



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 2025

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

1. (a) Justifier que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

converge.

(b) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge.

(c) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

converge.

On note

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Montrer que $A - B = 2C$ et $A = C + \frac{1}{4}A$.

3. (a) Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels,
 $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

(b) Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall t \in [0, \pi[, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

(a) Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

(b) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

5. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et déterminer φ' .

(b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0.

On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

(c) Montrer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

(d) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On admet que $\forall t \in [0, \pi[, f(t) = \varphi(\pi - t)$.

Justifier que la fonction f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

6. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel N non nul, que

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) \, dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. (a) Montrer que

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) En déduire les valeurs de A et B .

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1

1. (a) Justifier que la famille $(I_3, M, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6, M^7, M^8, M^9)$ est liée.
 (b) En déduire qu'il existe un polynôme annulateur non nul de M de degré inférieur ou égal à 9.
2. On admet que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 - 12x - 28$ est un polynôme annulateur de M .
 (a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée PolyAnn prenant en entrée une matrice M et renvoyant True si φ est bien un polynôme annulateur de M et False sinon.
 (b) Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_3 , M et M^2 .
3. (a) Montrer que si λ est une valeur propre de M , alors $\varphi(\lambda) = 0$.
 (b) En étudiant la fonction φ , montrer que M admet au plus une valeur propre réelle et qu'elle est strictement supérieure à 4.

On admet que $\varphi\left(\frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}\right) < 0$.

- (c) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie 2

On pose $S = {}^tMM$.

4. Justifier que S est symétrique.
5. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives.
6. Justifier qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $S = PD^tP$.

On admet que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$.

7. (a) Combien existe-t-il de matrices Δ diagonales telles que $\Delta^2 = D$?

On note, dans la suite de l'exercice, Δ une telle matrice diagonale.

- (b) Justifier que Δ est inversible.

8. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle telle que $R^2 = S$.

9. Justifier que R est inversible et exprimer R^{-1} en fonction de P et Δ^{-1} .

10. On note $U = MR^{-1}$.

Montrer que U est une matrice orthogonale.

Partie 3

On admet qu'il existe une matrice Δ diagonale vérifiant $\Delta^2 = D$ et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère désormais cette matrice Δ et les matrices U et R définies dans la partie précédente, associées à cette matrice, c'est-à-dire $R = P\Delta^t P$ où P est définie à la question 6, $R^2 = S$, R est symétrique réelle et inversible, $U = MR^{-1}$ et U est orthogonale.

11. Montrer que les valeurs propres de R sont strictement positives.

On suppose qu'il existe V une matrice orthogonale et T une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $M = VT$.

On pose $N = {}^t PTP$ et C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de P où P est définie à la question 6.

12. Montrer que $T^2 = S$ et que $N^2 = D$.

13. Montrer que T et S commutent.

14. Soit i un entier de $\{1, 2, 3\}$.

(a) Justifier que $PE_i = C_i$ où E_i est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i qui vaut 1.

(b) Justifier que C_i est un vecteur propre de S . On note λ_i la valeur propre associée.

(c) Montrer que TC_i appartient au sous-espace propre de S associé à λ_i .

(d) Montrer que TC_i et C_i sont colinéaires.

15. Montrer que N est diagonale.

16. Montrer que $N = \Delta$ puis que $T = R$.

17. Montrer que $V = U$.

Problème

Partie 1

1. Soit x et y deux réels.

(a) Déterminer un équivalent simple de $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0.

(b) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

converge si et seulement si $x > 0$.

(c) Montrer, à l'aide du changement de variable $s = 1 - t$, que les intégrales

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$$

sont de même nature.

(d) En déduire que

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

On note désormais, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = B(y, x).$$

3. Soit $x > 0$, calculer $B(x, 1)$.

4. (a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y).$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

(c) En déduire que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

5. Montrer que :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)! (q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Partie 2

6. On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall \nu \in]0, +\infty[$, $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$.

On rappelle que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout réel ν strictement positif, $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$.

(a) Déterminer, pour tout entier naturel n , $\Gamma(n + 1)$ en fonction de n .

(b) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2t}$.

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, on définit

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

7. (a) Justifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge.

(b) Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

8. (a) Reconnaître la loi de X une variable aléatoire à densité de densité $f_{a,1}$.

Préciser l'espérance et la variance de X .

(b) Reconnaître la loi de X une variable aléatoire à densité de densité $f_{1,b}$.

Préciser l'espérance de X et montrer que X admet une variance et la déterminer.

9. Soit X une variable aléatoire à densité de densité $f_{a,b}$.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire bX .

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

10. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$, où a_1 , a_2 et b sont trois réels strictement positifs.

(a) Montrer que $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(c) Que vaut $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

Partie 3

On suppose dans cette partie et pour les questions d'informatique que les bibliothèques suivantes sont importées ainsi :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

11. Soit (x, y) un couple de réels strictement positifs.

(a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance et la déterminer en fonction de x et y .

On admet que, si $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$, $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une variance.

(b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `Simul` qui prend en entrée deux réels x et y strictement positifs et qui renvoie une simulation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$.

- (c) On suppose dans cette question que $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine $B(x, y)$ où pour tout entier naturel non nul n ,

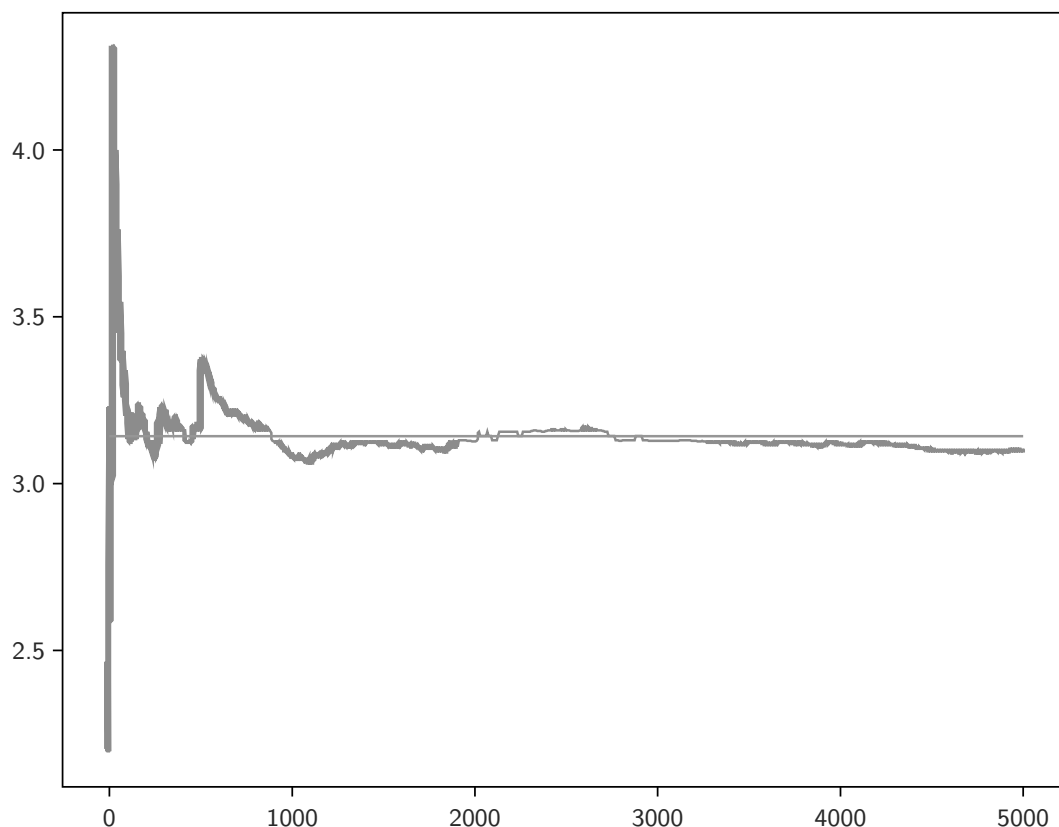
$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1} (1 - U_k)^{y-1}.$$

- (d) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `Rn` qui prend en entrée deux réels x et y strictement positifs et un entier n et qui renvoie une simulation de R_n .

- (e) Dans la figure suivante, sont représentées différentes simulations de R_n en fonction de n pour $x = y = \frac{1}{2}$.

On admet que, pour $x = y = \frac{1}{2}$, la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge encore en probabilité vers la variable aléatoire certaine $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Quel résultat de la partie 2 illustre-t-on ?



La figure représente, pour n allant de 1 à 5000, les valeurs simulées de R_n (courbe brisée grise), ainsi qu'une droite horizontale grise d'ordonnée voisine de 3,14. Les valeurs simulées partent d'environ 2,2 pour les premiers indices, présentent un pic proche de 4,3 pour n de l'ordre de 20, un saut jusqu'à environ 3,38 vers $n \approx 500$, puis restent comprises entre environ 3,06 et 3,17 à partir de $n \approx 1000$; elles valent environ 3,10 pour $n = 5000$.

12. Soit a un réel supérieur ou égal à 1.

(a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Montrer que X^{a-1} admet une espérance et une variance et les donner.

(b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit, pour tout entier naturel non nul n ,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{a-1}.$$

Montrer que M_n est un estimateur convergent et sans biais de $\Gamma(a)$.

(c) Expliquer ce que renvoie la fonction Myst suivante :

Python

```
def Myst(n):  
    U = rd.random(n)  
    X = -np.log(1-U)  
    return(X)
```

(d) Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de $\Gamma(a)$.

Python

```
def Approx(n, a):  
    X = Myst(n)  
    ..... # plusieurs lignes sont possibles
```