiquement nul, donc $I_0 = 0$ après prolongement de l'intégrande par 0 en 0.

Pour $p \geq 1$, la formule du binôme donne

$$(1+t)^p - (1-t)^p = 2 \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq p \\ \ell \text{ impair}}} \binom{p}{\ell} t^\ell.$$

Après division par t pour $t > 0$, on obtient un polynôme, de valeur $2p$ en 0. L'intégrande se prolonge donc continûment sur $[0, 1]$ et I_p est convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Question adaptée au programme actuel : la différence $I_p - I_{p-1}$ est demandée uniquement pour $p \geq 1$, afin que les deux indices soient définis.

Pour $p \geq 1$ et $t > 0$, on calcule

$$\frac{(1+t)^p - (1-t)^p - (1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}}{t} = (1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}.$$

L'égalité se prolonge en 0. Par linéarité des intégrales convergentes,

$$I_p - I_{p-1} = \int_0^1 (1+t)^{p-1} dt + \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt = \frac{2^p - 1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2^p}{p}.$$

2) b) En sommant les différences pour $p = 1, \dots, 2n$, on obtient

$$I_{2n} - I_0 = \sum_{p=1}^{2n} 2^p / p.$$

Comme $I_0 = 0$, il vient

$$I_{2n} = \sum_{p=1}^{2n} 2^p / p.$$

La formule de II.5 pour $k = 2n$ donne $m_{2n} = nI_{2n}$, puisque le facteur $(1-t)^{2n-k}$ vaut alors 1. Par conséquent,

$$m_{2n} = n \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^k}{k}.$$

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 4 : la définition d'un vecteur propre et le caractère réel de la valeur propre sont explicités, sans changer le calcul demandé.

Problème, partie II, présentation des épreuves : l'indépendance des choix successifs est explicitée; elle est nécessaire aux calculs de durées de passage.

Problème, partie II, question 2.a : la justification de l'accès presque sûr à chaque état est ajoutée, avec une indication par blocs de tirages. Elle permet d'utiliser rigoureusement les différences des temps de premier accès comme durées positives.

Problème, partie II, question 3.b : l'écriture originale réutilisant les mêmes variables dans une égalité conditionnelle est remplacée par des durées des étapes successives, puis par l'égalité de leurs lois conditionnelles. La justification par histoires finies et permutation des numéros est demandée explicitement. La récurrence recherchée en 3.c est conservée.

Problème, partie II, question 4.c : la convention des puissances d'exposant zéro est précisée pour couvrir $x = 0$ et $k = 2n$.

Problème, partie III, question 1.b : l'indication du changement de variable non affine $s = t^2$ est ajoutée. Le corrigé présente aussi une méthode fondée uniquement sur une somme finie et des primitives explicites.

Problème, partie III, question 2.a : le domaine $p \geq 1$ est précisé pour la différence $I_p - I_{p-1}$. La convergence de I_0 est traitée séparément.

Exercice 2, question 5.c : le tracé demandé est intégré au corrigé en SVG autonome, construit à partir de la définition de f , avec des échelles identiques sur les deux axes. Le sujet original ne contient pas de figure à reproduire.

Les en-têtes administratifs du document original sont retirés. Aucune question de programmation n'apparaît dans cette épreuve.