



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Notations. Pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ est le produit scalaire canonique, et la base canonique est orthonormale pour ce produit scalaire. On identifie un vecteur de E à la colonne de ses coordonnées dans la base canonique. La matrice de $u \circ v$ dans la base canonique est AB , celle de $u \circ u$ est A^2 .

Partie 1

Question 1.

Il s'agit de vérifier que $u \circ u = u$ et $v \circ v = v$, c'est-à-dire, en passant aux matrices dans la base canonique, que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. On note que $1 + a^2 > 0$, donc A est bien définie.

Méthode 1 — Calcul direct des carrés.

Posons $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & a + a^3 \\ a + a^3 & a^2 + a^4 \end{pmatrix} = (1 + a^2) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} = (1 + a^2)A_0.$$

Donc $A^2 = \frac{1}{(1 + a^2)^2} A_0^2 = \frac{1}{1 + a^2} A_0 = A.$

De même, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$, donc $B^2 = \frac{1}{4}J^2 = \frac{1}{2}J = B.$

Méthode 2 — Écriture comme projection sur une droite.

Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $W' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $W^t W = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ et ${}^t W W = 1 + a^2$, donc

$$A = \frac{1}{{}^t W W} W^t W. \text{ De même } B = \frac{1}{{}^t W' W'} W'^t W'.$$

Pour toute colonne non nulle V , posons $P_V = \frac{1}{{}^t V V} V^t V$. Comme ${}^t V V$ est un réel non nul, l'associativité du produit matriciel donne :

$$P_V^2 = \frac{1}{{}^t V V} V ({}^t V V) V^t V = \frac{1}{{}^t V V} V^t V = P_V.$$

Ainsi $A^2 = A$ et $B^2 = B$. De plus $P_V X = \frac{\langle V, X \rangle}{\|V\|^2} V$: u est la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}((1, a))$ et v la projection orthogonale sur $\text{Vect}((1, 1))$.

La méthode 1 est un calcul immédiat ; la méthode 2 met en évidence la structure (projection orthogonale sur une droite), qui donne aussi directement le rang de u et de v et prépare la partie 2.

Conclusion

$u \circ u = u$ et $v \circ v = v$, donc u et v sont des projecteurs.

Question 2.(a)

Énoncé rectifié : dans le document source, la question affirme que $u \circ v$ est de rang 1 pour tout réel a . C'est faux pour $a = -1$, où $u \circ v$ est l'endomorphisme nul. L'énoncé a été complété pour traiter ce cas.

On détermine les rangs à l'aide des colonnes des matrices.

Rang de u . Les colonnes de A sont

$$\frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{a}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Elles sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et la première est non nulle (sa première coordonnée vaut

$\frac{1}{1+a^2} \neq 0$). Donc $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$.

Rang de v . Les deux colonnes de B sont égales à

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

donc $\text{rg}(v) = 1$.

Rang de $u \circ v$. On calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Donc $AB = c_a M$ avec $c_a = \frac{1+a}{2(1+a^2)}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$.

Les deux colonnes de M sont égales à $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \neq 0$, donc $\text{rg}(M) = 1$.

Si $a \neq -1$, alors $c_a \neq 0$ et $\text{rg}(AB) = \text{rg}(M) = 1$.

Si $a = -1$, alors $c_a = 0$ et $AB = 0 : u \circ v$ est l'endomorphisme nul, de rang 0. On peut l'interpréter : pour $a = -1$,

$$\text{Ker}(u) = \{(x, y) : x - y = 0\} = \text{Vect}((1, 1)) = \text{Im}(v).$$

Conclusion

u et v sont de rang 1 ; $u \circ v$ est de rang 1 si $a \neq -1$, et $u \circ v = 0$ si $a = -1$.

Question 2.(b)

On calcule l'image de x_0 , de colonne $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$:

$$MX_0 = \begin{pmatrix} 1+a \\ a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a)X_0, \quad \text{donc} \quad ABX_0 = c_a(1+a)X_0 = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}X_0.$$

Comme $X_0 \neq 0$ (sa première coordonnée vaut 1), x_0 est un vecteur propre de $u \circ v$, associé à la valeur propre $\lambda_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}$.

Conclusion

pour tout réel a , x_0 est vecteur propre de $u \circ v$ pour la valeur propre λ_a .

Question 2.(c)

Cas $a \neq -1$. D'après 2.(a), $\text{rg}(u \circ v) = 1$, donc par le théorème du rang $\dim \text{Ker}(u \circ v) = 2 - 1 = 1$: $\text{Ker}(u \circ v) \neq \{0\}$ et 0 est valeur propre. Plus précisément $MX = 0$ équivaut à $x + y = 0$, donc l'espace propre associé à 0 est $\text{Vect}((1, -1))$.

De plus $\lambda_a \neq 0$ puisque $a \neq -1$. Ainsi 0 et λ_a sont deux valeurs propres distinctes. Il ne peut y en avoir d'autre : des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, et une famille libre de $\mathbb{R}^2$ a au plus deux éléments.

Cas $a = -1$. On a $u \circ v = 0$, dont la seule valeur propre est 0 ; on remarque que $\lambda_{-1} = 0$.

Conclusion

dans tous les cas, $\text{Sp}(u \circ v) = \left\{ 0, \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \right\}$, ensemble réduit à $\{0\}$ lorsque $a = -1$.

Question 3.(a)

Il suffit de montrer que $0 \leq \lambda_a \leq 1$. D'abord $\lambda_a \geq 0$ comme quotient d'un carré par un réel strictement positif. Ensuite, puisque $2(1 + a^2) > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_a \leq 1 &\iff (1+a)^2 \leq 2(1+a^2) \iff 1+2a+a^2 \leq 2+2a^2 \iff 0 \leq a^2-2a+1 \\ &= (a-1)^2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

Conclusion

les valeurs propres de $u \circ v$, à savoir 0 et λ_a , appartiennent à $[0, 1]$.

Question 3.(b)

On cherche les réels a tels que $(AB)^2 = AB$.

Méthode 1 — Calcul de $(AB)^2$.

On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a)M.$$

Donc :

$$(AB)^2 = c_a^2 M^2 = c_a^2 (1+a)M \quad \text{et} \quad AB = c_a M.$$

Comme $M \neq 0$, on a $(AB)^2 = AB \iff c_a^2(1+a) = c_a \iff c_a(c_a(1+a) - 1) = 0$.

Or $c_a = 0 \iff a = -1$, et

$$c_a(1+a) = 1 \iff \lambda_a = 1 \iff (1+a)^2 = 2(1+a^2) \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1$$

(par le calcul de 3.(a)).

Méthode 2 — Par le spectre.

Si $u \circ v$ est un projecteur p et si x est un vecteur propre associé à λ , alors $p^2(x) = \lambda^2 x$ et $p(x) = \lambda x$, donc $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda \in \{0, 1\}$. En particulier $\lambda_a \in \{0, 1\}$, c'est-à-dire $a = -1$ ($\lambda_a = 0$) ou $a = 1$ ($\lambda_a = 1$, d'après 3.(a)).

Réciproquement, si $a = -1$, $u \circ v = 0$ est un projecteur. Si $a = 1$, alors $u \circ v$ possède deux valeurs propres distinctes 0 et 1 en dimension 2, donc est diagonalisable : $AB = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $(AB)^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = AB$. On peut aussi remarquer que

pour $a = 1$, $A = B$, donc $u \circ v = v \circ v = v$.

La méthode 1 est un calcul direct ; la méthode 2 utilise le fait qu'un projecteur n'a que 0 et 1 pour valeurs propres et réutilise le spectre trouvé en 2.(c), ce qui évite le calcul matriciel.

Conclusion

$u \circ v$ est un projecteur si et seulement si $a \in \{-1, 1\}$.

Partie 2

Dans cette partie, u et v sont des projecteurs symétriques. La base canonique étant orthonormale, leurs matrices sont symétriques : ${}^tA = A$, ${}^tB = B$; ce sont des projecteurs : $A^2 = A$, $B^2 = B$.

Question 4.

Égalité. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\|BX\|^2 = {}^t(BX)(BX) = {}^tX {}^tB BX = {}^tX B^2 X = {}^tX BX = \langle X, BX \rangle = \langle BX, X \rangle,$$

la dernière égalité par symétrie du produit scalaire.

Inégalité.

Méthode 1 — Inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'après l'égalité et Cauchy-Schwarz : $\|BX\|^2 = \langle BX, X \rangle \leq \|BX\| \|X\|$. Si $BX = 0$, l'inégalité $\|BX\| \leq \|X\|$ est claire. Sinon, on divise par $\|BX\| > 0$ et on obtient $\|BX\| \leq \|X\|$.

Méthode 2 — Théorème de Pythagore.

Écrivons $X = BX + (X - BX)$. D'après l'égalité, $\langle BX, X - BX \rangle = \langle BX, X \rangle - \|BX\|^2 = 0$. Par Pythagore :

$$\|X\|^2 = \|BX\|^2 + \|X - BX\|^2 \geq \|BX\|^2,$$

d'où $\|BX\| \leq \|X\|$ par croissance de la racine carrée.

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 montre la géométrie sous-jacente : BX est la projection orthogonale de X , et $X - BX$ lui est orthogonal.

Conclusion

pour tout X , $\|BX\|^2 = \langle BX, X \rangle$ et $\|BX\| \leq \|X\|$.

Question 5.

On a ${}^tC = {}^tB {}^tA {}^tB = BAB = C$. La matrice C est donc une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et même avec une matrice de passage orthogonale).

Conclusion

C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 6.(a)

On a $X \neq 0$ et $CX = \lambda X$. Alors :

$$\|ABX\|^2 = {}^tX {}^tB {}^tA ABX = {}^tX BA^2BX = {}^tX BABX = {}^tX CX = \lambda {}^tXX.$$

Conclusion

$$\|ABX\|^2 = \lambda \|X\|^2.$$

Question 6.(b)

Les valeurs propres de C sont réelles (on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Comme $X \neq 0$, $\|X\|^2 > 0$, et d'après 6.(a) :

$$\lambda = \frac{\|ABX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Conclusion

toute valeur propre de C est un réel positif.

Question 7.(a)

On a $X \neq 0$, $ABX = \mu X$ et $\mu \neq 0$.

On calcule, en utilisant $B^2 = B$:

$$C(BX) = BAB^2X = BABX = B(\mu X) = \mu BX.$$

Il reste à voir que $BX \neq 0$: si $BX = 0$, alors $\mu X = ABX = 0$, ce qui est impossible

puisque $\mu \neq 0$ et $X \neq 0$.

Donc BX est un vecteur propre de C associé à la valeur propre μ . D'après 6.(b), $\mu \geq 0$, et comme $\mu \neq 0$, $\mu > 0$.

Conclusion

BX est vecteur propre de C et $\mu > 0$.

Question 7.(b)

En multipliant $ABX = \mu X$ à gauche par A et en utilisant $A^2 = A : A^2BX = \mu AX$, soit $ABX = \mu AX$.

On a donc $\mu X = ABX = \mu AX$, et comme $\mu \neq 0 : AX = X$.

Conclusion

$ABX = \mu AX$ et $AX = X$.

Question 7.(c)

En utilisant $X = AX$ puis ${}^tA = A$:

$$\langle X, BX \rangle = \langle AX, BX \rangle = {}^tX {}^tA BX = {}^tX ABX = {}^tX(\mu X) = \mu \|X\|^2.$$

Conclusion

$$\langle X, BX \rangle = \mu \|X\|^2.$$

Question 8.

Soit μ une valeur propre de AB .

Si $\mu = 0$, alors $\mu \in [0, 1]$.

Si $\mu \neq 0$, soit X un vecteur propre associé. D'après 7.(a), $\mu > 0$. D'après 7.(c) puis la question 4 :

$$\mu \|X\|^2 = \langle X, BX \rangle = \|BX\|^2 \leq \|X\|^2.$$

Comme $\|X\|^2 > 0$, on obtient $\mu \leq 1$.

Conclusion

$\text{Sp}(AB) \subset [0, 1]$. On retrouve le résultat de la question 3.(a) dans le cas de la partie 1, où A et B sont des matrices de projecteurs symétriques.

EXERCICE 2

Question 1.

Comme $\sqrt{5} > 1$, on a $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$.

Méthode 1 — Vérification directe.

On a $\varphi^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \varphi + 1$, donc $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Comme $\varphi \neq 0$, on a $\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^2 - \frac{-1}{\varphi} - 1 = \frac{1 + \varphi - \varphi^2}{\varphi^2} = 0$.

Les réels $\varphi > 0$ et $\frac{-1}{\varphi} < 0$ sont distincts, et un polynôme non nul de degré 2 a au plus deux racines : ce sont donc exactement les solutions de l'équation.

Méthode 2 — Résolution par le discriminant.

Le discriminant de $x^2 - x - 1$ vaut $1 + 4 = 5 > 0$, donc les solutions sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{\varphi}$.

La méthode 1 se contente de vérifier ; la méthode 2 retrouve les solutions et donne au passage l'expression utile $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1$.

Conclusion

$\varphi > 1$ et les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ sont φ et $-\frac{1}{\varphi}$. On retiendra $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi - \frac{-1}{\varphi} = \varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$.

Question 2.(a)

La fonction f est polynomiale en (x, y) , donc de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Conclusion

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Question 2.(b)

On annule le gradient. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 6x^2 - 6y, \quad \partial_2 f(x, y) = -6x + 6y - 6.$$

Le point (x, y) est critique si et seulement si $y = x^2$ et $y = x + 1$, c'est-à-dire si et seulement si $y = x^2$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

D'après la question 1, $x = \varphi$ ou $x = -\frac{1}{\varphi}$, et alors $y = x^2 = x + 1$.

Pour $x = \varphi$: $y = \varphi + 1$.

Pour $x = -\frac{1}{\varphi}$: $y = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi + 1}$, car $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Conclusion

les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi + 1)$ et $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right)$.

Question 2.(c)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On calcule la hessienne et on détermine le signe de ses valeurs propres. On a $\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 12x$, $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = -6$, $\partial_{2,2}^2 f(x, y) = 6$, donc :

$$\nabla^2 f(x, y) = H_x = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aux deux points critiques, l'abscisse x vérifie $x^2 = x + 1$; on traite les deux points simultanément.

Méthode 1 — Vecteurs propres explicites.

Posons $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x + 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x - 2 \end{pmatrix}$, non nuls. On calcule :

$$H_x Y_1 = \begin{pmatrix} 12x - 6x - 6 \\ -6 + 6x + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 6 \\ 6x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (6x - 6)Y_1 = \begin{pmatrix} 6x - 6 \\ 6x^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 6 \\ 6x \end{pmatrix},$$

en utilisant $6x^2 - 6 = 6(x + 1) - 6 = 6x$. Donc $H_x Y_1 = (6x - 6)Y_1$.

$$H_x Y_2 = \begin{pmatrix} 12x - 6x + 12 \\ -6 + 6x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 12 \\ 6x - 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (6x + 12)Y_2 = \begin{pmatrix} 6x + 12 \\ 6x^2 - 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x + 12 \\ 6x - 18 \end{pmatrix},$$

en utilisant $6x^2 - 24 = 6x + 6 - 24$. Donc $H_x Y_2 = (6x + 12)Y_2$.

Les réels $6x - 6$ et $6x + 12$ sont distincts (leur différence vaut 18) ; ce sont des valeurs propres de H_x , et il n'y en a pas d'autre, car des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre, qui a au plus deux éléments dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\text{Sp}(H_x) = \{6x - 6, 6x + 12\}$.

Au point $(\varphi, \varphi + 1)$: $6\varphi - 6 > 0$ car $\varphi > 1$, et $6\varphi + 12 > 0$. Les deux valeurs propres sont strictement positives : f présente un minimum local strict en ce point.

Au point $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right)$: comme $\varphi > 1$, $x = -\frac{1}{\varphi} \in]-1, 0[$, donc $6x - 6 < 0$ et $6x + 12 > 0$. La hessienne a une valeur propre strictement négative et une strictement positive : ce point est un point selle, f n'y présente pas d'extremum local.

Méthode 2 — Étude de la forme quadratique associée.

Pour $Y = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, on a :

$$q_x(Y) = {}^t Y H_x Y = 12xh^2 - 12hk + 6k^2 = 6(k - h)^2 + (12x - 6)h^2.$$

La matrice H_x est symétrique réelle ; par le théorème spectral, il existe une base orthonormale (V_1, V_2) de vecteurs propres, associés à des valeurs propres réelles λ_1, λ_2 . Si $Y = c_1 V_1 + c_2 V_2$, alors $q_x(Y) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2$, et $q_x(V_i) = \lambda_i$.

Au point $(\varphi, \varphi + 1) : 12\varphi - 6 > 0$. Si $Y \neq 0$ et $q_\varphi(Y) = 0$, alors $h = 0$ et $k = h = 0$, ce qui est absurde ; donc $q_\varphi(Y) > 0$ pour tout $Y \neq 0$. En particulier $\lambda_i = q_\varphi(V_i) > 0$: les deux valeurs propres sont strictement positives, d'où un minimum local strict.

Au point $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right)$: avec $x = -\frac{1}{\varphi}$, on a $q_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12x < 0$ et $q_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 > 0$. Si

les deux valeurs propres étaient positives ou nulles, q_x serait positive ; si elles étaient négatives ou nulles, q_x serait négative. Donc H_x a une valeur propre strictement négative et une strictement positive : point selle.

La méthode 1 donne les valeurs propres exactes, la méthode 2 n'en donne que les signes mais s'applique sans deviner de vecteurs propres ; elle est utile lorsque les valeurs propres ne sont pas simples à expliciter.

Compléments. En utilisant $y = x^2$, $x^3 = 2x + 1$ et $x^4 = 3x + 2$, on obtient $f(\varphi, \varphi + 1) = -5\varphi - 4$. Ce minimum local n'est pas global, puisque $f(x, 0) = 2x^3$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Conclusion

f admet en $(\varphi, \varphi + 1)$ un minimum local strict (non global), et $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right)$ est un point selle.

Question 3.

Méthode 1 — Récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n) : u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Initialisation : $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, donc $u_0 u_2 - u_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Avec $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}$ puis $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$:

$$u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 = u_{n+1}u_{n+2} + u_{n+1}^2 - u_{n+2}^2 = u_{n+1}^2 - u_{n+2}(u_{n+2} - u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n.$$

Par hypothèse de récurrence, ce terme vaut $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} : \mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Méthode 2 — Par la forme explicite de la question 4.(b).

La question 4.(b) est établie sans utiliser la question 3 : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ avec

$\psi = \frac{-1}{\varphi}$, donc $\varphi\psi = -1$ et $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Alors :

$$5(u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2) = (\varphi^n - \psi^n)(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) - (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})^2 = -\varphi^n \psi^{n+2} - \psi^n \varphi^{n+2} + 2\varphi^{n+1} \psi^{n+1}.$$

En factorisant par $(\varphi\psi)^n = (-1)^n$:

$$5(u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2) = (-1)^n(-\psi^2 - \varphi^2 + 2\varphi\psi) = -(-1)^n(\varphi - \psi)^2 = 5(-1)^{n+1}.$$

La récurrence est la méthode attendue à ce stade ; la seconde méthode montre comment une formule explicite transforme une identité sur une suite récurrente en un calcul algébrique.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Question 4.(a)

Code adapté en Python.

On maintient l'invariant suivant : à la fin de l'itération d'indice k , v contient u_{k-1} et w contient u_k . Avant la boucle, $v = u_0$ et $w = u_1$. À chaque itération, on calcule $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ dans une variable auxiliaire z , puis on décale.

Python

```
def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2, n + 1):
        z = v + w
        v = w
        w = z
    u = w
    return u
```

La boucle `range(2, n + 1)` parcourt $k = 2, \dots, n$ (borne supérieure exclue). À la sortie, $w = u_n$. La variable auxiliaire z est nécessaire : écrire $v = w$ avant de calculer la somme ferait perdre u_{k-2} .

Code exécuté : les appels `suite(n)` pour $n = 2, \dots, 11$ renvoient 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, conformément à la définition.

Question 4.(b)

Méthode 1 — Théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

La suite vérifie $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, d'équation caractéristique $r^2 = r + 1$, qui admet d'après la question 1 deux racines réelles distinctes φ et $\frac{-1}{\varphi}$. D'après le cours, il existe des réels λ, μ (uniques) tels que $u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$ pour tout n .

Les conditions initiales donnent : $u_0 = 0 : \lambda + \mu = 0 ; u_1 = 1 : \lambda\varphi - \frac{\mu}{\varphi} = 1$. Avec $\mu = -\lambda : \lambda\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$, et $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ (question 1). Donc $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Méthode 2 — Vérification et récurrence double.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n \right)$. On a $w_0 = 0$ et

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi + \frac{1}{\varphi} \right) = 1$. Pour toute racine r de $x^2 - x - 1$,

$r^{n+2} = r^n \cdot r^2 = r^n(r+1) = r^{n+1} + r^n$; donc $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$.

Par récurrence double, $u_n = w_n$ pour tout n : c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, et si $u_n = w_n$ et $u_{n+1} = w_{n+1}$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = w_{n+1} + w_n = w_{n+2}$.

La méthode 1 applique le théorème du cours et détermine les constantes ; la méthode 2 est autonome, utile pour contrôler une formule déjà connue.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n, \text{ soit } \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Question 4.(c)

D'abord, $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$: $u_1 = u_2 = 1 > 0$, et si $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n > 0$ (récurrence double). Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est donc défini pour $n \geq 1$.

Posons $\rho = -\frac{1}{\varphi^2}$. Comme $\varphi > 1$, $|\rho| < 1$, donc $\rho^n \rightarrow 0$. En divisant numérateur et dénominateur par $\varphi^n \neq 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^{n+1}}{\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n} = \varphi \cdot \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho^n},$$

où $1 - \rho^n = \frac{\sqrt{5} u_n}{\varphi^n} > 0$. Par opérations sur les limites, $\frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho^n} \rightarrow 1$.

Conclusion

la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers φ .

Question 5.(a)

Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, donc la série est à termes strictement positifs.

Méthode 1 — Par un équivalent.

D'après 4.(b), $\sqrt{5} u_n = \varphi^n (1 - \rho^n)$ avec $\rho^n \rightarrow 0$, donc $u_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{5}{\varphi^{2n+1}} = \frac{5}{\varphi} \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n.$$

La série géométrique de raison $\frac{1}{\varphi^2} \in]0, 1[$ converge. Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{1}{u_n u_{n+1}}$$

converge.

Méthode 2 — Par une minoration de u_n .

Montrons par récurrence double que $u_n \geq \varphi^{n-2}$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1$: $u_1 = 1 \geq \frac{1}{\varphi}$. Pour $n = 2$: $u_2 = 1 = \varphi^0$. Si l'inégalité est vraie aux rangs n et $n + 1$, alors :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = \varphi^{n-2}(\varphi + 1) = \varphi^{n-2}\varphi^2 = \varphi^n.$$

Donc pour $n \geq 1$: $0 < \frac{1}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{\varphi^{n-2} \varphi^{n-1}} = \varphi^3 \left(\frac{1}{\varphi^2} \right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.

La méthode 1 utilise la formule explicite ; la méthode 2 n'utilise que la relation de récurrence et $\varphi^2 = \varphi + 1$, ce qui la rend indépendante de la question 4.

Conclusion

la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

Question 5.(b)

Pour $k \geq 1$, $\left| \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} \right| = \frac{1}{u_k u_{k+1}}$. D'après 5.(a), la série

$$\sum \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$$

est absolument convergente, donc convergente. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est la suite de ses sommes partielles.

Conclusion

la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.

Question 5.(c)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}$, avec $u_{n+1} u_{n+2} > 0$. D'après la question 3, $(-1)^{n+1} = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$, donc :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

Question 5.(d)

Posons $t_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ pour $n \geq 1$. D'après 5.(c), $S_{j+1} - S_j = t_j - t_{j+1}$. Pour $n \geq 2$, par télescopage :

$$S_n - S_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (S_{j+1} - S_j) = \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - t_{j+1}) = t_1 - t_n.$$

Or $S_1 = \frac{-1}{u_1 u_2} = -1$ et $t_1 = \frac{u_1}{u_2} = 1$. Donc $S_n = -t_n = -\frac{u_n}{u_{n+1}}$, formule encore vraie pour $n = 1$.

D'après 4.(c), $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \varphi \neq 0$, donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{\varphi}$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = \lim S_n = -\frac{1}{\varphi}.$$

Finalement

$$1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi.$$

Conclusion

$$\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

PROBLÈME

Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

Dans tout le problème, N étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $(N = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc la série

$$\sum P(N = k)$$

converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1.$$

Question 1.(a)

On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$: $\frac{b^0}{0!}P(N = 0) = P(N = 0)$. Si la formule est vraie au rang k , la relation de Panjer avec $a = 0$ donne :

$$P(N = k + 1) = \frac{b}{k + 1}P(N = k) = \frac{b}{k + 1} \cdot \frac{b^k}{k!}P(N = 0) = \frac{b^{k+1}}{(k + 1)!}P(N = 0).$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = \frac{b^k}{k!}P(N = 0).$$

Question 1.(b)

D'après le rappel ci-dessus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1.$$

Par la série exponentielle, et d'après 1.(a) :

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} P(N=0) = e^b P(N=0),$$

donc $P(N=0) = e^{-b}$ et $P(N=k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $b > 0$ (et l'on a bien $P(N=0) = e^{-b} \neq 1$).

Conclusion

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1,$$

N suit la loi de Poisson de paramètre b , et $E(N) = V(N) = b$.

Question 2.(a)

Pour $k \geq 1$, la relation s'écrit $P(N=k) = a \left(1 - \frac{2}{k}\right) P(N=k-1)$.

Pour $k=2$, le facteur $1 - \frac{2}{2}$ est nul, donc $P(N=2) = 0$. Si $P(N=k) = 0$ pour un $k \geq 2$, alors $P(N=k+1) = a \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) \times 0 = 0$.

Conclusion

par récurrence, $P(N=k) = 0$ pour tout $k \geq 2$.

Question 2.(b)

D'après 2.(a), $P(N=0) + P(N=1) = 1$. La relation pour $k=1$ donne $P(N=1) = (a-2a)P(N=0) = -aP(N=0)$. Donc $(1-a)P(N=0) = 1$, soit :

$$P(N=0) = \frac{1}{1-a} \quad \text{et} \quad P(N=1) = \frac{-a}{1-a}.$$

Comme $a < 0$, on a $-a > 0$ et $1 - a > -a > 0$, donc $\frac{-a}{1-a} \in]0, 1[$. La variable N prend presque sûrement ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

Conclusion

N suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{-a}{1-a}$.

Question 3.(a)

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} p \cdot p^{k-1} \frac{(1-p)^{n-k+1}}{1-p} = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \\ &\times P(Z = k-1), \end{aligned}$$

ce qui a un sens car $1-p \neq 0$.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z = k-1)$.

Question 3.(b)

On écrit $\frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{p}{1-p} \left(\frac{n+1}{k} - 1 \right) = a + \frac{b}{k}$ avec :

$$a = -\frac{p}{1-p}, \quad b = \frac{(n+1)p}{1-p}.$$

On vérifie toutes les conditions de la définition.

$$a < 0 < 1.$$

$$P(Z = 0) = (1 - p)^n \neq 1, \text{ car } p \in]0, 1[\text{ et } n \geq 1.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la relation $P(Z = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(Z = k - 1)$ résulte de 3.(a).

Pour $k = n + 1$: $a + \frac{b}{n + 1} = -\frac{p}{1 - p} + \frac{p}{1 - p} = 0$, donc le membre de droite est nul, comme $P(Z = n + 1)$.

Pour $k \geq n + 2$: $P(Z = k) = 0$ et $P(Z = k - 1) = 0$, donc la relation est vérifiée.

Conclusion

$$Z \text{ vérifie une relation de Panjer avec } a = -\frac{p}{1 - p} \text{ et } b = \frac{(n + 1)p}{1 - p}.$$

Question 4.(a)

La relation pour $k = 1$ donne $P(N = 1) = (a + b)P(N = 0)$.

Montrons que $P(N = 0) > 0$. Si $P(N = 0) = 0$, la relation de Panjer donne par récurrence $P(N = k) = 0$ pour tout k , ce qui contredit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1.$$

$$\text{Donc } a + b = \frac{P(N = 1)}{P(N = 0)} \geq 0.$$

Remarque utile pour la suite : $a + b \neq 0$. En effet, si $a + b = 0$, alors $P(N = 1) = 0$ et, par récurrence, $P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k - 1) = 0$ pour tout $k \geq 1$; alors $P(N = 0) = 1$, ce qui est exclu. Ainsi $a + b > 0$.

Conclusion

$$P(N = 1) = (a + b)P(N = 0) \text{ et } a + b \geq 0 \text{ (et même } a + b > 0).$$

Question 4.(b)

Pour $k \geq 1$, la relation s'écrit $kP(N = k) = (ak + b)P(N = k - 1)$. En sommant pour k de 1 à m puis en posant $j = k - 1$:

$$\sum_{k=1}^m kP(N = k) = \sum_{k=1}^m (ak + b)P(N = k - 1) = \sum_{j=0}^{m-1} (a(j + 1) + b)P(N = j).$$

Par linéarité de la somme finie, on obtient la formule.

Conclusion

$$\sum_{k=1}^m kP(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1)P(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N = k).$$

Question 4.(c)

Notations. Pour $m \geq 0$, posons

$$T_m = \sum_{k=1}^m kP(N = k)$$

(avec $T_0 = 0$) et

$$F_m = \sum_{k=0}^m P(N = k) \in [0, 1].$$

Une relation exacte. Comme

$$\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(N=k) = T_{m-1} + F_{m-1},$$

la question 4.(b) donne $T_m = aT_{m-1} + (a+b)F_{m-1}$. En remplaçant $T_{m-1} = T_m - mP(N=m)$:

$$(1-a)T_m = (a+b)F_{m-1} - amP(N=m).$$

Majoration. On distingue deux cas.

Si $0 \leq a < 1$: $-amP(N=m) \leq 0$, $a+b \geq 0$ et $F_{m-1} \leq 1$, donc $(1-a)T_m \leq a+b$.

Si $a < 0$: d'après 4.(a), $b \geq -a > 0$. Soit k_0 un entier tel que $k_0 > -\frac{b}{a}$ (par exemple $k_0 = \lfloor -\frac{b}{a} \rfloor + 1$). Alors $\frac{b}{k_0} < -a$, donc $a + \frac{b}{k_0} < 0$. L'égalité

$P(N=k_0) = \left(a + \frac{b}{k_0}\right) P(N=k_0-1)$ montre que $P(N=k_0) \leq 0$, donc $P(N=k_0) = 0$, puis par récurrence $P(N=k) = 0$ pour tout $k \geq k_0$. Par conséquent $T_m = T_{k_0}$ pour tout $m \geq k_0$: la suite (T_m) est stationnaire, donc majorée, et il en est de même de $((1-a)T_m)$.

Dans les deux cas, la suite $((1-a)T_m)_{m \geq 1}$ est majorée.

Existence de l'espérance. Comme $1-a > 0$, (T_m) est majorée ; elle est croissante car ses termes ajoutés $kP(N=k)$ sont positifs. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. La série

$$\sum kP(N=k),$$

à termes positifs, converge donc absolument : N admet une espérance, et $E(N) = \lim T_m$.

Valeur. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, donc $mP(N=m) \rightarrow 0$. De plus $F_{m-1} \rightarrow 1$. En passant à la limite dans la relation exacte : $(1-a)E(N) = a+b$.

Conclusion

N admet une espérance et $E(N) = \frac{a+b}{1-a}$.

Question 4.(d)

Notons

$$U_m = \sum_{k=1}^m k^2 P(N = k)$$

pour $m \geq 0$ (avec $U_0 = 0$).

Une relation exacte. En multipliant par k la relation $kP(N = k) = (ak + b)P(N = k - 1)$, puis en posant $j = k - 1$:

$$U_m = \sum_{k=1}^m k(ak + b)P(N = k - 1) = a \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)^2 P(N = j) + b \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)P(N = j).$$

Comme

$$\sum_{j=0}^{m-1} (j+1)^2 P(N = j) = U_{m-1} + 2T_{m-1} + F_{m-1}$$

et

$$\sum_{j=0}^{m-1} (j+1)P(N = j) = T_{m-1} + F_{m-1} :$$

$$U_m = aU_{m-1} + (2a + b)T_{m-1} + (a + b)F_{m-1}.$$

En remplaçant $U_{m-1} = U_m - m^2 P(N = m)$:

$$(1-a)U_m = (a+b)F_{m-1} + (2a+b)T_{m-1} - am^2P(N=m).$$

Majoration. Si $0 \leq a < 1$: $-am^2P(N=m) \leq 0$ et $0 \leq T_{m-1} \leq E(N)$, donc $(1-a)U_m \leq (a+b) + |2a+b|E(N)$. Si $a < 0$: comme en 4.(c), $P(N=k) = 0$ pour $k \geq k_0$, donc (U_m) est stationnaire.

Dans les deux cas, (U_m) est croissante et majorée (car $1-a > 0$), donc converge : la série

$$\sum k^2P(N=k),$$

à termes positifs, converge. Par le théorème de transfert, N admet un moment d'ordre 2 et $E(N^2) = \lim U_m$.

Valeur. On a $m^2P(N=m) \rightarrow 0$ (terme général d'une série convergente), $T_{m-1} \rightarrow E(N)$ et $F_{m-1} \rightarrow 1$. Donc :

$$(1-a)E(N^2) = (a+b) + (2a+b)\frac{a+b}{1-a} = \frac{(a+b)(1-a+2a+b)}{1-a} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{1-a}.$$

Conclusion

$$N \text{ admet un moment d'ordre 2 et } E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

Question 4.(e)

Comme N admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance, et par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{(a+b)(a+b+1) - (a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Conclusion

$$V(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Question 4.(f)

Supposons $E(N) = V(N)$. Alors $\frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$. Comme $a+b > 0$ (question 4.(a)), on peut simplifier : $1-a = 1$, soit $a = 0$. Alors $b = a+b > 0$, et d'après la question 1, N suit la loi de Poisson de paramètre b .

Réciproquement, si N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$E(N) = V(N) = \lambda$. (Une telle loi vérifie d'ailleurs la relation de Panjer avec $a = 0$ et $b = \lambda$, puisque $P(N = k) = \frac{\lambda}{k} P(N = k-1)$ et $P(N = 0) = e^{-\lambda} \neq 1$.)

Conclusion

$E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie 2 - Fonction génératrice

Question 5.

Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout k , $0 \leq p_k x^k \leq p_k$, et la série

$$\sum p_k$$

converge (de somme 1). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum p_k x^k$$

converge.

Conclusion

pour tout $x \in [0, 1]$, la série

$$\sum_{k \geq 0} p_k x^k$$

converge.

Question 6.

Pour $x \in [0, 1]$, $1 - ax \geq 1 - a > 0$ car $0 < a < 1$. La fonction $x \mapsto (1 - ax)^\beta = \exp(\beta \ln(1 - ax))$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $\left] -\infty, \frac{1}{a} \right[$, qui contient $[0, 1]$, de dérivée $x \mapsto -a\beta(1 - ax)^{\beta-1}$.

On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 0$, $f(x) = 0! p_0 (1 - ax)^\alpha$. Supposons $f^{(k)}(x) = k! p_k (1 - ax)^{\alpha-k}$. Alors :

$$f^{(k+1)}(x) = k! p_k \cdot (-a)(\alpha - k)(1 - ax)^{\alpha-k-1}.$$

Or $-a(\alpha - k) = (a + b) + ak = a(k + 1) + b$, et la relation de Panjer donne $(k + 1)p_{k+1} = (a(k + 1) + b)p_k$. Donc $k! p_k (-a)(\alpha - k) = k! (k + 1)p_{k+1} = (k + 1)! p_{k+1}$.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $f^{(k)}(x) = k! \times p_k (1 - ax)^{\alpha-k}$.

Question 7.(a)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle contenant 0 et x . La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0 donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

D'après la question 6, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = p_k$ et

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} p_{n+1} (1-at)^{\alpha-n-1} = (n+1)p_{n+1} (1-at)^{\alpha-n-1}.$$

Conclusion

$$f(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n+1)p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt.$$

Question 7.(b)

Soit $t \in [0, x]$. On a $1-at > 0$ et $x-t \geq 0$. De plus

$$(1-at) - (x-t) = (1-x) + t(1-a) \geq 0. \text{ Donc } 0 \leq \frac{x-t}{1-at} \leq 1.$$

On écrit alors $(1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n = (1-at)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1-at} \right)^n$, d'où :

$$0 \leq (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n \leq (1-at)^{\alpha-1}.$$

Les fonctions sont continues sur $[0, x]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant ($x \geq 0$).

Par positivité et croissance de l'intégrale :

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt.$$

Question 7.(c)

Posons $J(x) = \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt$, réel indépendant de n . D'après 7.(a) et 7.(b), pour tout n :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n p_k x^k \leq (n+1)p_{n+1}J(x).$$

Les hypothèses de la partie 2 entraînent que N vérifie une relation de Panjer, donc, d'après 4.(c), la série

$$\sum k p_k$$

converge et son terme général tend vers 0 : $(n+1)p_{n+1} \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$\sum_{k=0}^n p_k x^k \rightarrow f(x),$$

c'est-à-dire $G(x) = f(x)$.

Calcul de p_0 . On a

$$G(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

et $G(1) = p_0(1-a)^\alpha$, donc :

$$p_0 = (1-a)^{-\alpha} = (1-a)^{\frac{a+b}{a}}.$$

Calcul de $G'(1)$. La fonction G coïncide sur $[0, 1]$ avec f , dérivable sur $\left] -\infty, \frac{1}{a} \right[\supset [0, 1]$. La dérivée (à gauche) de G en 1 est donc $f'(1)$, et d'après la question 6 avec $k=1$, puis $p_1 = (a+b)p_0$:

$$G'(1) = f'(1) = p_1(1-a)^{\alpha-1} = (a+b)(1-a)^{-\alpha}(1-a)^{\alpha-1} = \frac{a+b}{1-a} = E(N).$$

Conclusion

$$G(x) = p_0(1 - ax)^\alpha \text{ pour tout } x \in [0, 1], p_0 = (1 - a)^{-\alpha}, \text{ et } G'(1) = E(N).$$

Remarque. La démonstration des questions 6 et 7 n'utilise que $0 < a < 1$ (pour avoir $1 - at > 0$), la relation de Panjer et l'existence de $E(N)$; l'hypothèse $\frac{b}{a} > 0$ n'y intervient pas. Les résultats de cette partie restent donc vrais pour toute variable vérifiant une relation de Panjer avec $a \in]0, 1[$.

Partie 3 - Formule de récursivité

Interprétation de l'hypothèse d'indépendance : pour tout $n \geq 1$, les variables $N, X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions, toute fonction de $(X_1, \dots, X_n)$, par exemple $S_n = X_1 + \dots + X_n$, est indépendante de N . On note $q_0 = P(X_1 = 0)$, conformément à la question 11.

Question 9.

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$P(S = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((N = n) \cap (S = 0)).$$

Pour $n = 0$: $(N = 0) \subset (S = 0)$, donc le terme vaut p_0 .

Pour $n \geq 1$: sur $(N = n)$, $S = X_1 + \dots + X_n$, somme de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, nulle si et seulement si chaque X_k est nulle. Par indépendance mutuelle :

$$P((N = n) \cap (S = 0)) = P((N = n) \cap (X_1 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)) = p_n q_0^n.$$

Ainsi

$$P(S = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n q_0^n = G(q_0),$$

avec $q_0 \in [0, 1]$. D'après la partie 2 (valable pour $a \in]0, 1[$, voir la remarque finale de 7.(c)) :

$$P(S = 0) = p_0(1 - aq_0)^\alpha = \left(\frac{1 - aq_0}{1 - a} \right)^\alpha, \quad \alpha = -\frac{a + b}{a}.$$

Conclusion

$$P(S = 0) = \left(\frac{1 - aq_0}{1 - a} \right)^{-\frac{a + b}{a}}.$$

Question 10.(a)

Le calcul de la question 9 jusqu'à

$$P(S = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n q_0^n$$

n'utilise pas la loi de N . Avec $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et la série exponentielle :

$$P(S = 0) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q_0)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda q_0}.$$

Conclusion

$$P(S = 0) = e^{-\lambda(1-q_0)}.$$

Question 10.(b)

Code adapté en Python.

La boucle effectue n itérations (`range(n)` parcourt $0, \dots, n - 1$). À chaque itération, `np.random.random()` renvoie une réalisation d'une loi uniforme sur $[0, 1[$, et le test `np.random.random() < 1/2` est réalisé avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres

itérations. La variable y compte le nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$.

Conclusion

`simulX(n)` simule la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Dans ce cas, $q_0 = \frac{1}{2^n}$.

Question 10.(c)

Code adapté en Python.

On simule N , puis on additionne N réalisations indépendantes de la loi simulée par `simulX`. Si $N = 0$, la boucle `range(1, N + 1)` est vide et la fonction renvoie 0, conformément à la définition de S .

Python

```
import numpy as np

def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(n):
        if np.random.random() < 1/2:
            y = y + 1
    return y

def simulS(lam, n):
    N = np.random.poisson(lam)
    s = 0
    for k in range(1, N + 1):
        s = s + simulX(n)
    return s
```

Code exécuté. Avec $\lambda = 2$ et $n = 3$, sur 100 000 simulations, la fréquence de l'événement ($S = 0$) vaut environ 0,173, proche de la valeur théorique $e^{-2(1-1/8)} \approx 0,174$ de la question 10.(a). Il s'agit d'une observation expérimentale, pas d'une preuve.

Question 11.(a)

Question adaptée au programme actuel : l'espérance conditionnelle à l'événement $(S_{n+1} = k)$ n'est définie que si cet événement est de probabilité non nulle ; cette hypothèse a été ajoutée.

Notons $A = (S_{n+1} = k)$, avec $P(A) > 0$. Comme les X_l sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, sur A on a $0 \leq X_i \leq S_{n+1} = k$. Pour la probabilité P_A , X_i prend donc presque sûrement un nombre fini de valeurs ; son espérance conditionnelle existe et :

$$E(X_i | A) = \sum_{j=0}^k j P_A(X_i = j) = \frac{1}{P(A)} \sum_{j=0}^k j P((X_i = j) \cap A).$$

Étape 1 : un lemme sur les sommes. Soient $Y_1, \dots, Y_m$ des variables mutuellement indépendantes de même loi que X_1 . Alors $Y_1 + \dots + Y_m$ a même loi que S_m . En effet, raisonnons par récurrence sur m (le cas $m = 0$ est clair). Si $T_m = Y_1 + \dots + Y_m$ a même loi que S_m , alors pour $s \in \mathbb{N}$, par le système complet $(Y_{m+1} = j)_j$ et l'indépendance de Y_{m+1} et T_m (lemme des coalitions) :

$$P(T_m + Y_{m+1} = s) = \sum_{j=0}^s q_j P(T_m = s - j) = \sum_{j=0}^s q_j P(S_m = s - j) = P(S_m + X_{m+1} = s),$$

la dernière égalité par le même calcul appliqué à S_m et X_{m+1} .

Étape 2 : la loi de (X_i, S_{n+1}) ne dépend pas de i . Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et

$$R_i = \sum_{l \neq i} X_l.$$

Par le lemme des coalitions, X_i et R_i sont indépendantes, et d'après l'étape 1, R_i a même loi que S_n . Donc, pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$P((X_i = j) \cap A) = P((X_i = j) \cap (R_i = k - j)) = q_j P(S_n = k - j),$$

quantité indépendante de i . Par conséquent $E(X_i | A)$ ne dépend pas de i .

Étape 3 : somme. Par linéarité de l'espérance pour la probabilité P_A :

$$\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | A) = E(S_{n+1} | A) = k,$$

car $S_{n+1} = k$ sur A . Les $n + 1$ termes étant égaux, chacun vaut $\frac{k}{n+1}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

Question 11.(b)

Question adaptée au programme actuel : la probabilité conditionnelle $P_{[S_{n+1}=k]}$ suppose $P(S_{n+1} = k) \neq 0$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, puis en remarquant que

$$(X_{n+1} = j) \cap (S_{n+1} = k) = (X_{n+1} = j) \cap (S_n = k - j) :$$

$$P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = P((X_{n+1} = j) \cap (S_n = k - j)) = q_j P(S_n = k - j),$$

la dernière égalité car X_{n+1} est indépendante de S_n (lemme des coalitions ; pour $n = 0$, $S_0 = 0$ est constante, donc indépendante de X_1).

Conclusion

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).$$

Question 11.(c)

Question adaptée au programme actuel : le cas $P(S_{n+1} = k) = 0$, où les questions 11.(a) et 11.(b) ne s'appliquent pas, est traité à part.

Cas $P(S_{n+1} = k) \neq 0$. Notons $A = (S_{n+1} = k)$. D'après 11.(a) avec $i = n + 1$ et 11.(b) :

$$\sum_{j=0}^k j q_j P(S_n = k - j) = P(A) \sum_{j=0}^k j P_A(X_{n+1} = j) = P(A) E(X_{n+1} | A) = \frac{k}{n+1} P(A).$$

De plus, X_{n+1} étant à valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$ sur A , la formule des probabilités totales et 11.(b) donnent :

$$\sum_{j=0}^k q_j P(S_n = k - j) = \sum_{j=0}^k P((X_{n+1} = j) \cap A) = P(A).$$

Par linéarité :

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) q_j P(S_n = k - j) = aP(A) + \frac{b}{k} \cdot \frac{k}{n+1} P(A) = \left(a + \frac{b}{n+1} \right) P(A).$$

Cas $P(S_{n+1} = k) = 0$. Le membre de droite est nul. Pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, par indépendance de X_{n+1} et S_n :

$$0 \leq q_j P(S_n = k - j) = P((X_{n+1} = j) \cap (S_n = k - j)) \leq P(S_{n+1} = k) = 0.$$

Tous les termes du membre de gauche sont donc nuls, et l'égalité est encore vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1} \right) P(S_{n+1} = k).$$

Question 12.(a)

Soit $m = k - j \in \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales avec le système complet $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série ci-dessous converge et :

$$P(S = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((N = n) \cap (S = m)).$$

Sur $(N = n)$, on a $S = S_n$ (pour $n = 0$, $S = 0 = S_0$). Donc

$$P((N = n) \cap (S = m)) = P((N = n) \cap (S_n = m)) = p_n P(S_n = m),$$

par indépendance de N et S_n (lemme des coalitions ; pour $n = 0$, S_0 est constante).

Conclusion

pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

Question 12.(b)

D'après 12.(a), chaque série

$$\sum_n p_n P(S_n = k - j)$$

converge. Une combinaison linéaire finie de séries convergentes converge, et sa somme est la combinaison linéaire des sommes. Donc :

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j).$$

D'après 11.(c), la somme intérieure vaut $\left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k)$, et par la relation de Panjer, $\left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n = p_{n+1}$.

Conclusion

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

Question 12.(c)

D'après 12.(a) avec $j = 0$:

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k).$$

Le terme d'indice $n = 0$ est nul, car $S_0 = 0$ et $k \geq 1$. En réindexant la série convergente :

$$P(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n P(S_n = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

Conclusion

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

Question 12.(d)

D'après 12.(b) et 12.(c), en isolant le terme $j = 0$:

$$P(S = k) = a q_0 P(S = k) + \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).$$

Montrons que $1 - aq_0 > 0$. On a $q_0 \in [0, 1]$. Si $a \leq 0$, $1 - aq_0 \geq 1$. Si $0 < a < 1$, $aq_0 \leq a < 1$. On peut donc diviser par $1 - aq_0$.

Conclusion

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k} \right) q_j P(S = k - j).$$

Cette formule permet de calculer de proche en proche la loi de S à partir de $P(S = 0)$. Contrôle numérique effectué : pour N de loi de Poisson ou binomiale et X_1 de loi binomiale, les valeurs obtenues par la récurrence coïncident avec celles calculées directement par la question 12.(a). Ce contrôle ne remplace pas la démonstration.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2.(a) : énoncé rectifié. Le document source affirme que $u \circ v$ est de rang 1 pour tout a ; c'est faux pour $a = -1$, où $u \circ v = 0$. La question demande désormais le rang de $u \circ v$ pour $a \neq -1$ et la détermination de $u \circ v$ pour $a = -1$; les questions 2.(c) et 3.(b) en tiennent compte.

Exercice 2, question 4.(a) : code adapté en Python. La fonction Scilab est remplacée par une fonction Python de même structure, avec les mêmes blancs à compléter.

Problème, question 10.(b) : code adapté en Python. Le tirage uniforme sur $[0, 1[$ est réalisé par `np.random.random()` et la boucle porte sur `range(n)`.

Problème, question 10.(c) : code adapté en Python. La commande Scilab de simulation de la loi de Poisson est remplacée par `np.random.poisson(lam)` ; le paramètre `lambda`, mot réservé en Python, est renommé `lam`.

Problème, questions 11.(a) et 11.(b) : ajout de l'hypothèse

$P(S_{n+1} = k) \neq 0$, nécessaire pour définir l'espérance et la probabilité conditionnelles à l'événement $(S_{n+1} = k)$.

Problème, question 11.(c) : ajout de l'indication de traiter à part le cas $P(S_{n+1} = k) = 0$, afin que la formule soit établie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, comme l'exige la question 12.