



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2016

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on note $\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t}$ pour $t > 0$, de sorte que $u_n = (-1)^n \varphi(n)$ pour tout $n \geq 1$, et on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

de sorte que $w_n = H_n - \ln(n)$.

Question 1(a)

Il s'agit de rappeler deux développements limités usuels du cours.

Lorsque x tend vers 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

Conclusion

ce sont les deux développements limités à l'ordre 2 demandés.

Question 1(b)

On écrit $w_{n+1} - w_n$ comme une expression en $\frac{1}{n}$, puis on utilise les développements limités de la question 1(a) avec $x = \frac{1}{n}$, qui tend vers 0.

Pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \\ &\quad - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'une part, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, la question 1(a) donne

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'autre part, toujours par la question 1(a) :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par différence :

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $\frac{w_{n+1} - w_n}{-\frac{1}{2n^2}} = 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

Conclusion

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Question 1(c)

On applique le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs à la série de terme général $w_n - w_{n+1}$, puis on utilise le caractère télescopique des sommes partielles.

Posons $d_n = w_n - w_{n+1}$ pour $n \geq 1$. D'après la question 1(b), $d_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Comme

$\frac{d_n}{\frac{1}{2n^2}} \rightarrow 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $d_n > 0$: la série

$$\sum d_n$$

est à termes positifs à partir du rang n_0 .

La série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge, et il en est de même de

$$\sum \frac{1}{2n^2}$$

par linéarité.

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs (à partir d'un certain rang), la série

$$\sum d_n$$

converge, donc la série

$$\sum (w_{n+1} - w_n) = \sum (-d_n)$$

converge aussi.

Pour $n \geq 2$, la somme partielle est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_1$$

Le membre de gauche admet une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$ (la somme de la série),

donc

$$w_n = w_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k)$$

admet une limite finie.

Conclusion

la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge et la suite (w_n) converge vers un réel noté γ .

Question 2

On étudie le signe de la dérivée, puis les limites aux bornes par opérations et croissances comparées.

La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $t > 0$:

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln(t)}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Comme $t^2 > 0$, $\varphi'(t)$ a le signe de $1 - \ln(t)$: $\varphi'(t) > 0$ si $0 < t < e$, $\varphi'(e) = 0$ et $\varphi'(t) < 0$ si $t > e$. Donc φ est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, avec $\varphi(e) = \frac{1}{e}$.

Limites : en 0^+ , $\ln(t) \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{t} \rightarrow +\infty$, donc $\varphi(t) = \ln(t) \cdot \frac{1}{t} \rightarrow -\infty$. En $+\infty$, par croissances comparées, $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$.

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		+	0	−	
$\varphi(t)$	$-\infty$	croissante	$\frac{1}{e}$	décroissante	0

Conclusion

φ croît strictement de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$ sur $]0, e]$, puis décroît strictement de $\frac{1}{e}$ vers 0 sur $[e, +\infty[$.

Question 3(a)

On vérifie les trois conditions de la définition de suites adjacentes : une suite croissante, une suite décroissante et une différence qui tend vers 0. L'outil essentiel est la décroissance de φ sur $[e, +\infty[$ et l'inégalité $e < 3$.

Soit $n \geq 2$.

Monotonie de (S_{2n}) :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = -\varphi(2n+1) + \varphi(2n+2)$$

Comme $e < 3 \leq 2n+1 < 2n+2$ et que φ est décroissante sur $[e, +\infty[$, on a $\varphi(2n+2) \leq \varphi(2n+1)$, donc $S_{2n+2} - S_{2n} \leq 0$: la suite $(S_{2n})_{n \geq 2}$ est décroissante.

Monotonie de (S_{2n+1}) :

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+3)$$

Comme $e < 2n+2 < 2n+3$, on a $\varphi(2n+3) \leq \varphi(2n+2)$, donc $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$: la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ est croissante.

Différence :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\varphi(2n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

car $\varphi(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$ (question 2) et $2n+1 \rightarrow +\infty$.

Conclusion

les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

Question 3(b)

Pour la convergence, on utilise le théorème des suites adjacentes et le résultat sur les sous-suites paires et impaires ; pour la convergence absolue, on compare à la série harmonique.

D'après le théorème des suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ . Les suites extraites d'indices pairs et impairs de (S_n) convergeant vers la même limite ℓ , la suite (S_n) converge vers ℓ . Donc la série

$$\sum u_n$$

converge.

Pour la convergence absolue : pour tout $n \geq 3$, on a $n > e$ donc $\ln(n) \geq 1$, d'où :

$$|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

La série harmonique

$$\sum \frac{1}{n}$$

(série de Riemann d'exposant 1) diverge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum |u_n|$$

diverge.

Conclusion

la série

$$\sum u_n$$

converge mais n'est pas absolument convergente.

Question 4(a)

On minore la fonction intégrée sur le segment $[n, n+1]$ à l'aide de la monotonie de φ , puis on intègre.

Soit $n \geq 3$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $e < 3 \leq n \leq t \leq n+1$. Comme φ est décroissante sur $[e, +\infty[$:

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \varphi(t) \geq \varphi(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

La fonction φ est continue sur le segment $[n, n+1]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant ; par croissance de l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} dt = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 3, \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

Question 4(b)

On calcule l'intégrale à l'aide d'une primitive, on en déduit le signe de $v_{n+1} - v_n$, puis on minore (v_n) par une comparaison série-intégrale de sens contraire.

La fonction $\Phi : t \mapsto \frac{[\ln(t)]^2}{2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\Phi'(t) = \frac{2 \ln(t) \cdot \frac{1}{t}}{2} = \varphi(t).$$

Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$$

Monotonie : pour tout $n \geq 3$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \right) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq 0$$

d'après la question 4(a). La suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante.

Minoration : pour tout entier $k \geq 3$ et tout $t \in [k, k+1]$, on a $e < k \leq t$, donc $\varphi(t) \leq \varphi(k)$ par décroissance de φ sur $[e, +\infty[$. Par croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(k)$. En sommant pour k de 3 à n (avec $n \geq 3$) et par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \geq \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \geq \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2}$$

la dernière inégalité venant de la croissance de $\ln$ et de $\ln(n) \geq 0$. En ajoutant les termes $k = 1$ (nul) et $k = 2$:

$$v_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2}$$

La suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée ; par le théorème de la limite monotone, elle converge.

Conclusion

la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et converge vers un réel que l'on note L .

Question 5

On sépare les termes d'indices pairs et impairs, puis on développe les logarithmes.

Soit $n \geq 1$. On note

$$P_n = \sum_{j=1}^n \varphi(2j)$$

(termes d'indices pairs) et

$$I_n = \sum_{j=1}^n \varphi(2j-1)$$

(termes d'indices impairs). Comme $(-1)^{2j} = 1$ et $(-1)^{2j-1} = -1$:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \varphi(k) = P_n - I_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) = P_n + I_n$$

Donc

$$I_n = \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) - P_n$$

et :

$$S_{2n} = 2P_n - \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

ce qui est la première égalité.

Pour la seconde, on utilise $\ln(2k) = \ln(2) + \ln(k)$:

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2}$$

Par ailleurs, par définition de v_{2n} et avec $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = v_{2n} + \frac{[\ln(2) + \ln(n)]^2}{2} = v_{2n} + \frac{[\ln(2)]^2}{2} + \ln(2) \ln(n) + \frac{[\ln(n)]^2}{2}$$

Par différence, les termes $\frac{[\ln(n)]^2}{2}$ se compensent.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n).$$

Question 6

On regroupe les termes de la question 5 pour faire apparaître w_n , puis on passe à la limite.

Pour tout $n \geq 1$, d'après la question 5 :

$$S_{2n} = \ln(2) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} = \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $w_n \rightarrow \gamma$ (question 1(c)) ; $v_n \rightarrow L$ (question 4(b)) et (v_{2n}) , suite extraite de (v_n) , tend aussi vers L . Donc :

$$S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \ln(2) + L - L - \frac{[\ln(2)]^2}{2} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Par ailleurs, la série

$$\sum u_n$$

converge (question 3(b)) :

$$S_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

et la suite extraite (S_{2n}) a la même limite. Par unicité de la limite :

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

EXERCICE 2

Question 1(a)

On vérifie la linéarité, puis la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité : pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la dérivation étant linéaire,

$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$ et $(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q''$, donc :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = 4X(\lambda P' + \mu Q') - (\lambda P'' + \mu Q'') = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

Stabilité : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ou $P' = 0$), donc $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$; et $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ (ou $P'' = 0$). Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel,

$$\varphi(P) = 4XP' - P'' \in \mathbb{R}_n[X].$$

Conclusion

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 1(b)

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(X^k)' = kX^{k-1}$ et $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$ (ces expressions sont nulles pour $k = 0$, et la seconde pour $k \in \{0, 1\}$). Donc :

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(X) = 4X, \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varphi(X^k) = 4kX^k - k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ de φ dans la base canonique (lignes et colonnes indexées de 0 à n) a donc pour seuls coefficients éventuellement non nuls :

$$a_{k,k} = 4k \text{ pour } 0 \leq k \leq n, \quad a_{k-2,k} = -k(k-1) \text{ pour } 2 \leq k \leq n$$

Elle est triangulaire supérieure, de diagonale $(0, 4, 8, \dots, 4n)$, et ses seuls coefficients non nuls hors diagonale sont sur la deuxième sur-diagonale. Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Conclusion

la matrice de φ dans la base canonique est la matrice triangulaire supérieure A décrite ci-dessus.

Question 1(c)

Question adaptée au programme actuel : on précise $n \geq 3$, car $3X - 4X^3$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_2[X]$ lorsque $n = 2$ (voir le relevé des adaptations). Ce résultat n'est utilisé qu'en 4(b), où $n = 3$.

On calcule directement l'image du polynôme. Soit $P = 3X - 4X^3$, qui appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ car $n \geq 3$. On a $P' = 3 - 12X^2$ et $P'' = -24X$, donc :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= 4X(3 - 12X^2) - (-24X) = 12X - 48X^3 + 24X = 36X - 48X^3 \\ &= 12(3X - 4X^3) = 12P\end{aligned}$$

Comme $P \neq 0$, P est un vecteur propre de φ .

Conclusion

$3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre 12.

Question 1(d)

On lit les valeurs propres sur la diagonale de la matrice triangulaire, puis on utilise le critère « $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$ ».

La matrice A est triangulaire ; ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc :

$$\text{Sp}(\varphi) = \{4k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} = \{0, 4, 8, \dots, 4n\}$$

Ces $n + 1$ valeurs propres sont deux à deux distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. Donc φ est diagonalisable.

Dimension des sous-espaces propres : chaque sous-espace propre E_{4k} est de dimension au moins 1. Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, donc :

$$\sum_{k=0}^n \dim E_{4k} = \dim \left(\bigoplus_{k=0}^n E_{4k} \right) \leq n + 1$$

Une somme de $n + 1$ entiers tous supérieurs ou égaux à 1 et majorée par $n + 1$ impose que chacun vaut 1.

Conclusion

φ est diagonalisable, ses valeurs propres sont $0, 4, \dots, 4n$ et chacun de ses $n + 1$ sous-espaces propres est une droite (dimension 1).

Question 2(a)

On justifie la régularité par opérations sur les fonctions de classe C^2 , puis on dérive.

L'ensemble $\mathcal{D}_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (cas $n = 2$ du résultat admis). La fonction $(x, y) \mapsto y - x$ est polynomiale, donc de classe C^2 , et à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur $\mathcal{D}_2$; $\ln$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$; par composition, $(x, y) \mapsto \ln(y - x)$ est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_2$. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale. Donc f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_2$: elle admet des dérivées partielles premières et secondes.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y - x}, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - \frac{1}{y - x}$$

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f(x, y) &= 2 + \frac{1}{(y - x)^2}, & \partial_{2,2}^2 f(x, y) &= 2 + \frac{1}{(y - x)^2}, & \partial_{1,2}^2 f(x, y) &= \partial_{2,1}^2 f(x, y) \\ &= -\frac{1}{(y - x)^2} \end{aligned}$$

(Pour $\partial_1 f$: la dérivée de $x \mapsto -\ln(y-x)$ est $-\frac{-1}{y-x} = \frac{1}{y-x}$. Pour $\partial_{1,1}^2 f$: la dérivée de $x \mapsto (y-x)^{-1}$ est $(y-x)^{-2}$. Pour $\partial_{1,2}^2 f$: la dérivée de $y \mapsto (y-x)^{-1}$ est $-(y-x)^{-2}$.)

Conclusion

f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}_2$ et ses dérivées partielles sont données ci-dessus.

Question 2(b)

On résout le système $\nabla f(x, y) = 0$ sur l'ouvert $\mathcal{D}_2$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_2$. Le point (x, y) est critique si et seulement si :

$$2x + \frac{1}{y-x} = 0 \quad \text{et} \quad 2y - \frac{1}{y-x} = 0$$

En additionnant, $2(x+y) = 0$, donc $x = -y$. Le système équivaut alors à $x = -y$ et $2y = \frac{1}{2y}$ (car $y-x = 2y$). La condition $(x, y) \in \mathcal{D}_2$ s'écrit $y-x = 2y > 0$, soit $y > 0$.

L'équation $2y = \frac{1}{2y}$ équivaut à $4y^2 = 1$, et avec $y > 0$ à $y = \frac{1}{2}$. Alors $x = -\frac{1}{2}$.

Réciproquement, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{D}_2$ car $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, et $y-x = 1$, donc $\partial_1 f = -1 + 1 = 0$ et $\partial_2 f = 1 - 1 = 0$.

Conclusion

f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_2$, le point $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Question 2(c)

On remarque que la matrice proposée est la hessienne de f au point critique, on détermine ses valeurs propres sans déterminant, puis on conclut grâce au signe de ces valeurs propres.

Au point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on a $y-x = 1$, donc d'après la question 2(a) :

$$\nabla^2 f \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = H$$

Méthode 1 — Résolution du système $HX = \lambda X$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Le système $HX = \lambda X$ s'écrit $3p - q = \lambda p$ et $-p + 3q = \lambda q$. Il

équivalent (opérations réversibles : somme et différence des deux lignes) à :

$$2(p + q) = \lambda(p + q) \quad \text{et} \quad 4(p - q) = \lambda(p - q)$$

soit $(2 - \lambda)(p + q) = 0$ et $(4 - \lambda)(p - q) = 0$.

Si $\lambda \notin \{2, 4\}$, alors $p + q = 0$ et $p - q = 0$, donc $X = 0$: λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda = 2$, le système se réduit à $p - q = 0$: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution non nulle, donc 2 est valeur propre.

Si $\lambda = 4$, le système se réduit à $p + q = 0$: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution non nulle, donc 4 est valeur propre.

Méthode 2 — Vecteurs propres explicites et argument de dimension.

La symétrie de la matrice (mêmes coefficients diagonaux) invite à tester $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc 2 et 4 sont valeurs propres. Une matrice carrée d'ordre 2 possède au plus 2 valeurs propres distinctes, car des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Il n'y en a donc pas d'autre.

La méthode 1 est systématique et ne demande aucune intuition ; la méthode 2 est plus rapide lorsque la structure de la matrice suggère des vecteurs propres, mais elle exige l'argument de dimension pour garantir qu'aucune valeur propre n'a été oubliée.

Dans les deux cas : $\text{Sp}(H) = \{2, 4\}$.

Extremum local : f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{D}_2$, le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est critique et les valeurs propres de la hessienne en ce point, 2 et 4, sont toutes strictement positives.

Donc f admet en ce point un minimum local strict, de valeur

$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ln(1) = \frac{1}{2}.$$

Remarque (minimum global). L'ouvert $\mathcal{D}_2$ est convexe : si $x < y$, $x' < y'$ et $t \in [0, 1]$, alors $(1-t)x + tx' < (1-t)y + ty'$. En tout point (x, y) de $\mathcal{D}_2$, en notant

$$c = \frac{1}{(y-x)^2} > 0, \text{ la hessienne est } \begin{pmatrix} 2+c & -c \\ -c & 2+c \end{pmatrix}, \text{ qui admet les vecteurs propres } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pour les valeurs propres } 2 \text{ et } 2+2c, \text{ toutes deux strictement positives. Par le}$$

critère d'extremum global sur un ouvert convexe, le minimum est en fait global sur $\mathcal{D}_2$.

Conclusion

les valeurs propres de la matrice sont 2 et 4; f admet en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ un minimum local strict (qui est même global), égal à $\frac{1}{2}$.

Question 3(a)

On repère, dans la double somme, les termes qui dépendent de x_k .

Sur $\mathcal{D}_n$, pour $i < j$, on a $x_j - x_i > 0$; chaque fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \ln(x_j - x_i)$ est de classe C^1 (composée de $\ln$ et d'une fonction polynomiale à valeurs dans $]0, +\infty[$), donc f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{D}_n$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La dérivée partielle par rapport à x_k de

$$\sum_{\ell=1}^n x_{\ell}^2$$

est $2x_k$. Dans la somme

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i),$$

seuls dépendent de x_k :

- les termes $\ln(x_k - x_i)$ avec $i < k$, de dérivée partielle $\frac{1}{x_k - x_i}$;
- les termes $\ln(x_j - x_k)$ avec $j > k$, de dérivée partielle $\frac{-1}{x_j - x_k} = \frac{1}{x_k - x_j}$.

Ces deux familles se regroupent en une seule somme sur tous les indices $i \neq k$.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\partial_k f(x_1, \dots, x_n) = 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i}.$$

Question 3(b)

Par définition, comme f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{D}_n$, u est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(u) = 0$, c'est-à-dire $\partial_k f(u) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Conclusion

d'après la question 3(a), u est un point critique de f si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

Question 3(c)

On dérive deux fois l'égalité $S = (X - x_k)Q_k$, puis on évalue en x_k .

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par la formule de dérivation d'un produit :

$$S' = Q_k + (X - x_k)Q'_k \quad \text{et} \quad S'' = Q'_k + Q'_k + (X - x_k)Q''_k = 2Q'_k + (X - x_k)Q''_k$$

En évaluant en x_k , les termes contenant le facteur $(X - x_k)$ s'annulent.

Conclusion

$$S'(x_k) = Q_k(x_k) \text{ et } S''(x_k) = 2Q'_k(x_k).$$

Question 3(d)

On fixe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i, i \neq k\}$. Pour tout $i \neq k$, on a $x - x_i \neq 0$, donc $Q_k(x) \neq 0$. Si $n = 2$, Q_k est de degré 1 et la formule se vérifie directement ($Q'_k = 1$) ; on raisonne en général.

Méthode 1 — Dérivée d'un produit de plusieurs facteurs.

Rappelons que si $g_1, \dots, g_p$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, alors

$$\left(\prod_{j=1}^p g_j \right)' = \sum_{j=1}^p g'_j \prod_{i \neq j} g_i.$$

Cela se démontre par récurrence sur p : c'est clair pour $p = 1$, et si c'est vrai au rang p , la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions donne

$$\left(\prod_{j=1}^{p+1} g_j \right)' = \left(\prod_{j=1}^p g_j \right)' g_{p+1} + \left(\prod_{j=1}^p g_j \right) g'_{p+1},$$

ce qui est la formule au rang $p + 1$.

On l'applique aux $n - 1$ fonctions $g_i : t \mapsto t - x_i$ ($i \neq k$), de dérivée 1 :

$$Q'_k(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, i \neq j}}^n (x - x_i)$$

Pour $j \neq k$, comme $x - x_j \neq 0$,

$$\prod_{i \neq k, i \neq j} (x - x_i) = \frac{Q_k(x)}{x - x_j}.$$

D'où

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{j \neq k} \frac{1}{x - x_j}.$$

Méthode 2 — Dérivée logarithmique.

L'ensemble $\{x_i, i \neq k\}$ étant fini, il existe un intervalle ouvert J contenant x et ne contenant aucun x_i ($i \neq k$). Sur J , chaque fonction $t \mapsto t - x_i$ ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires) ; il en est de même de Q_k . Pour $t \in J$:

$$\ln |Q_k(t)| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \ln |t - x_i|$$

Si g est dérivable et de signe constant non nul sur J , alors $\ln |g|$ vaut $\ln(g)$ ou $\ln(-g)$ sur J , et sa dérivée est $\frac{g'}{g}$ dans les deux cas. En dérivant l'égalité précédente sur J puis en évaluant en $t = x$:

$$\frac{Q'_k(x)}{Q_k(x)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x - x_i}$$

La méthode 1 est purement algébrique et vaut pour tout produit de fonctions dérivables ; la méthode 2 est plus rapide mais exige de travailler sur un intervalle où la fonction ne s'annule pas, afin de pouvoir prendre le logarithme de sa valeur absolue.

Conclusion

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $x \notin \{x_i, i \neq k\}$,

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{i \neq k} \frac{1}{x - x_i}.$$

Question 3(e)

On applique la question 3(d) au point $x = x_k$, puis on utilise la question 3(c).

Comme $u \in \mathcal{D}_n$, les réels $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts ; donc $x_k \notin \{x_i, i \neq k\}$ et

$$Q_k(x_k) = \prod_{i \neq k} (x_k - x_i) \neq 0.$$

La question 3(d) donne :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i} = \frac{Q'_k(x_k)}{Q_k(x_k)}$$

Pour tout k , en multipliant par $Q_k(x_k) \neq 0$ (opération réversible) puis en utilisant la question 3(c) :

$$2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} = 0 \iff 2x_k Q_k(x_k) - Q'_k(x_k) = 0 \iff 2x_k S'(x_k) - \frac{S''(x_k)}{2} = 0$$

$$\iff S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

Conclusion

avec la question 3(b), u est un point critique de f si et seulement si $\forall k \in [1, n], S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$.

Question 3(f)

On introduit $T = S'' - 4XS'$; la question 3(e) dit que u est critique si et seulement si T s'annule en chacun des x_k . On utilise la divisibilité par un produit de facteurs $(X - x_k)$ distincts et une comparaison des degrés.

Degré de T : S est unitaire de degré n , donc S' est de degré $n - 1$ et $4XS'$ est de degré n , de coefficient dominant $4n$; S'' est de degré au plus $n - 2$ (ou nul). Ainsi $T \in \mathbb{R}_n[X]$ et le coefficient de X^n dans T vaut $-4n$.

Sens direct : si u est critique, $T(x_k) = 0$ pour tout k . Les réels $x_1, \dots, x_n$ étant deux à deux distincts, ce sont n racines distinctes de T , donc

$$S = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

divise T : il existe un polynôme C tel que $T = CS$. Si $T \neq 0$, $\deg C = \deg T - n \leq 0$, donc C est constant; si $T = 0$, on prend $C = 0$. Dans les deux cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T = \lambda S$.

Réciproque : si $T = \lambda S$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $T(x_k) = \lambda S(x_k) = 0$ pour tout k , donc u est critique d'après la question 3(e).

Valeur de λ : si $T = \lambda S$, en identifiant les coefficients de X^n (S est unitaire), on obtient $\lambda = -4n$. Donc u est critique si et seulement si $S'' - 4XS' = -4nS$.

Conclusion

u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S'' - 4XS' = \lambda S$, et plus précisément si et seulement si $S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$.

Question 4(a)

On traduit la condition de la question 3(f) en termes de vecteur propre de φ , puis on

utilise que le sous-espace propre correspondant est une droite.

Pour $u \in \mathcal{D}_n$, notons

$$S_u = \prod_{k=1}^n (X - x_k),$$

qui appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. La condition de la question 3(f) s'écrit $4XS'_u - S''_u = 4nS_u$, c'est-à-dire $\varphi(S_u) = 4nS_u$. Comme $S_u \neq 0$:

u est un point critique de $f \iff S_u$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $4n$.

Soient $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $u' = (x'_1, \dots, x'_n)$ deux points critiques de f . Alors S_u et $S_{u'}$ appartiennent au sous-espace propre E_{4n} , qui est de dimension 1 d'après la question 1(d). Comme $S_u \neq 0$, (S_u) est une base de E_{4n} et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $S_{u'} = \mu S_u$. Les deux polynômes étant unitaires de degré n , l'égalité des coefficients de X^n donne $\mu = 1$, donc $S_{u'} = S_u$.

Ces polynômes ont donc le même ensemble de racines : $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x'_1, \dots, x'_n\}$. Comme $x_1 < \dots < x_n$ et $x'_1 < \dots < x'_n$, ranger ces n réels dans l'ordre croissant donne $x_k = x'_k$ pour tout k , d'où $u = u'$.

Conclusion

f admet au plus un point critique sur $\mathcal{D}_n$.

Question 4(b)

On cherche un polynôme unitaire de degré 3 vecteur propre de φ pour la valeur propre $4n = 12$, puis on vérifie que ses racines sont réelles et distinctes.

Pour $n = 3$, $4n = 12$. D'après la question 1(c) (valable car $n = 3 \geq 3$), $3X - 4X^3$ est vecteur propre de φ pour la valeur propre 12. Il en est de même du polynôme unitaire :

$$S = -\frac{1}{4}(3X - 4X^3) = X^3 - \frac{3}{4}X = X \left(X^2 - \frac{3}{4} \right) = \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) X \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Posons $u_0 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On a $-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $u_0 \in \mathcal{D}_3$, et $S_{u_0} = S$ vérifie $\varphi(S_{u_0}) = 12S_{u_0}$, soit $S''_{u_0} - 4XS'_{u_0} + 12S_{u_0} = 0$. D'après la question 3(f), u_0 est un point critique de f , et d'après la question 4(a), c'est le seul.

Vérification directe sur la première coordonnée :

$$2x_1 - \frac{1}{x_1 - x_2} - \frac{1}{x_1 - x_3} = -\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$$

Conclusion

pour $n = 3$, f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

Dans toute cette partie, on note, pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $c_{a,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!}$, de sorte que $f_{a,b}(x) = c_{a,b} x^a (1-x)^b$ pour $x \in [0, 1]$.

Question 1(a)

Pour tout $a \in \mathbb{N}$:

$$I_{a,0} = \int_0^1 x^a dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$$

Conclusion

$$I_{a,0} = \frac{1}{a+1} \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}.$$

Question 1(b)

On intègre par parties sur le segment $[0, 1]$, en dérivant le facteur $(1-x)^b$ et en primitivant x^a .

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Les fonctions $U : x \mapsto (1-x)^b$ et $V : x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $U'(x) = -b(1-x)^{b-1}$ et $V'(x) = x^a$. Par intégration par parties :

$$I_{a,b} = \left[\frac{x^{a+1}(1-x)^b}{a+1} \right]_0^1 + \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1} dx$$

Le crochet est nul : en $x = 1$, $(1-1)^b = 0$ car $b \geq 1$; en $x = 0$, $0^{a+1} = 0$ car $a+1 \geq 1$.

Conclusion

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$

Question 1(c)

Méthode 1 — Récurrence sur b .

Pour $b \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(b)$: « pour tout $a \in \mathbb{N}$, $I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}$ ».

Initialisation : pour tout a , $\frac{a! 0!}{(a+1)!} = \frac{1}{a+1} = I_{a,0}$ d'après la question 1(a). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(b)$ vraie pour un $b \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{N}$. D'après la question 1(b) appliquée au couple $(a, b+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, puis $\mathcal{P}(b)$ appliquée à $a+1$:

$$I_{a,b+1} = \frac{b+1}{a+1} I_{a+1,b} = \frac{b+1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)! b!}{(a+b+2)!} = \frac{a! (b+1)!}{(a+(b+1)+1)!}$$

Donc $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie.

Méthode 2 — Itération de la relation.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $b \geq 1$. En appliquant b fois la question 1(b) (le second indice diminue de 1 et le premier augmente de 1 à chaque étape) :

$$I_{a,b} = \frac{b}{a+1} \cdot \frac{b-1}{a+2} \cdots \frac{1}{a+b} I_{a+b,0} = \frac{b!}{(a+b)!} \cdot \frac{1}{a+b+1} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}$$

en utilisant $(a+1)(a+2) \cdots (a+b) = \frac{(a+b)!}{a!}$ et la question 1(a). Le cas $b = 0$ est la question 1(a).

La méthode 1 est la rédaction rigoureuse attendue ; la méthode 2 montre d'où vient la formule et permet de la deviner, mais les points de suspension en font une rédaction moins formelle.

Conclusion

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}.$$

Question 1(d)

On vérifie la positivité, la continuité sauf en un nombre fini de points et la normalisation.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

Positivité : $f_{a,b}$ est nulle hors de $[0, 1]$, et pour $x \in [0, 1]$, $x^a \geq 0$, $(1-x)^b \geq 0$ et $c_{a,b} > 0$.

Donc $f_{a,b} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Continuité : $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, et polynomiale sur $]0, 1[$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Normalisation : les intégrales $\int_{-\infty}^0 f_{a,b}$ et $\int_1^{+\infty} f_{a,b}$ portent sur la fonction nulle (sauf éventuellement aux bornes) et convergent vers 0. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) dx = c_{a,b} \int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{(a+b+1)!}{a! b!} \cdot \frac{a! b!}{(a+b+1)!} = 1$$

d'après la question 1(c).

Conclusion

$f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

Question 2(a)

On justifie l'existence par le fait que la densité est nulle hors d'un segment, puis on calcule l'intégrale à l'aide de la question 1(c).

La fonction $x \mapsto |x| f_{a,b}(x)$ est nulle hors de $[0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$ (restriction d'un polynôme). L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{a,b}(x) dx$ converge donc, et X admet une espérance :

$$E(X) = \int_0^1 x c_{a,b} x^a (1-x)^b dx = c_{a,b} I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! b!} \cdot \frac{(a+1)! b!}{(a+b+2)!} = \frac{a+1}{a+b+2}$$

Conclusion

X admet une espérance et $E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$.

Question 2(b)

On calcule le moment d'ordre 2 par le théorème de transfert, puis on applique la formule de Koenig-Huygens.

De même, $x \mapsto x^2 f_{a,b}(x)$ est nulle hors de $[0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$: par le théorème de transfert, X^2 admet une espérance, donc X admet une variance, et :

$$E(X^2) = c_{a,b} I_{a+2,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} \cdot \frac{(a+2)!b!}{(a+b+3)!} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)}$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)} - \frac{(a+1)^2}{(a+b+2)^2} \\ &= \frac{(a+1)[(a+2)(a+b+2) - (a+1)(a+b+3)]}{(a+b+3)(a+b+2)^2} \end{aligned}$$

Or $(a+2)(a+b+2) = a^2 + ab + 4a + 2b + 4$ et $(a+1)(a+b+3) = a^2 + ab + 4a + b + 3$; leur différence vaut $b+1$.

Conclusion

$$X \text{ admet une variance et } V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.$$

Question 2(c)

On note $N = a + b + 1$ et G la fonction de répartition de X : $G(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t) dt$. Pour

$x \in [0, 1]$, comme $\frac{(a+b+1)!}{k!(a+b+1-k)!} = \binom{N}{k}$:

$$F(x) = \sum_{k=a+1}^N \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}$$

Cas $x < 0$: $f_{a,b}$ est nulle sur $]-\infty, x]$, donc $G(x) = 0 = F(x)$.

Cas $x > 1$: $G(x) = \int_0^1 f_{a,b}(t) dt = 1 = F(x)$ (question 1(d)).

Cas $x \in [0, 1]$: $G(x) = \int_0^x f_{a,b}(t) dt$. Il reste à montrer que cette intégrale vaut $F(x)$.

Méthode 1 — Comparaison des dérivées.

La fonction $x \mapsto \int_0^x c_{a,b} t^a (1-t)^b dt$ est la primitive s'annulant en 0 de la fonction polynomiale $x \mapsto c_{a,b} x^a (1-x)^b$ sur $[0, 1]$. Il suffit donc de montrer que F (expression polynomiale sur $[0, 1]$) vérifie $F(0) = 0$ et $F'(x) = c_{a,b} x^a (1-x)^b$ sur $[0, 1]$.

$F(0) = 0$ car chaque terme contient x^k avec $k \geq a + 1 \geq 1$.

Pour $k \leq N - 1$, la dérivée de $x \mapsto x^k (1-x)^{N-k}$ est $kx^{k-1}(1-x)^{N-k} - (N-k)x^k(1-x)^{N-k-1}$; pour $k = N$, la dérivée de x^N est Nx^{N-1} . On utilise les identités $k \binom{N}{k} = N \binom{N-1}{k-1}$ (pour $k \geq 1$) et $(N-k) \binom{N}{k} = N \binom{N-1}{k}$ (pour $k \leq N - 1$). Il vient :

$$F'(x) = N \sum_{k=a+1}^N \binom{N-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{N-k} - N \sum_{k=a+1}^{N-1} \binom{N-1}{k} x^k (1-x)^{N-1-k}$$

En posant $j = k - 1$ dans la première somme, elle devient

$$\sum_{j=a}^{N-1} \binom{N-1}{j} x^j (1-x)^{N-1-j},$$

et la seconde est

$$\sum_{j=a+1}^{N-1} \binom{N-1}{j} x^j (1-x)^{N-1-j}.$$

Leur différence se réduit au terme $j = a$:

$$F'(x) = N \binom{N-1}{a} x^a (1-x)^{N-1-a} = (a+b+1) \frac{(a+b)!}{a!b!} x^a (1-x)^b = c_{a,b} x^a (1-x)^b$$

Les fonctions F et G sont dérivables sur $[0, 1]$, de même dérivée, et coïncident en 0 : elles sont égales sur $[0, 1]$.

Méthode 2 — Intégrations par parties successives (récurrence sur b).

Pour $b \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}(b)$: « pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x f_{a,b}(t) dt = \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \binom{a+b+1}{k} x^k (1-x)^{a+b+1-k}$$

».

Initialisation : $\int_0^x (a+1)t^a dt = x^{a+1}$, qui est l'unique terme $k = a+1$ de la somme.

Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $\mathcal{Q}(b)$ vraie et soient $a \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $M = a+b+2$. Une intégration par parties sur $[0, x]$, comme à la question 1(b) (en dérivant $(1-t)^{b+1}$), donne :

$$\int_0^x c_{a,b+1} t^a (1-t)^{b+1} dt = \frac{c_{a,b+1}}{a+1} x^{a+1} (1-x)^{b+1} + \frac{c_{a,b+1}(b+1)}{a+1} \int_0^x t^{a+1} (1-t)^b dt$$

Or $\frac{c_{a,b+1}}{a+1} = \frac{M!}{(a+1)!(b+1)!} = \binom{M}{a+1}$ et $\frac{c_{a,b+1}(b+1)}{a+1} = \frac{M!}{(a+1)!b!} = c_{a+1,b}$. Par $\mathcal{Q}(b)$ appliquée à $a+1$ (avec $(a+1)+b+1 = M$) :

$$\int_0^x f_{a,b+1}(t) dt = \binom{M}{a+1} x^{a+1} (1-x)^{M-a-1} + \sum_{k=a+2}^M \binom{M}{k} x^k (1-x)^{M-k}$$

$$= \sum_{k=a+1}^M \binom{M}{k} x^k (1-x)^{M-k}$$

Donc $\mathcal{Q}(b+1)$ est vraie.

La méthode 1 vérifie une formule donnée (on dérive et on simplifie) ; la méthode 2 construit la formule terme à terme et explique l'origine de la somme, ce qui est utile quand le résultat n'est pas fourni.

Conclusion

$F = G$ sur $\mathbb{R}$, donc F est la fonction de répartition de X .

Partie B

Dans cette partie, on utilise que si l'on sait qu'avant le i -ième tirage on a pioché r boules rouges et w boules blanches ($r + w = i - 1$), l'urne contient $a + r$ boules rouges et $b + w$ boules blanches, soit $a + b + i - 1$ boules ; le tirage étant au hasard, la boule tirée est rouge avec la probabilité conditionnelle $\frac{a+r}{a+b+i-1}$ et blanche avec la probabilité conditionnelle $\frac{b+w}{a+b+i-1}$. Ces deux probabilités sont strictement positives car $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

Question 3

À chaque épreuve, on ajoute une boule rouge si et seulement si on pioche une boule rouge. Donc X_n est le nombre de boules rouges piochées lors des n premiers tirages, et $X_n(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

Réciproquement, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'événement « les k premiers tirages donnent une boule rouge et les $n - k$ suivants une boule blanche » est inclus dans $[X_n = k]$; par la formule des probabilités composées, sa probabilité est un produit de probabilités conditionnelles strictement positives (rappel ci-dessus), donc elle est strictement positive. Ainsi chaque valeur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est effectivement prise.

Conclusion

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Question 4(a)

Code adapté en Python.

Si r suit la loi uniforme sur $[0, 1[$ et si $p = \frac{x}{x+y} \in]0, 1[$, alors $P(r < p) = p$. Il suffit donc de renvoyer 0 (boule rouge) lorsque $r < \frac{x}{x+y}$.

Python

```
import numpy as np

def tirage(x, y):
    r = np.random.random()
    if r < x / (x + y):
        res = 0      # boule rouge, avec probabilité x/(x+y)
    else:
        res = 1      # boule blanche, avec probabilité y/(x+y)
    return res
```

Conclusion

la condition à compléter est $r < x / (x + y)$.

Question 4(b)

Code adapté en Python.

Les variables x et y contiennent le nombre courant de boules rouges et blanches. La boucle `for k in range(n)` effectue exactement n épreuves. Après un tirage rouge, on ajoute une boule rouge (x augmente de 1) ; après un tirage blanc, on ajoute une boule blanche (y augmente de 1). À la fin, le nombre de boules rouges ajoutées est $x - a$.

Python

```
def experience(a, b, n):  
    x = a  
    y = b  
    for k in range(n):  
        r = tirage(x, y)  
        if r == 0:  
            x = x + 1  
        else:  
            y = y + 1  
    Xn = x - a  
    return Xn
```

Conclusion

les trois blancs sont $x + 1$, $y = y + 1$ et $x - a$.

Question 4(c)

Code adapté en Python.

On réalise m simulations indépendantes de X_n ; on compte dans $\text{loi}[k]$ le nombre de simulations ayant donné la valeur k , puis on divise par m pour obtenir les fréquences, qui approchent les probabilités $P(X_n = k)$ (loi faible des grands nombres). Comme X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, l'indice k est toujours valide dans un tableau de longueur $n + 1$.

Python

```
def simulation(a, b, n, m):  
    loi = np.zeros(n + 1)      # loi[k] compte les simulations où Xn = k  
    for i in range(m):  
        k = experience(a, b, n)  
        loi[k] = loi[k] + 1  
    loi = loi / m              # fréquences  
    return loi
```

Ces fonctions utilisent l'importation `import numpy as np` placée en tête du code de la question 4(a) ; elles ont été exécutées ensemble. Par exemple, pour $a = 2$, $b = 3$, $n = 4$ et $m = 20000$, une exécution a donné les fréquences 0,213 ; 0,280 ; 0,261 ; 0,175 ; 0,070, proches des valeurs exactes $\frac{3}{14}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{9}{35}$; $\frac{6}{35}$; $\frac{1}{14}$ données par la question 6(c). Cette concordance est une observation expérimentale, non une preuve.

Conclusion

la fonction `simulation` renvoie le tableau des fréquences observées des valeurs $0, 1, \dots, n$ de X_n .

Question 5(a)

Code adapté en Python (commandes d'affichage). Les cinq diagrammes montrent, pour $n = 1, \dots, 5$, $n + 1$ barres de hauteurs très voisines : environ 0,5 pour $n = 1$, 0,33 pour $n = 2$, 0,25 pour $n = 3$, 0,2 pour $n = 4$ et 0,167 pour $n = 5$, soit à chaque fois environ $\frac{1}{n+1}$.

Conclusion

on conjecture que, pour $a = b = 1$, X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$: $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Question 5(b)

Initialement l'urne contient une boule rouge et une boule blanche. X_1 vaut 1 si et seulement si le premier tirage donne une boule rouge, donc $P(X_1 = 1) = P(R_1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion

X_1 suit la loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$).

Question 5(c)

Soient $0 \leq k \leq n$. D'après la question 3, $P(X_n = k) > 0$ et les probabilités

conditionnelles sont bien définies.

Sachant $[X_n = k]$, k boules rouges et $n - k$ boules blanches ont été ajoutées : l'urne contient $1 + k$ boules rouges et $1 + n - k$ boules blanches, soit $n + 2$ boules. Au $(n + 1)$ -ième tirage, $X_{n+1} = X_n + 1$ si la boule tirée est rouge et $X_{n+1} = X_n$ sinon. Donc :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k + 1) = \frac{k + 1}{n + 2}, \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n - k + 1}{n + 2}$$

et comme $X_{n+1} - X_n \in \{0, 1\}$, pour $\ell \notin \{k, k + 1\}$: $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = 0$.

Conclusion

les trois probabilités conditionnelles valent respectivement $\frac{n - k + 1}{n + 2}$, $\frac{k + 1}{n + 2}$ et 0.

Question 5(d)

On démontre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}(n)$:

« $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{n + 1}$ ».

Initialisation : $\mathcal{H}(1)$ est la question 5(b).

Hérédité : supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. La famille $([X_n = j])_{0 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Soit $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$. Par la formule des probabilités totales et la question 5(c), seuls les termes $j = k$ (si $k \leq n$) et $j = k - 1$ (si $k \geq 1$) peuvent être non nuls :

Si $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k) \frac{n - k + 1}{n + 2} + P(X_n = k - 1) \frac{k}{n + 2} = \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{(n - k + 1) + k}{n + 2} \\ &= \frac{1}{n + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Si } k = 0 : \quad P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) \frac{n + 1}{n + 2} = \frac{1}{n + 2}.$$

$$\text{Si } k = n + 1 : P(X_{n+1} = n + 1) = P(X_n = n) \frac{n + 1}{n + 2} = \frac{1}{n + 2}.$$

Donc $\mathcal{H}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion

pour $a = b = 1$ et pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$; la conjecture est démontrée.

Question 6(a)

On applique la formule des probabilités composées, en suivant la composition de l'urne tirage après tirage.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $E = R_1 \cap \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{R_n}$. Chaque probabilité conditionnelle qui apparaît ci-dessous est strictement positive, ce qui garantit par récurrence que les événements par lesquels on conditionne sont de probabilité non nulle.

Pour $1 \leq i \leq k$: sachant que les $i - 1$ premiers tirages ont donné des boules rouges, l'urne contient $a + i - 1$ boules rouges sur $a + b + i - 1$, donc la probabilité conditionnelle de R_i vaut $\frac{a + i - 1}{a + b + i - 1}$.

Pour $i = k + j$ avec $1 \leq j \leq n - k$: sachant que les k premiers tirages ont donné des boules rouges et les $j - 1$ suivants des boules blanches, l'urne contient $b + j - 1$ boules blanches sur $a + b + k + j - 1$, donc la probabilité conditionnelle de $\overline{R_{k+j}}$ vaut $\frac{b + j - 1}{a + b + k + j - 1}$.

Par la formule des probabilités composées :

$$P(E) = \frac{\prod_{i=1}^k (a + i - 1) \times \prod_{j=1}^{n-k} (b + j - 1)}{\prod_{i=1}^n (a + b + i - 1)}$$

Or

$$\prod_{i=1}^k (a + i - 1) = \frac{(a + k - 1)!}{(a - 1)!},$$

$$\prod_{j=1}^{n-k} (b + j - 1) = \frac{(b + n - k - 1)!}{(b - 1)!}$$

(produit vide égal à 1 si $k = n$) et

$$\prod_{i=1}^n (a + b + i - 1) = \frac{(a + b + n - 1)!}{(a + b - 1)!}.$$

Conclusion

$$P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{R_n}) = \frac{(a + k - 1)! (b + n - k - 1)! (a + b - 1)!}{(a - 1)! (b - 1)! (a + b + n - 1)!}.$$

Question 6(b)

On montre que toute suite de tirages comportant exactement k boules rouges a la probabilité calculée en 6(a), puis on dénombre ces suites.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et A une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments. Notons E_A l'événement « on pioche une boule rouge aux tirages d'indices dans A et une boule blanche aux autres ». Par la formule des probabilités composées et le rappel du début de la partie B :

- les dénominateurs successifs sont $a + b, a + b + 1, \dots, a + b + n - 1$, quel que soit A ;
- lors du r -ième tirage rouge ($1 \leq r \leq k$), $r - 1$ boules rouges ont déjà été ajoutées, d'où le numérateur $a + r - 1$;

- lors du w -ième tirage blanc ($1 \leq w \leq n - k$), le numérateur est $b + w - 1$.

Donc $P(E_A) = \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$, valeur qui ne dépend pas de A ; elle coïncide avec celle de la question 6(a) lorsque $A = \llbracket 1, k \rrbracket$ et reste valable pour $k = 0$.

L'événement $[X_n = k]$ est la réunion disjointe des E_A , pour A parcourant les $\binom{n}{k}$ parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments.

Conclusion

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

Question 6(c)

On exprime les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles :

$$\binom{a+k-1}{a-1} = \frac{(a+k-1)!}{(a-1)!k!}, \quad \binom{b+n-k-1}{b-1} = \frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!(n-k)!},$$

$$\binom{a+b+n-1}{a+b-1} = \frac{(a+b+n-1)!}{(a+b-1)!n!}$$

Donc :

$$\frac{\binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

Conclusion

d'après la question 6(b),

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

Question 6(d)

La variable $a + X_n$ est finie, donc elle admet une espérance.

Méthode 1 — Calcul direct à l'aide de la loi de X_n .

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $(a+k) \binom{a+k-1}{a-1} = \frac{(a+k)!}{(a-1)!k!} = a \binom{a+k}{a}$. Par le théorème de transfert et la question 6(c) :

$$E(a + X_n) = \sum_{k=0}^n (a+k) P(X_n = k) = \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^n \binom{a+k}{a} \binom{b+n-k-1}{b-1}$$

Appliquons la question 6(c) à une urne contenant initialement $a+1$ boules rouges et b boules blanches : les probabilités de la loi correspondante ont pour somme 1, donc :

$$\sum_{k=0}^n \binom{(a+1)+k-1}{(a+1)-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{(a+1)+b+n-1}{(a+1)+b-1}, \text{ soit}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{a+k}{a} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n}{a+b}$$

Enfin :

$$\frac{\binom{a+b+n}{a+b}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{(a+b+n)!}{(a+b)!n!} \cdot \frac{(a+b-1)!n!}{(a+b+n-1)!} = \frac{a+b+n}{a+b}$$

donc $E(a + X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b}.$

Méthode 2 — Relation de récurrence sur les espérances.

Pour $n \geq 1$, on a $X_{n+1} = X_n + \mathbf{1}_{R_{n+1}}$. Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = k])_{0 \leq k \leq n}$ (probabilités non nulles), et comme sachant $[X_n = k]$ l'urne contient $a + k$ boules rouges sur $a + b + n$:

$$P(R_{n+1}) = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) \frac{a+k}{a+b+n} = \frac{E(a + X_n)}{a+b+n}$$

Par linéarité,

$$E(a + X_{n+1}) = E(a + X_n) + P(R_{n+1}) = E(a + X_n) \frac{a+b+n+1}{a+b+n}.$$

Comme $E(a + X_1) = a + P(R_1) = a + \frac{a}{a+b} = \frac{a(a+b+1)}{a+b}$, une récurrence immédiate (le produit des facteurs $\frac{a+b+m+1}{a+b+m}$ pour $1 \leq m \leq n-1$ est télescopique et vaut $\frac{a+b+n}{a+b+1}$) donne $E(a + X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b}$ pour tout $n \geq 1$.

La méthode 1 exploite la loi exacte et une identité de sommation obtenue par une astuce probabiliste; la méthode 2 n'utilise pas la loi de X_n et repose sur l'évolution de l'urne d'un tirage au suivant, ce qui la rend réutilisable pour d'autres modèles d'urnes.

Par linéarité de l'espérance : $E(X_n) = E(a + X_n) - a = \frac{a(a+b+n) - a(a+b)}{a+b}.$

Conclusion

$$E(a + X_n) = \frac{a(a + b + n)}{a + b} \text{ et } E(X_n) = \frac{na}{a + b}.$$

Partie C

Question 7(a)

Pour tout $n \geq 1$, $X_n \geq 0$ donc $Y_n = \frac{X_n}{n} \geq 0$. Si $x < 0$, l'événement $[Y_n \leq x]$ est impossible.

Conclusion

$$\text{pour } x < 0, F_n(x) = 0.$$

Question 7(b)

Comme $X_n \leq n$, on a $Y_n \leq 1$. Si $x \geq 1$, l'événement $[Y_n \leq x]$ est certain.

Conclusion

$$\text{pour } x \geq 1, F_n(x) = 1.$$

Question 8(a)

On a $F_n(x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = P(X_n \leq nx)$ car $n > 0$. La variable X_n prend des valeurs entières; or pour tout entier m , $m \leq nx \iff m \leq \lfloor nx \rfloor$, puisque $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à nx . Les événements $[X_n \leq nx]$ et $[X_n \leq \lfloor nx \rfloor]$ sont donc égaux.

Conclusion

$$F_n(x) = P(X_n \leq \lfloor nx \rfloor).$$

Question 8(b)

On somme la loi de la question 6(c), puis on applique la formule admise avec $p = \lfloor nx \rfloor + a$, après avoir vérifié que p est dans l'intervalle autorisé.

Posons $q = \lfloor nx \rfloor$. Comme $0 < nx < n$, on a $0 \leq q \leq nx < n$, donc $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Par la question 8(a), puis la question 6(c) :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^q P(X_n = k) = \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^q \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}$$

Posons $p = q + a$. Alors $a \leq p \leq a + n - 1 \leq a + b + n - 1$, donc $p \in \llbracket a, a + b + n - 1 \rrbracket$ et $p - a = q$. La formule admise donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^q \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} &= \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{q+a}{i} \binom{a+b+n-1-q-a}{a+b-1-i} \\ &= \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i} \end{aligned}$$

Conclusion

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

Question 8(c)

Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour $j = 0$, $\binom{m}{0} = 1 = \frac{m^0}{0!}$. Pour $j \geq 1$ et tout entier $m \geq j$:

$$\binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!} = \frac{m^j}{j!} \prod_{\ell=0}^{j-1} \left(1 - \frac{\ell}{m}\right)$$

Le produit comporte un nombre fixe j de facteurs, qui tendent chacun vers 1 quand $m \rightarrow +\infty$; il tend donc vers 1.

Conclusion

$$\binom{m}{j} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}.$$

Remarque utile pour la suite : la preuve montre plus généralement que si (m_n) est une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, alors

$$\binom{m_n}{j} / \frac{m_n^j}{j!} = \prod_{\ell=0}^{j-1} \left(1 - \frac{\ell}{m_n}\right) \rightarrow 1.$$

Question 8(d)

On détermine la limite de chacun des termes de la somme finie de la question 8(b), divisé par le dénominateur, à l'aide d'équivalents (produits et quotients uniquement), puis on somme les limites.

Notons $q_n = \lfloor nx \rfloor$, $m_n = q_n + a$, $M_n = b + n - 1 - q_n$ et $D_n = \binom{a+b+n-1}{a+b-1}$.

Comportement de q_n : de $nx - 1 < q_n \leq nx$, on tire $x - \frac{1}{n} < \frac{q_n}{n} \leq x$, donc $\frac{q_n}{n} \rightarrow x$ par encadrement. Ainsi $\frac{m_n}{n} \rightarrow x$ et $\frac{M_n}{n} \rightarrow 1 - x$. Comme $x > 0$ et $1 - x > 0$: $m_n \sim nx$, $M_n \sim n(1 - x)$, et ces deux suites d'entiers tendent vers $+\infty$. De même $a + b + n - 1 \sim n$.

Équivalents : soit $i \in \llbracket a, a + b - 1 \rrbracket$ et $i' = a + b - 1 - i \in \mathbb{N}$. D'après la question 8(c) et sa remarque, puis par compatibilité des équivalents avec les puissances (exposants fixés) :

$$\binom{m_n}{i} \sim \frac{m_n^i}{i!} \sim \frac{(nx)^i}{i!}, \quad \binom{M_n}{i'} \sim \frac{M_n^{i'}}{i'!} \sim \frac{(n(1-x))^{i'}}{i'!}, \quad D_n \sim \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}$$

Par produit et quotient d'équivalents, et comme $i + i' = a + b - 1$:

$$\frac{\binom{m_n}{i} \binom{M_n}{i'}}{D_n} \sim \frac{(a+b-1)!}{i! i'!} x^i (1-x)^{i'} \cdot \frac{n^{i+i'}}{n^{a+b-1}} = \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}$$

Le membre de droite est une constante non nulle ; une suite équivalente à une constante non nulle converge vers cette constante. Chacun des b termes de la somme converge donc, et la limite d'une somme d'un nombre fixé de suites convergentes est la somme des limites.

Conclusion

pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}.$$

Question 9

Comme $Y_n \geq 0$, $F_n(0) = P(Y_n \leq 0) = P(Y_n = 0) = P(X_n = 0)$. D'après la question 6(c) avec $k = 0$ et $\binom{a-1}{a-1} = 1$:

$$F_n(0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

Méthode 1 — Équivalents.

Comme $b+n-1 \sim n$ et $a+b+n-1 \sim n$, la question 8(c) (et sa remarque) donne

$$\binom{b+n-1}{b-1} \sim \frac{n^{b-1}}{(b-1)!} \text{ et } \binom{a+b+n-1}{a+b-1} \sim \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}. \text{ Par quotient :}$$

$$F_n(0) \sim \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!} \cdot \frac{1}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } a \geq 1$$

Méthode 2 — Majoration par un produit télescopique.

$[X_n = 0]$ est l'événement «les n tirages donnent une boule blanche». Par la question 6(b) avec $k = 0$ (ou par les probabilités composées) :

$$F_n(0) = \prod_{i=1}^n \frac{b+i-1}{a+b+i-1}$$

Comme $a \geq 1$, chaque facteur, positif, vérifie $\frac{b+i-1}{a+b+i-1} \leq \frac{b+i-1}{b+i}$, donc :

$$0 \leq F_n(0) \leq \prod_{i=1}^n \frac{b+i-1}{b+i} = \frac{b}{b+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et l'on conclut par encadrement.

La méthode 1 donne de plus la vitesse de convergence (en $\frac{1}{n^a}$) ; la méthode 2 est entièrement élémentaire et s'appuie sur l'interprétation de l'événement $[X_n = 0]$.

Conclusion

$$F_n(0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(0) = 0.$

Question 10

On identifie la limite obtenue avec la fonction de répartition d'une loi beta donnée par la question 2(c) de la partie A, puis on vérifie la convergence en tout point.

Comme $a \geq 1$ et $b \geq 1$, le couple $(a-1, b-1)$ appartient à $\mathbb{N}^2$. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi beta de paramètres $a-1$ et $b-1$; sa fonction de répartition F_Z est

donnée par la question 2(c) de la partie A avec $(a-1) + (b-1) + 1 = a+b-1$: pour $x \in [0, 1]$,

$$F_Z(x) = (a+b-1)! \sum_{k=a}^{a+b-1} \frac{x^k (1-x)^{a+b-1-k}}{k! (a+b-1-k)!} = \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} x^k (1-x)^{a+b-1-k}$$

et $F_Z(x) = 0$ pour $x < 0$, $F_Z(x) = 1$ pour $x > 1$.

Comparons avec la limite de $F_n(x)$:

- si $x < 0$: $F_n(x) = 0 \rightarrow 0 = F_Z(x)$ (question 7(a)) ;
- si $x = 0$: $F_n(0) \rightarrow 0$ (question 9) et $F_Z(0) = 0$ car tous les termes contiennent x^k avec $k \geq a \geq 1$;
- si $x \in]0, 1[$: $F_n(x) \rightarrow F_Z(x)$ (question 8(d)) ;
- si $x \geq 1$: $F_n(x) = 1$ (question 7(b)) et $F_Z(x) = 1$ (pour $x = 1$, seul le terme $k = a+b-1$ est non nul et vaut 1).

Ainsi $F_n(x) \rightarrow F_Z(x)$ pour tout réel x , donc en particulier en tout point de continuité de F_Z .

Conclusion

(Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi beta de paramètres $a-1$ et $b-1$. Pour $a = b = 1$, on retrouve la loi beta de paramètres 0 et 0, de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}$: c'est la loi uniforme sur $[0, 1]$, ce qui est cohérent avec la question 5(d).

Question 11

Par linéarité de l'espérance et la question 6(d) :

$$E(Y_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{a}{a+b}$$

La suite $(E(Y_n))$ est constante, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = \frac{a}{a+b}$.

D'après la question 2(a) de la partie A, une variable Z de loi beta de paramètres $a-1$ et $b-1$ a pour espérance :

$$E(Z) = \frac{(a-1) + 1}{(a-1) + (b-1) + 2} = \frac{a}{a+b}$$

Commentaire : la limite des espérances de Y_n est égale à l'espérance de la loi limite obtenue à la question 10. Ce résultat est cohérent, mais il ne découle pas de la seule convergence en loi, qui n'entraîne pas en général la convergence des espérances. Par exemple, si Z_n vaut n avec probabilité $\frac{1}{n}$ et 0 sinon, alors $F_{Z_n}(x) \rightarrow F_0(x)$ pour tout $x \neq 0$ (où F_0 est la fonction de répartition de la variable certaine nulle), donc (Z_n) converge en loi vers 0, alors que $E(Z_n) = 1$ pour tout n . Ici, la concordance des deux calculs constitue une vérification de cohérence des résultats des parties A, B et C.

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = \frac{a}{a+b}$, qui est l'espérance de la loi beta de paramètres $a-1$ et $b-1$, loi limite de (Y_n) .

Relevé des adaptations

Exercice 2, question 1(c) : ajout de l'hypothèse « $n \geq 3$ ». Le polynôme $3X - 4X^3$ est de degré 3 et n'appartient pas à $\mathbb{R}_n[X]$ lorsque $n = 2$; la question n'a de sens que pour $n \geq 3$, et son résultat n'est utilisé qu'à la question 4(b), où $n = 3$.

Partie B, questions 4(a), 4(b) et 4(c) : code adapté en Python. Les fonctions Scilab sont remplacées par des fonctions Python équivalentes (`rand()` par `np.random.random()`, boucle `for k=1 :n` par `for k in range(n)`), avec les mêmes blancs à compléter; la fonction

simulation renvoie un tableau numpy de longueur $n + 1$ indexé de 0 à n . Le sujet rappelle le rôle de `np.random.random` et de `np.zeros`. Justification : seul Python est autorisé.

Partie B, question 5 : code adapté en Python. Les commandes d’affichage `bar(simulation(1,1,n,100000))` sont remplacées par `plt.bar(range(1, n+2), simulation(1, 1, n, 100000))` suivi de `plt.show()`, et le sujet explique la commande `plt.bar`, qui ne fait pas partie des commandes usuelles du référentiel. Les abscisses 1 à $n + 1$ des figures originales sont conservées ; le sujet précise que la barre d’abscisse $j + 1$ correspond à $P(X_n = j)$. Les cinq figures sont retranscrites en SVG dans l’énoncé à partir de l’original, avec les valeurs mesurées.