



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**Ecricome**

Mathématiques

**2021**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

## EXERCICE 1

---

### Partie 1 : Étude de trois matrices

---

On note  $A$ ,  $J$  et  $S$  les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que  $A^3 = -3A$ . En déduire que  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. Justifier que  $J$  et  $S$  sont diagonalisables, et vérifier que  $SJ = JS$ .
3. On admet que  $\text{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ . Montrer que tout vecteur propre de  $S$  est vecteur propre de  $J$ .
4. En déduire qu'il existe une matrice  $P$  inversible de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que  $P^{-1}SP$  et  $P^{-1}JP$  soient diagonales.

### Partie 2 : Étude des matrices magiques

---

Soit  $n \geq 3$ . On dit qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est magique quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

- pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j},$$

- pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j},$$

•

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$$

et

$$d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1},$$

alors :

$M$  est magique si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M).$$

Si  $M$  est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée  $s(M)$  et appelée somme de la matrice  $M$ .

On note  $E_n$  l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre  $n$ , et on admet que  $E_n$  ainsi défini est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

5. Montrer que  $\ell_1$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On admettra dans la suite que, pour tout  $i$  de  $\{2, \dots, n\}$  et pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , les applications  $\ell_i, c_j, d_1, d_2$  et  $s$  sont des formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

6. On note  $K_n$  l'ensemble des matrices de  $E_n$  de somme nulle.

Montrer que  $K_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E_n$ .

7. Soit  $M \in E_n$ . Montrer que  ${}^t M$  est aussi un élément de  $E_n$  et déterminer  $s({}^t M)$ .

8. Soit  $M \in E_n$ . Montrer qu'il existe un unique réel  $\lambda$  tel que  $M - \lambda J_n \in K_n$ , avec

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Soit  $M \in E_n$ . Montrer que  $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $M$  et préciser la valeur propre associée.

### Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

---

On se place dans cette partie dans le cas particulier où  $n = 3$ .

10. Vérifier que les matrices  $A, J$  et  $S$  définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.

- 11.** Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$  tel que :

$M = M_1 + M_2$ , avec  $M_1$  antisymétrique et  $M_2$  symétrique.

On explicitera notamment  $M_1$  et  $M_2$  en fonction de  $M$ .

- 12.** Soit  $M \in K_3$ . On écrit  $M = M_1 + M_2$  selon la décomposition vue en question 11.

(a) Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à  $K_3$ .

(b) Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S.$$

- 13.** En déduire une base de  $K_3$ , puis montrer que  $(A, J, S)$  est une base de  $E_3$ .

- 14.** On note  $\Delta = \{M \in E_3 / P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$ , où  $P$  est la matrice définie dans la partie 1.

Montrer que  $\Delta = \text{Vect}(J, S)$ .

## EXERCICE 2

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x^2 + y) e^{-(x^2 + y^2)}.$$

- 1.** Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et déterminer  $\partial_1 f(x, y)$  et  $\partial_2 f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- 2.** Déterminer les points critiques de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

On admettra dans la suite que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 2 \left( (1 - (x^2 + y))(1 - 2x^2) - 2x^2 \right) e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\partial_{2,2}^2 f(x, y) = -2 \left( x^2 + 2y + y(1 - 2y(x^2 + y)) \right) e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = -2x \left( 1 + 2y(1 - x^2 - y) \right) e^{-(x^2+y^2)}.$$

3. Montrer que la hessienne de  $f$  en  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  est diagonale.

La fonction  $f$  admet-elle un extremum local en  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ? Si oui, de quelle nature?

4. Montrer que  $f$  admet un extremum local en  $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et préciser sa nature.

5. Montrer que la hessienne de  $f$  en  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$  est la matrice

$$H = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

Justifier que  $H$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et que ses valeurs propres sont toutes deux strictement négatives.

Qu'en déduire pour le point  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ?

6. (a) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq |f(x, y)| \leq \left( (\max(|x|, |y|))^2 + \max(|x|, |y|) \right) e^{-(\max(|x|, |y|))^2}.$$

(b) En étudiant la limite en  $+\infty$  de  $u \mapsto (u^2 + u)e^{-u^2}$ , montrer qu'il existe un réel  $r$  strictement positif tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(|x|, |y|) \geq r \implies 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}.$$

(c) On admet que, si  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $c$  un réel, l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \leq c\}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ .

Représenter l'ensemble  $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leq r\}$  et justifier que cet ensemble est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

(d) Vérifier que tous les points critiques de  $f$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .

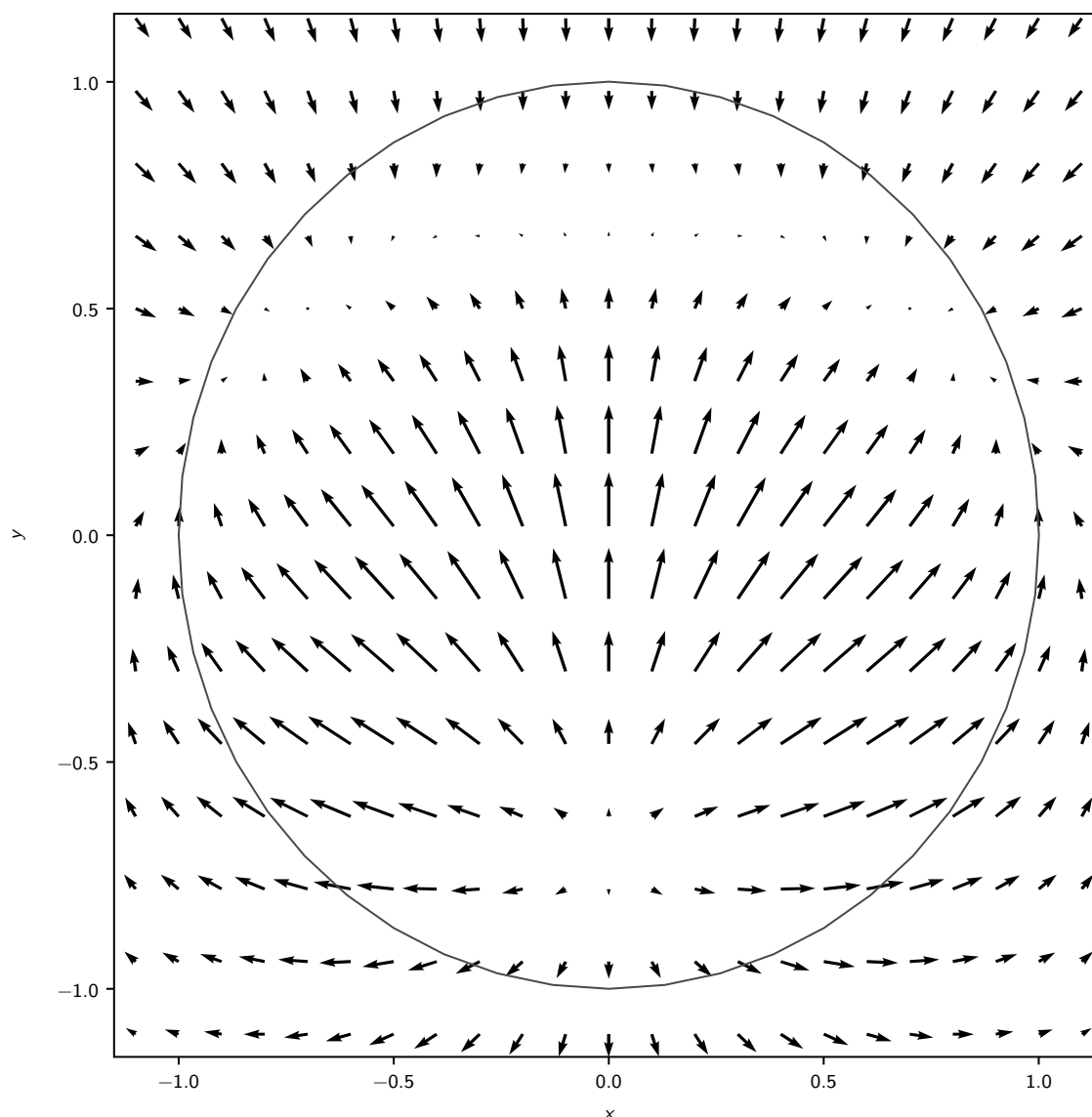
En déduire tous les extrema globaux de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et les points où ils sont atteints.

On cherche maintenant à étudier les extrema de la fonction  $f$  sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 1$ . On a représenté sur la figure 1 ci-dessous le champ de vecteurs correspondant au gradient de  $f$  (une flèche partant du point de coordonnées  $(x, y)$  représente le vecteur  $\nabla f(x, y)$ ), ainsi que le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

7. En s'appuyant sur la figure 1, la fonction  $f$  semble-t-elle admettre un extremum sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 1$  au point de coordonnées  $(1, 0)$ ? Justifier votre réponse.

8. Déterminer sur  $[-1, 1]$  les extrema de la fonction  $g : y \mapsto 1 + y - y^2$ .

9. Dédurre de la question précédente l'ensemble des points pour lesquels  $f$  admet un extremum sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 1$ . Commenter ce résultat au vu de la figure 1.

Figure 1 – Gradient de  $f$  et cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ 

## PROBLÈME

Soit  $a$  un réel strictement positif.

On considère dans toute la suite du problème une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, a]$ .

L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de  $a$ .

Les parties 1 et 2 de ce problème sont indépendantes.

## Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

On note pour tout  $n \geq 1$ ,  $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ , appelé estimateur de  $a$  du maximum de vraisemblance.

- (a) On rappelle qu'en Python, après l'instruction `import numpy as np`, l'instruction `np.random.uniform(a, b, (n, m))` renvoie un tableau à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, où chaque coefficient simule une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , les coefficients étant simulés de manière indépendante; l'instruction `np.random.uniform(a, b, n)` renvoie de même un tableau à une dimension de  $n$  tels coefficients. On rappelle aussi que, si  $T$  est un tableau, `np.max(T)` renvoie le plus grand de ses coefficients.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def sim_V(n, a)` : prenant en entrée un entier naturel non nul  $n$  et un réel  $a$  strictement positif, et qui renvoie une réalisation de  $V_n$ .

- (b) On a tracé ci-dessous cinq réalisations mutuellement indépendantes de  $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ , dans le cas où  $a = 1$ .

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur  $V_n$  ?

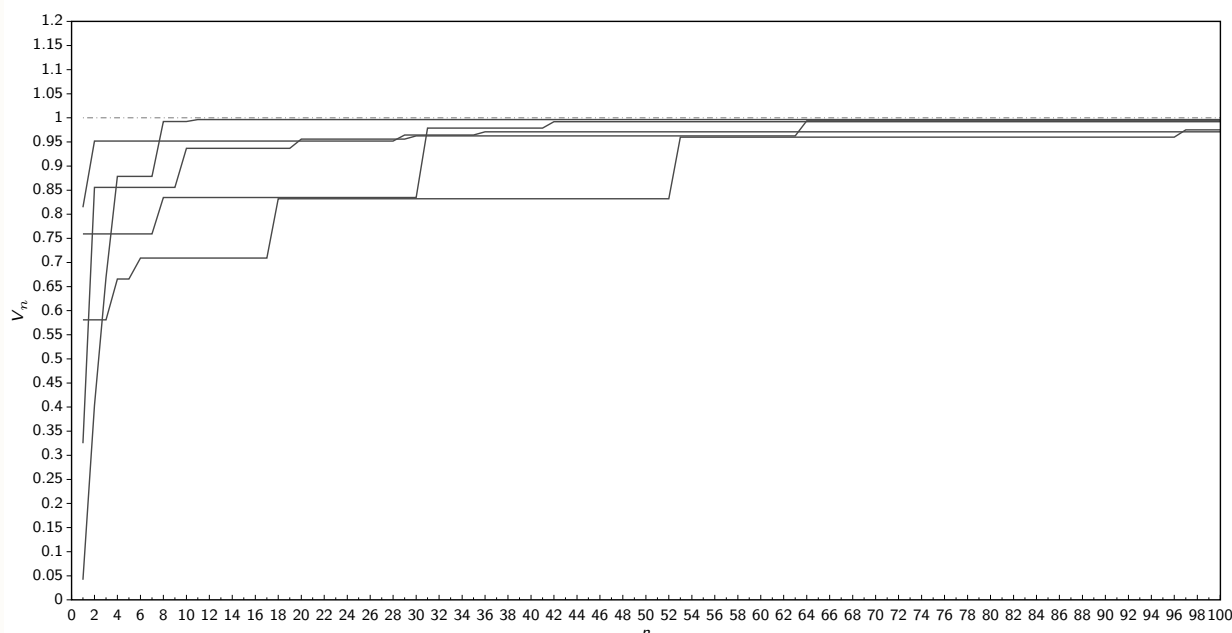


Figure 2 – Cinq évolutions de  $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$  pour  $a = 1$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de  $X_1$ , suivant la loi uniforme  $\mathcal{U}([0, a])$ .

(b) Déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de  $V_n$ .

(c) En déduire que  $V_n$  est une variable aléatoire à densité et donner une densité de  $V_n$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier que  $V_n$  admet une espérance et déterminer l'espérance de  $V_n$ .

L'estimateur  $V_n$  est-il sans biais ?

4. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $P(|V_n - a| \geq \varepsilon)$  en fonction de  $F_n$ , de  $a$  et de  $\varepsilon$ .

L'estimateur  $V_n$  est-il convergent ?

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout réel  $t$ , exprimer  $P(n(a - V_n) \leq t)$  à l'aide de  $F_n$ .

En déduire que la suite  $(n(a - V_n))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son (ses) paramètre(s).

6. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $a$ , construit à l'aide de  $V_n$ .

7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Montrer que  $V_n$  admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.

(b) Montrer que  $E((V_n - a)^2) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$ .

Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

## Partie 2 : Méthode des moments

Pour un entier  $n \geq 1$ , on note  $\bar{X}_n$  la moyenne empirique de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

On note  $M_n = 2\bar{X}_n$ , appelé estimateur de  $a$  par la méthode des moments.

8. Écrire une fonction Python d'en-tête `def sim_M(n, a)` : qui, prenant en entrée un entier naturel non nul  $n$  et le réel  $a > 0$ , renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $M_n$ . On pourra utiliser la commande `np.mean(T)`, qui renvoie la moyenne des coefficients du tableau  $T$ .
9. Déterminer l'espérance et la variance de  $\bar{X}_n$ . En déduire que  $M_n$  est un estimateur sans biais.
10. Déterminer  $E((M_n - a)^2)$ . Cet estimateur est-il convergent ?
11. Justifier que la suite  $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le (les) paramètre(s).
12. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $a$ , construit sur  $M_n$ .

Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 6 ?

13. Comparer  $E((M_n - a)^2)$  à  $E((V_n - a)^2)$ , obtenue à la question 7.(b).

Commenter ce résultat à l'aide de la figure 3 ci-dessous :

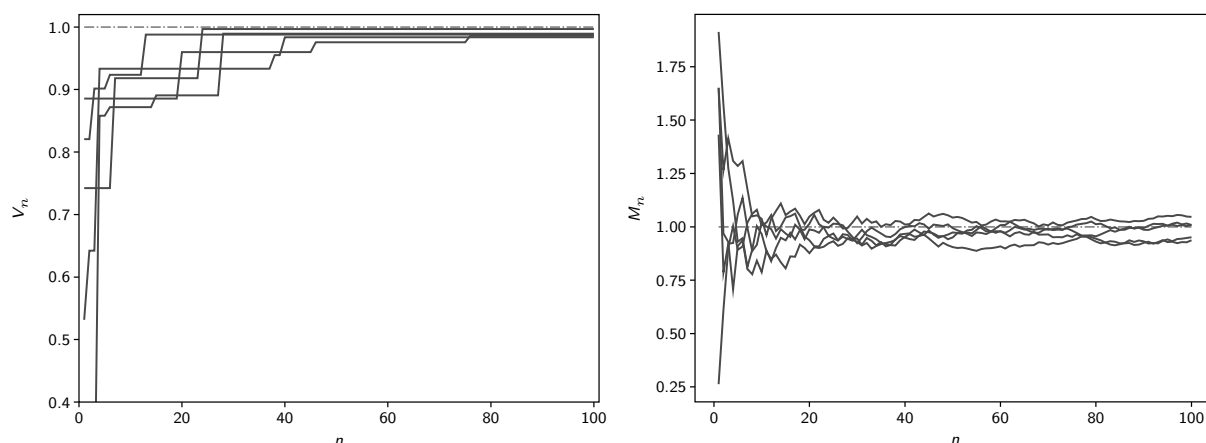


Figure 3 – Cinq évolutions de  $(V_1, \dots, V_{100})$  (à gauche) et de  $(M_1, \dots, M_{100})$  (à droite) pour  $a = 1$

### Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

Dans les parties précédentes, nous avons montré que  $(V_n)$  convergeait « plus vite » vers  $a$  que  $(M_n)$ . Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure  $(X_1)$  est erronée.

Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires  $X_i$  sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :

- $X_1$  suit la loi uniforme sur  $[0, 2a]$  ;
- si  $i \geq 2$ ,  $X_i$  suit la loi uniforme sur  $[0, a]$  (comme précédemment).

On considère toujours, pour tout entier  $n \geq 1$  :  $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $M_n = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ .

**14.** (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout réel  $t$  de  $]a, 2a]$ , montrer que :  $P(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}$ .

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la fonction de répartition de  $V_n$ .

La suite de variables aléatoires  $(V_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle en loi ?

(c) Calculer  $P\left(V_n > \frac{3}{2}a\right)$ .

L'estimateur  $V_n$  est-il toujours convergent ?

**15.** On pose pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$M'_n = \frac{2}{n-1}(X_2 + \dots + X_n).$$

On rappelle que la suite  $(M'_n)_{n \geq 2}$  converge en probabilité vers  $a$ .

(a) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, exprimer  $M_n$  en fonction de  $X_1$ ,  $M'_n$  et  $n$ .

(b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$|M_n - a| \leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|.$$

(c) Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $n_0$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que  $\frac{3a}{n_0} < \varepsilon$ .

Pour tout entier  $n$  vérifiant  $n \geq n_0$ , comparer les événements  $(|M'_n - a| < \varepsilon)$  et  $(|M_n - a| < 2\varepsilon)$ .

(d) La suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 2}$  converge-t-elle en probabilité vers  $a$  ?

**16.** Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.