



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2020

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

1. (a) Expliciter T_2 et T_3 .
- (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de T_n .
- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x) \cos((n+1)x).$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. (a) Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.
- (b) Montrer que l'application

$$\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

(c) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

(d) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.

Indication : on pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.

(e) Montrer que :

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

(f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$d_n = \inf \{ \|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \}.$$

(a) Justifier que :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^n, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k.$$

(b) Montrer alors que : $d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

(c) Déterminer en particulier la valeur de d_2 .

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

On se place désormais sous cette condition.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(c) En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}.$$

(e) La série

$$\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$$

converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

(c) En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge et que, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

PROBLÈME

On étudie dans ce problème un processus temporel de comptage appelé processus de Poisson.

L'objectif de ce problème est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révéleront être équivalentes.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A - Définition par $X_1, X_2, \dots, X_n$.

On considère dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note N_t la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de n pour laquelle S_n est inférieure ou égale à t , c'est-à-dire :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose : $N_t = -1$.

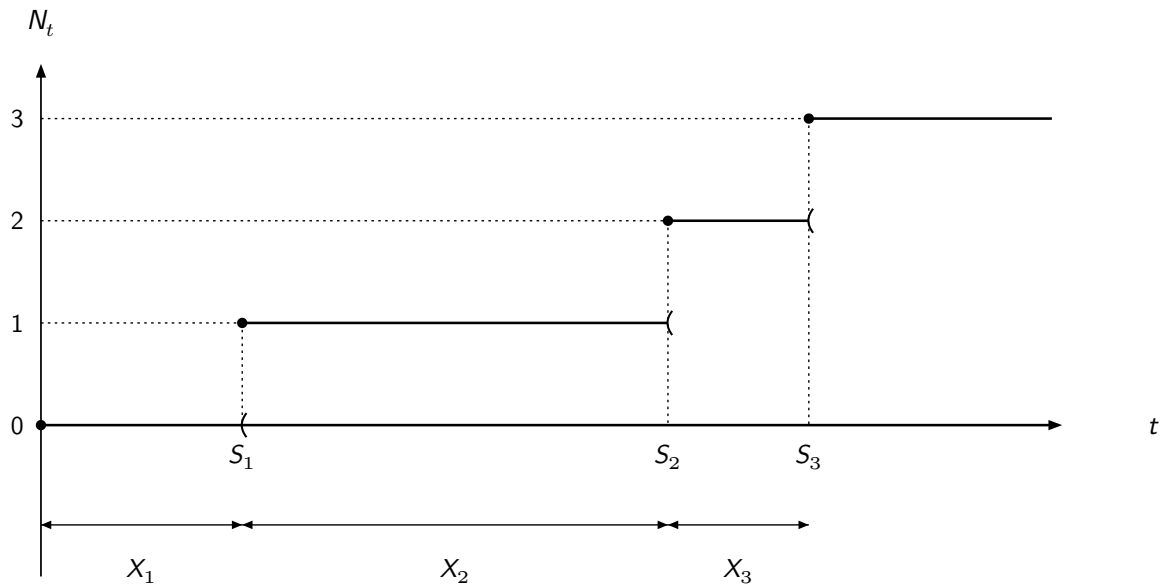


Figure 1 – Exemple de réalisation de N_t en fonction de t .

1. Pour tout réel t strictement positif, montrer que : $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.
3. Pour tout entier n non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire λS_n .
4. Pour tout réel t strictement positif et pour tout entier naturel n , comparer les événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Quelle est la loi de N_t ?

7. Dans cette question, on utilise Python avec les importations suivantes :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Le paramètre λ est noté lam dans les programmes, le mot lambda étant réservé en Python.

On rappelle que l'instruction `rd.exponential(1/lam, n)` renvoie un tableau de n réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre lam (le premier argument est l'inverse du paramètre), et que `rd.exponential(1/lam)` renvoie une seule telle réalisation. L'instruction `np.sum(A)` renvoie la somme des coefficients du tableau A.

On rappelle également que, si x et y sont deux listes de même longueur k , l'instruction `plt.plot(x, y)` effectue un tracé qui relie les points $(x[0], y[0])$, $(x[1], y[1])$, ..., $(x[k-1], y[k-1])$; l'instruction `plt.show()` affiche la figure. Enfin, si L est une liste et S un nombre, $L + [S]$ est la liste L complétée par l'élément S , et `len(L)` est la longueur de L .

(a) Écrire une fonction d'en-tête `def simulation_S(n, lam)` : renvoyant une réalisation de S_n .

(b) Écrire une fonction d'en-tête `def simulation_N(t, lam)` : renvoyant une réalisation de N_t .

(c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant la liste de toutes les valeurs $S_1, S_2, \dots, S_n$ tant que $S_n \leq t$. Compléter cette fonction.

Python

```
def evolution_S(t, lam):
    L = []
    S = rd.exponential(1/lam)
    while .....:
        L = L + [S]
        S = S + .....
    return L
```

- (d) On a commencé à écrire la fonction Python ci-dessous. Dans cette fonction, on note S la liste $[S_1, \dots, S_n]$ renvoyée par `evolution_S`, de sorte que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $S[k-1]$ contient S_k . On souhaite tracer l'évolution de N_t du temps 0 au temps S_n de la même manière que sur la figure 1.

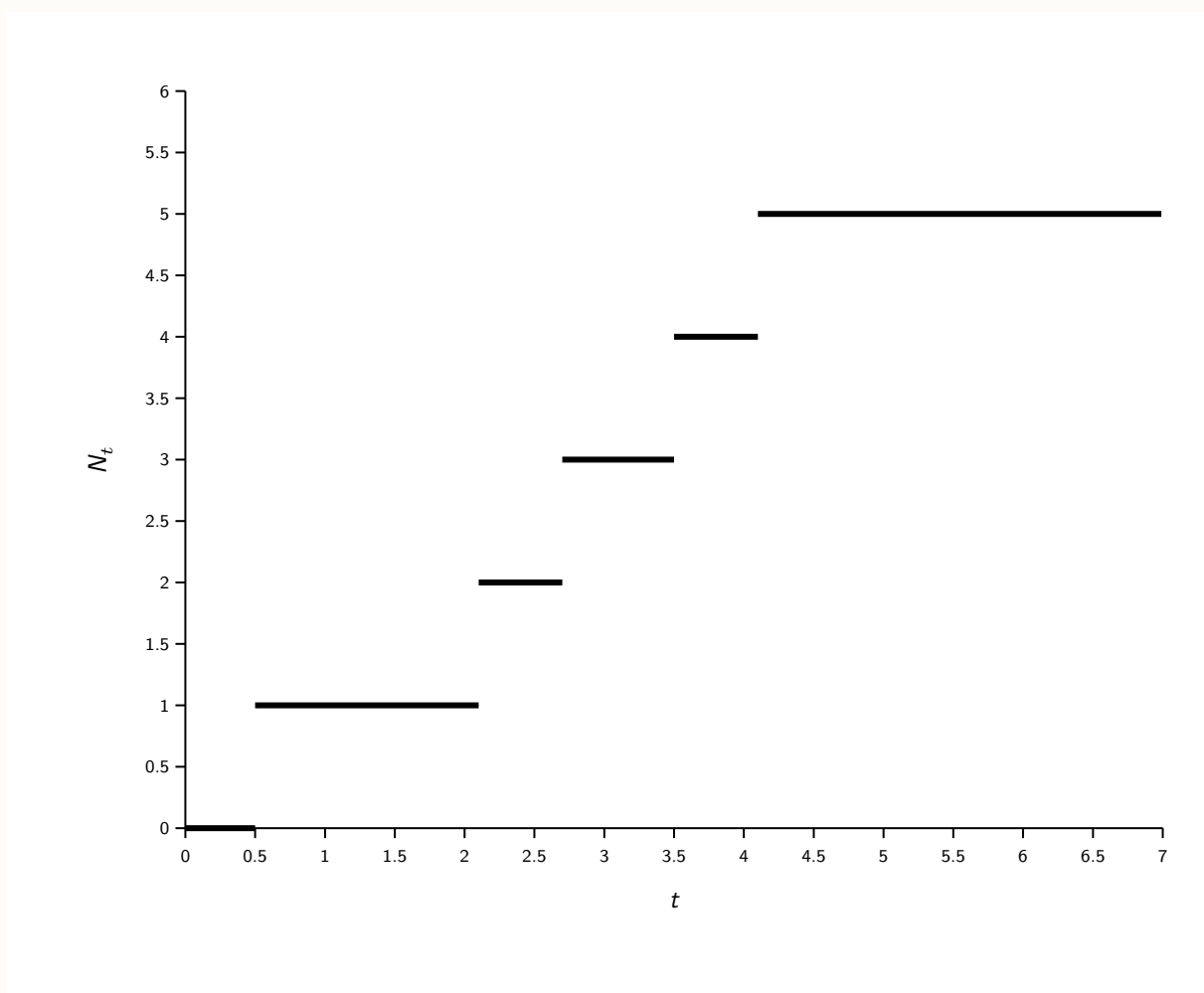
Python

```
def trace_N(t, lam):
    S = evolution_S(t, lam)
    n = len(S)
    plt.plot([0, S[0]], [0, 0])
    for i in range(1, n):
        .....
    plt.show()
    return S
```

Par laquelle des instructions suivantes faut-il compléter la ligne manquante ?

- i) `plt.plot([S[i-1], S[i]], [i, i])`
- ii) `plt.plot([i, i+1], [S[i-1], S[i]])`
- iii) `plt.plot([S[i-2], S[i-1]], [i, i])`
- iv) `plt.plot([i, S[i]], [i, i])`

(e) Un·e étudiant·e exécute la fonction précédente pour $t = 7$ et $\lambda = 1$, c'est-à-dire l'instruction `trace_N(7, 1)`, et on obtient la figure suivante :



Que valent dans ce cas $N_{3.2}$ et $N_{5.5}$?

Donner une valeur approximative de S_2 et de X_4 .

Partie B - Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

On rappelle que les parties de ce problème sont indépendantes.

Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(H_1) : $N_0 = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$;

(H_2) : pour tout $t > 0$, $P(N_t = 0) < 1$;

(H_3) : pour tous réels $h \geq 0$ et $t \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de la variable aléatoire N_t ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi;

(H_4) : $P(N_h \geq 2) = o(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

8. Propriétés élémentaires.

(a) Que vaut $p_0(0)$?

(b) Montrer que le processus est croissant, c'est-à-dire que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1.$$

9. Détermination de p_0 .

(a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

(b) En déduire que la fonction p_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(ns) = (p_0(s))^n.$$

En déduire que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = p_0(1)^{m/n}.$$

On pourra poser $s = \frac{m}{n}$ et utiliser le début de la question.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe deux suites $(u_n), (v_n)$ de nombres rationnels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq t \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = t.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$. Montrer que :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. Loi de N_t .

Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque h tend vers 0.
- (b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$ est un système complet d'événements, montrer que :

$$p_1(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda h + o(h).$$

- (c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements introduit précédemment, montrer que

$$p_n(t+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h).$$

(d) Dédurre de cette dernière égalité que

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + o(1).$$

En déduire que p_n est dérivable en t et donner l'expression de $p'_n(t)$.

(e) Pour tous n de $\mathbb{N}$ et t de $\mathbb{R}_+$, on pose $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

Justifier la dérivabilité de q_n , puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

(f) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(g) Quelle est la loi de N_t ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le premier instant t où N_t vaut n , c'est-à-dire :

$$S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}.$$

Dans toute cette question, on admet de plus que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto N_t(\omega)$ vérifie les propriétés suivantes :

- elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$;
- elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$;

- elle ne saute aucune valeur entière : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $k \in \{0, \dots, N_t(\omega)\}$, il existe $s \in [0, t]$ tel que $N_s(\omega) = k$;
- elle n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$.

On admet que ces propriétés assurent que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est une variable aléatoire réelle.

- (a) Que vaut S_0 ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.
- (b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de N_t .
- (c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- (d) Reconnaître la loi de S_1 .

- (e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$