



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Preliminaire

Soit une suite réelle (u_n) de limite $a > 0$. On applique la définition de la convergence avec $\varepsilon = a/2 > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq a/2$.

L'inégalité $u_n - a \geq -|u_n - a|$ donne alors $u_n \geq a - a/2 = a/2$. C'est le résultat demandé.

1) Variations de f .

La fonction $f(x) = x - x^2$ est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1 - 2x$. Sa dérivée est positive pour $x < 1/2$, nulle pour $x = 1/2$ et négative pour $x > 1/2$.

Conclusion

f est strictement croissante sur $] -\infty, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, +\infty[$. Elle atteint son maximum global $f(1/2) = 1/4$, et ses limites aux deux infinis valent $-\infty$.

On retiendra pour la suite que $f(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$ et que $f(]0, 1[) \subset]0, 1/4]$.

2) a) Encadrement de u_n et limite.

Méthode 1 — Récurrence et variations de f .

À l'indice zéro, $0 < u_0 < 1 = 1/(0 + 1)$. À l'indice un, la question 1) donne $0 < u_1 \leq 1/4 < 1/2$.

Supposons maintenant, pour un entier $n \geq 1$, que $0 < u_n < 1/(n + 1)$. Les deux nombres u_n et $1/(n + 1)$ appartiennent à $[0, 1/2]$, intervalle où f est strictement croissante. Donc :

$$0 < u_{n+1} = f(u_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Or $n(n+2) = (n+1)^2 - 1 < (n+1)^2$, et les dénominateurs sont positifs. Ainsi $n/(n+1)^2 < 1/(n+2)$. La propriété est héréditaire à partir de l'indice un, et les deux premiers indices ont déjà été traités.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1/(n+1)$. Le majorant tendant vers zéro, le théorème d'encadrement donne $u_n \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Accroissements de la suite inverse.

L'intervalle $]0, 1[$ est stable par f , puisque $f(]0, 1[) \subset]0, 1/4[$. Une récurrence assure donc $0 < u_n < 1$ pour tout n , ce qui justifie les inverses suivants :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n} > 1.$$

Pour $n \geq 1$, en sommant ces accroissements de l'indice zéro à $n-1$, on obtient :

$$\frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_0} + n > n+1,$$

car $u_0 < 1$. En inversant des quantités strictement positives, $0 < u_n < 1/(n+1)$. Le cas $n=0$ est l'hypothèse initiale ; la limite zéro en découle à nouveau par encadrement.

La première méthode utilise directement les variations demandées en 1) ; la seconde transforme la récurrence en un accroissement simple, utile aussi pour étudier l'équivalent final.

b) Monotonie et convergence de v_n .

Pour tout $n \geq 0$, la récurrence de u_n donne :

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)u_n(1-u_n) - nu_n = u_n(1 - (n+1)u_n).$$

Les deux facteurs sont strictement positifs d'après a). La suite (v_n) est donc strictement croissante. D'autre part, $v_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$:

$$0 < v_n = nu_n < \frac{n}{n+1} < 1.$$

Elle est croissante et majorée par un ; le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel $L \leq 1$. Comme $v_n \geq v_1 = u_1 > 0$ pour $n \geq 1$, le passage à la limite donne $L \geq u_1 > 0$.

Conclusion

(v_n) converge et $L \in]0, 1]$.

c) Limite de w_n .

Question adaptée au programme actuel : rectification d'une erreur de notation. Le PDF demande ici la convergence de (v_n) vers $L(1 - L)$, alors que (v_n) a déjà pour limite L en b). La suite à étudier est (w_n) , définie dans cette même question.

On multiplie l'accroissement calculé en b) par n . Pour $n \geq 1$:

$$w_n = nu_n(1 - (n+1)u_n) = v_n \left(1 - \frac{n+1}{n}v_n\right).$$

La suite v_n tend vers L et $(n+1)/n$ tend vers un. Les opérations sur les limites finies donnent donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L(1 - L).$$

Le terme initial $w_0 = 0$ n'intervient pas dans cette limite.

3) Conséquence de l'hypothèse $L \neq 1$.

D'après 2)b), $L \in]0, 1]$. Sous l'hypothèse $L \neq 1$, on a donc $0 < L < 1$, puis $L(1 - L) > 0$.

La suite (w_n) converge vers cette limite strictement positive d'après 2)c). Le préliminaire fournit un entier n_0 , que l'on peut choisir au moins égal à un, tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad w_n \geq \frac{L(1 - L)}{2}.$$

Comme $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ et $n > 0$ pour ces indices, on obtient :

$$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1 - L)}{2n}.$$

Pour $N \geq n_0$, on somme cette inégalité :

$$v_{N+1} - v_{n_0} \geq \frac{L(1 - L)}{2} \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{n}.$$

La série harmonique diverge et le coefficient $L(1 - L)/2$ est strictement positif. Le membre de droite tend vers $+\infty$. Sous l'hypothèse considérée, on aurait donc $v_n \rightarrow +\infty$.

Cette conclusion contredit la convergence vers le réel L établie en 2)b). L'hypothèse $L \neq 1$ est impossible : nécessairement $L = 1$.

4) Équivalent de u_n .

Méthode 1 — Utilisation de la suite v_n .

La question 2)b) assure une limite $L \in]0, 1]$, et la question 3) montre que $L \neq 1$ conduit à une contradiction. Ainsi $v_n = nu_n \rightarrow 1$.

Pour $n \geq 1$, $\frac{u_n}{1/n} = nu_n = v_n \rightarrow 1$. Conclusion : $u_n \sim 1/n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Encadrement des accroissements inverses.

Cette preuve retrouve l'équivalent sans utiliser la suite (w_n) . La question 2)a) assure $u_n \rightarrow 0$ et $0 < u_n < 1$. En posant $b_n = 1/u_n$, on a :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{1 - u_n} \rightarrow 1.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. À partir d'un indice N , tous les accroissements vérifient $1 - \varepsilon \leq b_{j+1} - b_j \leq 1 + \varepsilon$. Pour $n > N$, la somme de ces inégalités donne :

$$b_N + (n - N)(1 - \varepsilon) \leq b_n \leq b_N + (n - N)(1 + \varepsilon).$$

Après division par n , les deux bornes tendent respectivement vers $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. En choisissant ε arbitrairement petit, on obtient $b_n/n \rightarrow 1$. Par inversion d'une limite non nulle :

$$nu_n = \frac{1}{b_n/n} \rightarrow 1.$$

On retrouve $u_n \sim 1/n$. La première méthode suit la progression imposée par l'exercice ; la seconde met en évidence le rôle des accroissements de $1/u_n$.

Exercice 2

Partie I

L'endomorphisme identité est noté id ; cette notation remplace la lettre i du PDF afin de distinguer clairement les applications des indices.

1) Bijectivité et inverse de s .

L'hypothèse $s \circ s = \text{id}$ donne un inverse à droite et à gauche de s , égal à s lui-même. On peut aussi vérifier les deux propriétés directement.

Si $s(x) = s(y)$, l'application de s donne $x = y$: s est injectif. Pour tout $y \in E$, le vecteur $x = s(y)$ vérifie $s(x) = y$: s est surjectif.

Conclusion

s est bijectif et $s^{-1} = s$.

2) Valeurs propres possibles.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de s et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $s(x) = \lambda x$, et :

$$x = s^2(x) = \lambda^2 x.$$

Comme $x \neq 0$, $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. À ce stade, il s'agit seulement des valeurs possibles : si $s = \text{id}$, seule la valeur un apparaît ; si $s = -\text{id}$, seule la valeur moins un apparaît.

3) a) Identité d'endomorphismes.

En développant la composition et en utilisant $s^2 = \text{id}$:

$$(s - \text{id}) \circ (s + \text{id}) = s^2 + s - s - \text{id} = \theta.$$

Les deux facteurs commutent ; la composition dans l'autre ordre vaut également θ .

b) Existence des deux valeurs propres.

On suppose désormais $s \neq \text{id}$ et $s \neq -\text{id}$. Comme $s + \text{id}$ n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $x \in E$ tel que $y = (s + \text{id})(x) \neq 0$. La question a) donne :

$$(s - \text{id})(y) = 0, \quad s(y) = y.$$

Le vecteur non nul y est donc un vecteur propre de valeur propre un.

De même, $s - \text{id}$ n'est pas nul ; il existe z tel que $w = (s - \text{id})(z) \neq 0$. La composition nulle dans l'autre ordre donne :

$$(s + \text{id})(w) = 0, \quad s(w) = -w.$$

La valeur moins un est donc également propre. D'après 2), aucune autre valeur propre n'est possible. Conclusion : le spectre de s est exactement $\{-1, 1\}$.

4) Décomposition en deux sous-espaces propres.

On suit d'abord l'indication imposée. Si $x = u + v$, avec $s(u) = u$ et $s(v) = -v$, la linéarité donne nécessairement :

$$s(x) = u - v.$$

Les deux égalités $x = u + v$ et $s(x) = u - v$ imposent alors :

$$u = \frac{x + s(x)}{2}, \quad v = \frac{x - s(x)}{2}.$$

Réciproquement, pour un vecteur arbitraire $x \in E$, définissons u et v par ces formules.

On a $u + v = x$, et l'involutivité donne :

$$s(u) = \frac{s(x) + s^2(x)}{2} = \frac{s(x) + x}{2} = u,$$

$$s(v) = \frac{s(x) - s^2(x)}{2} = \frac{s(x) - x}{2} = -v.$$

Chaque vecteur appartient donc à la somme des deux noyaux. Enfin, si z est dans leur intersection, alors $s(z) = z$ et $s(z) = -z$, d'où $2z = 0$, puis $z = 0$.

La somme est directe et égale à E :

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}).$$

Dans cette décomposition, s conserve la composante du premier sous-espace et change le signe de celle du second. C'est exactement la symétrie annoncée. Aucune orthogonalité entre ces sous-espaces n'est requise.

Partie II : étude d'un exemple

1) Sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

La matrice nulle appartient à S et à A . La transposition est linéaire : pour toutes matrices M, N et tous réels α, β , ${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha {}^tM + \beta {}^tN$.

Si $M, N \in S$, on a ${}^tM = M$ et ${}^tN = N$, donc ${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N$. Ainsi S est stable par combinaison linéaire.

Si $M, N \in A$, on a ${}^tM = -M$ et ${}^tN = -N$, donc ${}^t(\alpha M + \beta N) = -(\alpha M + \beta N)$. Ainsi A est également stable par combinaison linéaire.

Conclusion

S et A sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Décomposition de toute matrice.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons $M_S = (M + {}^tM)/2$ et $M_A = (M - {}^tM)/2$. La propriété ${}^t({}^tM) = M$ donne :

$${}^t(M_S) = \frac{{}^tM + M}{2} = M_S, \quad {}^t(M_A) = \frac{{}^tM - M}{2} = -M_A.$$

Ainsi $M_S \in S$, $M_A \in A$ et $M = M_S + M_A$. On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S + A$.

Si $N \in S \cap A$, alors ${}^tN = N = -N$, ce qui donne $2N = 0$, puis $N = 0$. La somme est directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus A.$$

La décomposition est unique et ses composantes sont celles données ci-dessus.

3) La transposition comme symétrie.

La transposition définit un endomorphisme T puisque c'est une application linéaire de l'espace des matrices carrées dans lui-même. Si $M = M_S + M_A$ est la décomposition de 2), alors :

$$T(M) = {}^tM = M_S - M_A.$$

L'endomorphisme conserve donc la composante dans S et change le signe de celle dans A : T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A .

On peut aussi relier précisément ce résultat à la partie I : $T^2 = \text{id}$, $\text{Ker}(T - \text{id}) = S$ et $\text{Ker}(T + \text{id}) = A$. Pour $n \geq 2$, ces deux espaces contiennent des matrices non nulles,

respectivement I_n et une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont $m_{1,2} = 1$, $m_{2,1} = -1$; T n'est donc ni l'identité ni son opposé.

Exercice 3

Partie I

1) Échange d'une somme finie et d'une série.

Pour chaque $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, notons

$$A_j = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j},$$

somme qui existe par hypothèse. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, les sommes sont toutes finies, donc on peut changer leur ordre :

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^N a_{k,j}.$$

Lorsque $N \rightarrow +\infty$, chacune des $n+1$ sommes intérieures du membre de droite converge vers A_j . Une somme finie de suites convergentes converge vers la somme de leurs limites. Il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n A_j.$$

On a ainsi prouvé à la fois la convergence de la série de gauche et l'égalité demandée :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}.$$

Il ne s'agit pas d'un échange de deux séries infinies : le nombre de valeurs de j est fini, et la convergence absolue n'est pas nécessaire ici.

2) Formule de l'espérance totale.

Question adaptée au programme actuel : les conditionnements sont définis uniquement pour les entiers k tels que $P(X = k) > 0$. Les autres indices apportent une probabilité jointe nulle et ne doivent pas donner lieu à une division par zéro.

La variable S est bornée, $0 \leq S \leq n$, donc son espérance existe et vaut

$$E(S) = \sum_{j=0}^n jP(S = j).$$

Pour chaque j , les événements $(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet, d'où :

$$P(S = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S = j, X = k).$$

Pour $k \notin K_+$, la probabilité jointe est nulle puisqu'elle est au plus $P(X = k) = 0$. Pour $k \in K_+$:

$$P(S = j, X = k) = P(S = j \mid X = k)P(X = k).$$

Posons $b_{k,j} = jP(S = j, X = k)$. Pour chaque j , la série correspondante converge, car ses termes sont positifs et sa somme vaut $jP(S = j) \leq n$. La question 1) s'applique donc à cette famille :

$$E(S) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n b_{k,j}.$$

En retirant seulement les termes nuls d'indices $k \notin K_+$, et en factorisant $P(X = k)$ dans chaque somme finie :

$$E(S) = \sum_{k \in K_+} \left(\sum_{j=0}^n j P(S = j \mid X = k) \right) P(X = k) = \sum_{k \in K_+} E(S \mid X = k) P(X = k).$$

La convergence peut aussi être vérifiée directement : $0 \leq E(S \mid X = k) \leq n$ et

$$\sum_{k \in K_+} P(X = k) = 1.$$

La série de droite est donc à termes positifs et de somme au plus n .

Partie II

Pour k passagers, S_k compte les étages distincts choisis. Les variables S_k et S ont leurs valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$; leurs espérances existent donc toutes.

1) Récurrence sur la loi de S_k .

On ajoute le passager numéro $k + 1$ après les k premiers choix. Pour obtenir exactement j étages occupés, avec $1 \leq j \leq n$, deux cas disjoints sont possibles.

Si les k premiers passagers ont choisi exactement j étages, le nouvel arrivant doit choisir l'un de ces j étages. Son choix est uniforme et indépendant des choix précédents, donc la probabilité correspondante est j/n .

Si les k premiers passagers ont choisi exactement $j - 1$ étages, le nouvel arrivant doit choisir un étage encore inoccupé. Il en reste $n - (j - 1) = n - j + 1$, donc la probabilité correspondante est $(n - j + 1)/n$.

Ces facteurs restent les mêmes quel que soit l'ensemble précis des étages déjà choisis. On peut donc sommer sur tous les historiques des k premiers choix ; on obtient :

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n - j + 1}{n} P(S_k = j - 1).$$

Cette écriture est valable même si l'un des événements portant sur S_k a probabilité nulle, puisque son terme joint est alors nul. En particulier, pour $k = 0$, $S_0 = 0$ et la formule donne $P(S_1 = 1) = 1$, les autres probabilités étant nulles.

2) Récurrence sur l'espérance.

Méthode 1 — Somme pondérée de la loi.

On multiplie l'identité de 1) par j et on somme pour j de un à n :

$$E(S_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 P(S_k = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j(n-j+1) P(S_k = j-1).$$

Dans la seconde somme, on pose $r = j - 1$. Elle devient

$$\frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)(n-r) P(S_k = r).$$

On peut ajouter le terme d'indice $r = n$, qui vaut zéro. On peut aussi ajouter le terme d'indice zéro à la première somme, qui vaut zéro.

En regroupant les deux sommes sous un même indice :

$$E(S_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n (j^2 + (j+1)(n-j)) P(S_k = j).$$

Or $j^2 + (j+1)(n-j) = n + (n-1)j$. Puisque

$$\sum_{j=0}^n P(S_k = j) = 1,$$

on obtient :

$$E(S_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(S_k).$$

Méthode 2 — Nombre moyen de nouveaux étages.

Conditionnellement à un historique comportant j étages distincts, S_{k+1} vaut $j + 1$ si le nouveau passager choisit l'un des $n - j$ étages inoccupés, et j sinon. L'accroissement a donc pour espérance $(n - j)/n$.

Pour chaque valeur j de probabilité positive, cela donne :

$$E(S_{k+1} \mid S_k = j) = j + \frac{n - j}{n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) j.$$

La formule de l'espérance totale, sur les valeurs possibles de S_k , fournit la même récurrence. La première méthode utilise la loi établie en 1) ; la seconde calcule directement l'espérance de l'étage supplémentaire éventuellement desservi.

3) Expression de $E(S_k)$.

Méthode 1 — Résolution de la récurrence.

Sans passager, aucun étage n'est desservi : $S_0 = 0$, donc $E(S_0) = 0$. Notons $e_k = E(S_k)$ et $q = 1 - 1/n$.

Pour $n \geq 2$, on a $0 < q < 1$ et la relation de 2) donne $e_{k+1} = 1 + qe_k$. Comme $n = 1 + qn$, la suite $e_k - n$ vérifie :

$$e_{k+1} - n = q(e_k - n).$$

Elle est géométrique de premier terme $e_0 - n = -n$. Ainsi :

$$\forall k \geq 0, \quad E(S_k) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k \right).$$

Pour $n = 1$, la récurrence devient $e_{k+1} = 1$. On a donc $E(S_0) = 0$ et $E(S_k) = 1$ pour $k \geq 1$. La formule précédente reste valable pour $k \geq 1$; le cas $k = 0$ est donné séparément afin d'éviter toute ambiguïté sur une puissance de zéro.

Méthode 2 — Indicatrices des étages desservis.

Fixons $k \geq 1$. Pour chaque étage $j \in \{1, \dots, n\}$, notons $I_{j,k}$ l'indicatrice de l'événement « au moins un des k passagers choisit l'étage j ». Alors

$$S_k = \sum_{j=1}^n I_{j,k}.$$

Chaque passager évite cet étage avec probabilité $1 - 1/n$. L'indépendance des choix implique que les k passagers l'évitent tous avec probabilité $(1 - 1/n)^k$. Par complémentarité :

$$E(I_{j,k}) = P(I_{j,k} = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k.$$

La linéarité de l'espérance d'une somme finie donne la même formule pour $E(S_k)$. Les indicatrices des différents étages n'ont pas besoin d'être indépendantes pour cette opération. Si $k = 0$, toutes valent zéro et l'espérance est zéro.

La récurrence exploite la progression du nombre de passagers ; les indicatrices traitent directement le nombre d'étages occupés et constituent une méthode générale pour compter des objets distincts.

4) Espérance pour un nombre de passagers poissonien.

Méthode 1 — Espérance totale et série exponentielle.

Conditionnellement à $(X = k)$, le nombre d'arrêts a la loi de S_k , puisque les destinations sont uniformes et indépendantes sous ce conditionnement. Comme X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! > 0$ pour tout $k \geq 0$.

Pour $n \geq 2$, posons encore $q = 1 - 1/n \in]0, 1[$. La partie I, question 2), et la formule précédente donnent :

$$E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} n(1 - q^k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Les deux séries que l'on sépare sont convergentes : la première est la somme des probabilités de X , et la seconde est une série exponentielle. Leur linéarité donne :

$$E(S) = n \left(1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} \right) = n (1 - e^{-\lambda} e^{\lambda q}) = n (1 - e^{-\lambda/n}).$$

Pour $n = 1$, il y a un arrêt exactement lorsque $X \geq 1$. Ainsi $E(S) = P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$, ce qui est encore la formule annoncée.

Méthode 2 — Probabilité qu'un étage ne soit pas choisi.

Pour chaque étage j , notons I_j l'indicatrice de l'événement « l'ascenseur s'arrête à l'étage

j ». On a

$$S = \sum_{j=1}^n I_j.$$

Pour $n \geq 2$, conditionnellement à $(X = k)$, cet étage est évité avec probabilité q^k ; la formule des probabilités totales donne :

$$P(I_j = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda q} = e^{-\lambda/n}.$$

Pour $n = 1$, le seul étage est évité exactement lorsque $X = 0$, événement de probabilité $e^{-\lambda}$; la même expression est donc valable.

Ainsi $E(I_j) = 1 - e^{-\lambda/n}$ pour chaque j . En sommant ces n espérances finies, on retrouve $E(S) = n(1 - e^{-\lambda/n})$. Cette méthode calcule une probabilité d'occupation avant de compter les étages ; la première moyenne directement le nombre d'arrêts sur les différents effectifs de passagers.

Problème

Les notations (u_p) et (v_n) désignent désormais les suites du problème, indépendantes de celles de l'exercice 1. Pour $p \geq 1$, l'intégrande $t \mapsto 1/t$ est continue sur $[p, p+1]$: toutes les intégrales définissant u_p sont donc des intégrales sur des segments sans singularité.

Partie I

1) a) Premier encadrement de u_p .

Pour tout $t \in [p, p+1]$, la décroissance de $t \mapsto 1/t$ sur $]0, +\infty[$ donne :

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}.$$

On intègre sur un segment de longueur un :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}.$$

En soustrayant cette intégrale de $1/p$, on obtient l'encadrement demandé :

$$\forall p \geq 1, \quad 0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

b) Convergence de v_n et existence du reste.

La question a) donne $u_p \geq 0$. Ainsi $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} \geq 0$: la suite (v_n) est croissante. En sommant la majoration de a) de un à n , on obtient une somme télescopique :

$$0 \leq v_n = \sum_{p=1}^n u_p \leq \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

La suite est croissante et majorée ; elle converge donc vers un réel $\gamma \in [0, 1]$. Cela prouve également la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{p \geq 1} u_p,$$

de somme γ .

Le reste est donc bien défini, et :

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \gamma - v_n \geq 0, \quad r_n \longrightarrow 0.$$

2) a) Représentation intégrale sur $[0, 1]$.

On effectue le changement de variable affine $t = p + x$ sur le segment $[p, p + 1]$. Il donne

$\int_p^{p+1} dt/t = \int_0^1 dx/(p + x)$. Comme $\int_0^1 dx = 1$, on peut écrire :

$$u_p = \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{p(p+x)} dx = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{p+x} dx.$$

Les dénominateurs sont au moins $p \geq 1$; l'intégrande est continue sur le segment. L'identité est donc justifiée pour tout $p \geq 1$.

b) Encadrement plus précis.

Pour $p \geq 2$ et $x \in [0, 1]$, on a $p - 1 \leq p + x \leq p + 1$, avec des quantités strictement positives. Comme $x \geq 0$:

$$\frac{x}{p+1} \leq \frac{x}{p+x} \leq \frac{x}{p-1}.$$

En intégrant, puis en multipliant par $1/p > 0$ et en utilisant $\int_0^1 x dx = 1/2$, on obtient :

$$\frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Les identités $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$ et $1/[p(p-1)] = 1/(p-1) - 1/p$ donnent exactement :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

c) Encadrement du reste.

Fixons $n \geq 1$ et $N \geq n + 1$. Tous les indices p entre $n + 1$ et N sont au moins égaux à deux, donc b) s'applique. Après sommation et télescopage :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) \leq \sum_{p=n+1}^N u_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right).$$

Le reste r_n existe d'après 1)b). En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

3) Nombre de termes pour une approximation à 10^{-5} près.

La suite v_n approche γ par défaut et $|\gamma - v_n| = r_n \leq 1/(2n)$. Il suffit donc de choisir n tel que $1/(2n) \leq 10^{-5}$, c'est-à-dire $n \geq 50\,000$.

Conclusion

$n = 50\,000$ convient et garantit $|\gamma - v_{50\,000}| \leq 10^{-5}$. Les parties suivantes construisent une approximation plus rapide.

Partie II

1) Identité télescopique pour f_k .

Fixons $k \geq 1$ et $t > 0$. Tous les facteurs des dénominateurs sont strictement positifs. En mettant les deux expressions au dénominateur commun $t(t+1) \cdots (t+k)$:

$$f_{k-1}(t) = (t+k)f_k(t), \quad f_{k-1}(t+1) = tf_k(t).$$

Cela reste valable pour $k = 1$, avec $f_0(t) = 1/t$. La différence vaut donc :

$$f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = ((t+k) - t)f_k(t) = kf_k(t).$$

2) Somme de la série.

Pour $N \geq n + 1$, la question 1) donne, après sommation finie :

$$\sum_{p=n+1}^N f_k(p) = \frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^N (f_{k-1}(p) - f_{k-1}(p+1)) = \frac{1}{k} (f_{k-1}(n+1) - f_{k-1}(N+1)).$$

La fonction $f_{k-1}(N+1)$ est l'inverse d'un produit de k facteurs, tous au moins égaux à $N+1$. Ainsi :

$$0 < f_{k-1}(N+1) \leq \frac{1}{(N+1)^k} \rightarrow 0.$$

Les sommes partielles admettent donc une limite finie. La série converge et :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} f_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{n!}{k(n+k)!}.$$

On retiendra également la version commençant à un entier $m \geq 1$, obtenue par exactement le même télescopage à partir de $p = m$:

$$\sum_{p=m}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} f_{k-1}(m) = \frac{1}{k m(m+1)\cdots(m+k-1)}.$$

Cette dernière formule couvre $m = 1$ et sera utile pour le majorant du reste de la partie III.

Partie III

Pour tout $j \geq 1$, P_j est un polynôme réel, donc une fonction continue sur $[0, 1]$.

L'intégrale a_j existe. On notera également $P_{j+1}(x) = (j - x)P_j(x)$, identité valable dès $j = 1$.

1) a) Première identité rationnelle.

Fixons $p \geq 1$ et $x \geq 0$. Les dénominateurs $p + 1$ et $p + x$ sont strictement positifs. En réduisant le membre de droite au même dénominateur :

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1-x}{(p+1)(p+x)} = \frac{p+x+1-x}{(p+1)(p+x)} = \frac{1}{p+x}.$$

L'identité est donc établie.

b) Première décomposition de u_p .

La partie I, question 2)a), donne $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 x/(p+x) dx$. En multipliant l'identité de a) par x , puis en intégrant sur $[0, 1]$:

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 x dx + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{x(1-x)}{p+x} dx.$$

Comme $P_2(x) = x(1-x)$ et $\int_0^1 x dx = 1/2$, on obtient :

$$u_p = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x} dx.$$

Toutes les intégrandes sont continues et tous les dénominateurs sont positifs, donc les opérations sur ces intégrales sont justifiées.

2) a) Identité faisant intervenir les polynômes.

Pour $k \geq 1$, on a $P_{k+1}(x) = (k - x)P_k(x)$. Avec $p \geq 1$ et $x \geq 0$, la réduction au même dénominateur donne :

$$\frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)} = \frac{(p+x)P_k(x) + (k-x)P_k(x)}{(p+k)(p+x)} = \frac{P_k(x)}{p+x}.$$

Il n'est pas nécessaire de diviser par $P_k(x)$; l'identité reste donc valable à ses racines.

b) Décomposition par récurrence.

On utilise la notation $f_j(p) = 1/[p(p+1) \cdots (p+j)]$. La formule à établir peut s'écrire :

$$u_p = \sum_{j=1}^k a_j f_j(p) + f_k(p) \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx.$$

Initialisation : $a_1 = \int_0^1 x dx = 1/2$, donc la question 1)b) donne exactement cette formule pour $k = 1$.

Hérédité : supposons la formule vraie pour un entier $k \geq 1$. On applique l'identité de a) avec l'indice $k+1$, puis on intègre :

$$\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx = \frac{a_{k+1}}{p+k+1} + \frac{1}{p+k+1} \int_0^1 \frac{P_{k+2}(x)}{p+x} dx.$$

En multipliant par $f_k(p)$, on utilise $f_k(p)/(p+k+1) = f_{k+1}(p)$. La formule au rang k devient :

$$u_p = \sum_{j=1}^k a_j f_j(p) + a_{k+1} f_{k+1}(p) + f_{k+1}(p) \int_0^1 \frac{P_{k+2}(x)}{p+x} dx.$$

Il s'agit de la formule au rang $k + 1$. La récurrence prouve donc, pour tous $p \geq 1$ et $k \geq 1$, la décomposition demandée, avec le reste intégral explicite.

c) Positivité et majoration de l'intégrale restante.

Pour $x \in [0, 1]$, les facteurs de $P_{k+1}(x) = x(1-x)(2-x) \cdots (k-x)$ sont tous positifs ou nuls. Ainsi $P_{k+1}(x) \geq 0$ sur ce segment et $a_{k+1} \geq 0$.

Si $p \geq 2$, $p + x \geq p - 1 > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} \leq \frac{P_{k+1}(x)}{p-1}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx \leq \frac{a_{k+1}}{p-1}.$$

Le dénominateur $p - 1$ explique la restriction $p \geq 2$, qui sera satisfaite pour tous les termes du reste r_n avec $n \geq 1$.

d) Décomposition et majoration de r_n .

Fixons $k \geq 1$ et $n \geq 1$. Pour chaque $p \geq n + 1 \geq 2$, notons :

$$R_{p,k} = f_k(p) \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx.$$

D'après c) et la positivité de $f_k(p)$:

$$0 \leq R_{p,k} \leq \frac{a_{k+1}}{p-1} f_k(p) = a_{k+1} f_{k+1}(p-1).$$

La série majorante converge. En effet, par changement d'indice $q = p - 1$ puis par la formule télescopique de la partie II :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_{k+1}(p-1) = \sum_{q=n}^{+\infty} f_{k+1}(q) = \frac{1}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Cette écriture est valable pour $n = 1$ grâce à la version de la formule commençant à $m = 1$. Le critère de comparaison des séries positives assure donc la convergence de

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} R_{p,k}.$$

Définissons sa somme par $r_{n,k}$. Elle vérifie :

$$0 \leq r_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

On somme maintenant l'égalité de b) de $p = n + 1$ à un entier N , puis on fait tendre N vers $+\infty$. La série de gauche converge d'après la partie I. Chaque série

$$\sum f_j(p)$$

converge d'après la partie II, la somme sur j est finie et la série du reste vient d'être justifiée. Ces passages à la limite sont donc autorisés et donnent :

$$r_n = \sum_{j=1}^k a_j \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_j(p) + r_{n,k} = \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} + r_{n,k}.$$

En développant la somme finie, on retrouve exactement la formule de l'énoncé et son majorant.

e) Construction de la suite accélérée.

Pour chaque $k \geq 1$ fixé et chaque $n \geq 1$, posons :

$$v_{n,k} = v_n + \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j(n+1)(n+2)\cdots(n+j)}.$$

Comme $\gamma = v_n + r_n$, l'égalité de d) donne $\gamma - v_{n,k} = r_{n,k}$. Par conséquent :

$$0 \leq \gamma - v_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Pour k fixé, le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$. Le majorant tend donc vers zéro. Le théorème d'encadrement donne $v_{n,k} \rightarrow \gamma$.

Conclusion

la suite construite approche γ par défaut, avec la borne d'erreur demandée.

3) a) Calcul des quatre premiers coefficients.

On développe chaque polynôme et on intègre terme à terme sur le segment $[0, 1]$.

$$P_1(t) = t, \quad a_1 = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

$$P_2(t) = t - t^2, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P_3(t) = t(1-t)(2-t) = 2t - 3t^2 + t^3, \quad a_3 = 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$P_4(t) = t(1-t)(2-t)(3-t) = 6t - 11t^2 + 6t^3 - t^4.$$

Ainsi :

$$a_4 = 3 - \frac{11}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{90 - 110 + 45 - 6}{30} = \frac{19}{30}.$$

Conclusion

$$a_1 = 1/2, a_2 = 1/6, a_3 = 1/4 \text{ et } a_4 = 19/30.$$

b) Choix de n_0 pour la suite accélérée.

La question 2)e), avec $k = 3$, donne :

$$0 \leq \gamma - v_{n,3} \leq \frac{a_4}{4n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{19}{120n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Il suffit de choisir un entier pour lequel le majorant est inférieur ou égal à 10^{-5} . On peut, par exemple, prendre $n_0 = 25$. En effet :

$$\frac{19}{120 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28} = \frac{19}{58\,968\,000} < 3,3 \times 10^{-7} < 10^{-5}.$$

Le choix $n_0 = 25$ garantit donc la précision demandée. Cette marge supplémentaire permettra aussi de certifier l'arrondi à cinq décimales dans la dernière question ; la recherche du plus petit entier n'est pas demandée.

c) Algorithme de calcul.

Code adapté en Python.

Pour $p \geq 1$, la primitive de $1/t$ sur $]0, +\infty[$ donne :

$$u_p = \frac{1}{p} - \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Avec les coefficients trouvés en a), la correction à ajouter à v_n est :

$$v_{n,3} - v_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Le programme complet, utilisant le choix $n_0 = 25$ de b), est :

Python

```
import math

n0 = 25

v = math.fsum(
    1 / p - math.log1p(1 / p)
    for p in range(1, n0 + 1)
)

v_accel = (
    v
    + 1 / (2 * (n0 + 1))
    + 1 / (12 * (n0 + 1) * (n0 + 2))
    + 1 / (12 * (n0 + 1) * (n0 + 2) * (n0 + 3))
)

borne_erreur = 19 / (
    120 * n0 * (n0 + 1) * (n0 + 2) * (n0 + 3)
)

print(f"v_{n0} = {v:.15f}")
print(f"v_{n0},3 = {v_accel:.15f}")
print(f"Borne d'erreur = {borne_erreur:.12e}")
```

La commande `math.log1p(t)` calcule $\ln(1+t)$ et la commande `math.fsum` additionne les termes avec une précision améliorée. La boucle prend les indices de un à n_0 inclus :

elle utilise exactement les termes de v_{n_0} . Le programme fournit d'abord la somme initiale, puis la somme accélérée, puis le majorant théorique de son erreur de troncature.

Le télescopage des logarithmes donne aussi

$$v_n = \sum_{p=1}^n 1/p - \ln(n+1),$$

identité qui permet de contrôler le premier calcul.

Code exécuté. Les sorties obtenues sont :

$$v_{25} \simeq 0,557861639732025, \quad v_{25,3} \simeq 0,577215357002409.$$

Le majorant vaut environ $3,222086555420 \times 10^{-7}$. Il s'agit d'une borne mathématique de l'erreur de troncature, distincte des arrondis de l'arithmétique flottante. Le calcul a également été contrôlé à précision élevée.

d) Valeur approchée de γ .

La question 2)e) encadre la constante par $v_{25,3} \leq \gamma \leq v_{25,3} + 19/58\,968\,000$. Les valeurs numériques précédentes donnent, avec des bornes élargies vers l'extérieur :

$$0,5772153 < \gamma < 0,5772158.$$

Tout cet intervalle est compris dans $[0,577215, 0,577225[$. L'arrondi à cinq chiffres après la virgule est donc 0,57722.

Conclusion

$\gamma \simeq 0,57722$ à 10^{-5} près. En effet, l'encadrement donne même $|\gamma - 0,57722| < 4,7 \times 10^{-6}$.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, question 2)c) : la suite à faire converger est corrigée en (w_n) au lieu de (v_n) . La définition locale de w_n et les dépendances des questions 3) et 4) imposent cette rectification.
- Exercice 1, question 3) : l'indice de départ est choisi au moins égal à un, afin de rendre licite le quotient par n ; la conclusion et le raisonnement demandés sont conservés.
- Exercice 2, partie I, préambule et questions 1) à 4) : l'endomorphisme identité, appelé i dans le PDF, est noté id . Exercice 2, partie II, questions 1) à 3) : la transposée est notée ${}^tM$. Ces changements harmonisent les notations sans modifier les objets ni les propriétés étudiées.
- Exercice 3, partie I, question 2) : l'espérance conditionnelle est définie uniquement sur les événements $(X = k)$ de probabilité strictement positive. La somme est restreinte à ces indices, les autres contributions étant nulles; cela évite un conditionnement indéfini.
- Exercice 3, partie II, préambule des questions 1) à 4) : les destinations sont explicitement uniformes et indépendantes conditionnellement au nombre de passagers. Cette précision rend explicite le modèle nécessaire aux probabilités et à l'espérance totale.
- Problème, partie III, question 3)c) : Code adapté en Python. La consigne de rédaction d'un algorithme dans l'ancien langage est remplacée par une consigne Python; les calculs de v_{n_0} et de $v_{n_0,3}$ sont conservés.