



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EDHEC

Mathématiques

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

1) On note ϕ l'application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \phi(t) = 3t - 4t^3.$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1, 1], \quad \phi(t) \in [-1, 1]$.

b) Établir que, pour tout couple (t, t') d'éléments de $[-1, 1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leq 9|t - t'|.$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions numériques par $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad f_n(x) = 3f_{n-1}\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(f_{n-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3.$$

Écrire une fonction Python d'en-tête `def f(n, x)` : qui fournit la valeur de $f_n(x)$, pour un entier $n \geq 1$ et un réel x .

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x) - \sin x| \leq \frac{|x|^3}{2 \cdot 3^n}.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

On considère la matrice carrée A d'ordre $n \geq 1$ à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}.$$

La ligne d'indice i de cette matrice est donc :

$$\left(\frac{1}{i!}, \frac{1}{(i+1)!}, \frac{1}{(i+2)!}, \dots, \frac{1}{(i+n-1)!} \right).$$

1) On considère un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

On lui associe la fonction polynôme P , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(t) = \frac{x_1}{n!} + \frac{x_2}{(n+1)!}t + \cdots + \frac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{(n+k-1)!}t^{k-1}.$$

a) On pose $f(t) = t^n P(t)$. Calculer $f(1), f'(1), \dots, f^{(n-1)}(1)$.

b) En déduire les dérivées successives de P au point 1.

2) Démontrer que P est nul et en déduire que A est inversible.

Exercice 3

Un appareil est constitué de composants électroniques. Lorsque l'un de ceux-ci tombe en panne, il est remplacé immédiatement. Si n est un entier naturel non nul, on note T_n la variable aléatoire égale au temps, compté en semaines, écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la n -ième panne survenant à l'emplacement d'un composant donné. Si t est un réel strictement positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de pannes du même composant dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On suppose que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt , avec $\lambda > 0$.

- 1) a) Comparer les événements $(T_1 > t)$ et $(N_t = 0)$.

b) Reconnaître la loi de T_1 .
- 2) a) Exprimer la probabilité de l'événement $(T_n > t)$ pour $t > 0$.

b) Montrer que T_n est une variable aléatoire à densité, dont on donnera une fonction de densité de probabilité.
- 3) On considère deux composants identiques au précédent. Étudier la loi de probabilité de T , variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la première panne de l'un des deux composants. On précisera des hypothèses d'indépendance raisonnables que l'on sera amené à faire.

Problème

Notations

Pour tout entier naturel non nul n , on note :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

f_n, g_n sont les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right), \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

I_n, U_n, V_n sont les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) \, dx, \quad U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} g_n(x) \, dx, \quad V_n = \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 g_n(x) \, dx.$$

E_n est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à $n - 1$.

Partie 1

1) a) La suite de terme général H_n est-elle convergente ? La suite de terme général S_n est-elle convergente ?

b) Pour tout nombre réel positif ou nul x , prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x. \quad (1)$$

c) En appliquant la double inégalité (1) à $x = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, montrer que $H_n \sim \ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

2) a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{S_n/(2H_n)} \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx.$$

c) En conclure que $U_n \sim \frac{1}{H_n}$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer de façon analogue les inégalités :

$$0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} \frac{e^{S_n/2}}{H_n}.$$

e) Démontrer que $V_n = o\left(\frac{1}{H_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

3) À l'aide des questions précédentes, établir que $I_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie 2

1) On considère la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'éléments de E_n définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad e_k(x) = (x+1) \cdots (x+k-1)(x+k+1) \cdots (x+n) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (x+i).$$

Un produit sans facteur vaut 1.

a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n .

b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n! = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x).$$

c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$.

2) Déduire de la question 1 de la partie 2 la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} (\ln(k+1) - \ln k).$$

3) Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie 1 pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1) \sim \frac{1}{n \ln n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$