



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Soit F la fonction réelle définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ pour $x \in]0, 1[$, avec $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln 2$.

1) Vérifier que F est bien définie sur $[0, 1]$.

2) a. Pour tout $x \in]0, 1[$, vérifier que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$.

2) b. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.

2) c. En déduire que F est continue sur $[0, 1]$.

3) a. Montrer que F est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

3) b. En déduire que F est continue sur $[0, 1]$.

4) On considère $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. Montrer que cette intégrale est convergente puis donner sa valeur.

Exercice 2

Toutes les matrices de cet exercice appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre deux. Une matrice M est dite involutive si et seulement si $M^2 = I$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1) a. Montrer que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I$.

1) b. En déduire que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

1) c. Lorsque $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a, b, c, d .

2) a. Montrer que la matrice αI , où $\alpha \in \mathbb{R}$, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

2) b. Dans cette question, on suppose $M \neq I$ et $M \neq -I$. Montrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) a. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I + B$, où B est une matrice involutive.

3) b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I et B .

3) c. Montrer que A est inversible et vérifier que la formule de 3) b. est encore valable pour $n = -1$.

Exercice 3

Dans cet exercice, $x \in]0, \pi/2[$.

1) Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

1) a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin(x/2^n)$ est géométrique.

1) b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de x, n .

1) c. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

2) On considère l'algorithme suivant, où l'entier saisi n est naturel. Les affectations dans la boucle sont effectuées successivement.

Python

```
import numpy as np

x = float(input("Entrez x, avec 0 < x < pi/2 : "))
n = int(input("Entrez un entier n >= 0 : "))

a = 1.0
b = 1.0 / np.cos(x)

for k in range(1, n + 1):
    a = (a + b) / 2
    b = np.sqrt(a * b)

print(a, b)
```

2) a. Montrer que, lorsque $x \in]0, \pi/2[$, cet algorithme permet de calculer les $n + 1$ premiers termes de deux suites (a_n) , (b_n) dont les premiers termes sont $a_0 = 1$ et $b_0 = 1/\cos x$.

2) b. Vérifier que $b_1 = \frac{\cos(x/2)}{\cos x}$.

2) c. Écrire, pour $n \geq 1$, les relations de récurrence liant $a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}$.

2) d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3) a. Établir que, pour tout $n \geq 1$:

$$b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1}).$$

3) b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

3) c. En déduire les variations des suites $(a_n), (b_n)$.

3) d. En utilisant 3) a., montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)$.

3) e. Montrer finalement que les suites $(a_n), (b_n)$ convergent et ont une même limite ℓ .

4) a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{u_n \cos(x/2^n)}{\cos^2 x}, \quad b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}.$$

4) b. En déduire la valeur de ℓ .

Problème

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe d'origine O . À chaque instant, il est en O d'abscisse 0, en A d'abscisse 1, en B d'abscisse 2 ou en C d'abscisse 3.

Les règles du déplacement sont les suivantes :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Le point O est réfléchissant : si le mobile est en O à l'instant n , il sera certainement en A à l'instant $n + 1$.

- Depuis A , il se rend en O ou en B de façon équiprobable.
- Depuis B , il se rend en A ou en C de façon équiprobable.
- Le point C est absorbant : une fois en C , le mobile y reste.

Les probabilités de déplacement indiquées restent les mêmes conditionnellement à tout historique conduisant à la position actuelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n désigne l'abscisse du mobile à l'instant n . On appelle M la matrice réelle carrée d'ordre 4 dont l'élément de la ligne $i + 1$ et de la colonne $j + 1$ est la probabilité de transition de la position j vers la position i , donnée par les règles ci-dessus, pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Lorsque $P(X_n = j) > 0$, cet élément est $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$. On pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Partie I

- 1) a. Déterminer la matrice M .
- 1) b. Montrer que $U_{n+1} = MU_n$.
- 2) a. Vérifier que $0, 1, \sqrt{3}/2$ et $-\sqrt{3}/2$ sont valeurs propres de M .
- 2) b. En déduire l'existence d'une matrice inversible P , que l'on choisira de telle manière que chacune de ses colonnes contienne un nombre maximum de

coefficients égaux à 1, et vérifiant $M = PDP^{-1}$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

2) c. Vérifier que :

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) d. Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter la première colonne de M^n , en distinguant $n = 0$ et $n \geq 1$.

2) e. Préciser U_0 et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n .

Partie II

1) On désigne par Y le nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre C pour la première fois. Si le mobile n'atteint jamais C , on pose $Y = 0$.

1) a. Montrer que, pour tout entier $j \geq 3$:

$$\{Y = j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\} \right] \cap \{X_j = 3\}.$$

- 1) b. Montrer que $\{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j = 3\} = \{X_{j-1} = 2\} \cap \{X_j = 3\}$.

- 1) c. En déduire, en comparant $\{X_{j-1} = 2\}$ et $\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}$, que $\{Y = j\} = \{X_{j-1} = 2\} \cap \{X_j = 3\}$, puis donner la loi de Y .

- 1) d. Montrer que Y a une espérance et en déduire le nombre moyen de déplacements nécessaires pour atteindre C pour la première fois.

- 2) On désigne par Z le nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B pour la première fois. Si le mobile n'atteint jamais B , on pose $Z = 0$.

- 2) a. Pourquoi ne peut-on pas écrire, de manière analogue à la question précédente, $\{Z = j\} = \{X_{j-1} = 1\} \cap \{X_j = 2\}$?

- 2) b. Exprimer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{Z = 2j\}$ à l'aide d'événements liés à $X_0, X_1, \dots, X_{2j}$. En déduire $P(Z = 2j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

- 2) c. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z = 2j + 1)$.

- 2) d. En déduire que Z a une espérance, puis déterminer le nombre moyen de déplacements nécessaires pour atteindre B pour la première fois.