



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2015

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. (a) Il s'agit de vérifier que φ est linéaire et que $\varphi(P)$ appartient à E pour tout $P \in E$.

Linéarité. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q)' = \lambda(P'' - 2XP') + (Q'' - 2XQ') = \lambda\varphi(P) \\ &+ \varphi(Q).\end{aligned}$$

Stabilité. Calculons l'image des monômes. Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, on a $(X^j)' = jX^{j-1}$ et $(X^j)'' = j(j-1)X^{j-2}$ (ces expressions étant nulles lorsque le coefficient j ou $j(j-1)$ est nul), donc

$$\varphi(X^j) = j(j-1)X^{j-2} - 2jX^j.$$

En particulier $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -2X$ et, pour $j \geq 2$, $\varphi(X^j)$ est un polynôme de degré au plus $j \leq n$. Si

$$P = \sum_{j=0}^n c_j X^j \in E,$$

la linéarité donne

$$\varphi(P) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi(X^j) \in E.$$

Conclusion

φ est une application linéaire de E dans E , c'est-à-dire un endomorphisme de E .

(b) On utilise les images des vecteurs de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ calculées en

(a) : pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$\varphi(X^j) = j(j-1)X^{j-2} - 2jX^j.$$

En notant $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de φ dans la base canonique (lignes et colonnes indexées de 0 à n), la colonne d'indice j contient les coordonnées de $\varphi(X^j)$, d'où :

$m_{j,j} = -2j$ pour $0 \leq j \leq n$, $m_{j-2,j} = j(j-1)$ pour $2 \leq j \leq n$, et tous les autres coefficients sont nuls.

La matrice M est donc triangulaire supérieure, de diagonale $(0, -2, -4, \dots, -2n)$, avec pour seuls autres coefficients non nuls les $j(j-1)$ situés deux rangs au-dessus de la diagonale. Par exemple, pour $n = 4$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

la matrice de φ dans la base canonique est la matrice triangulaire supérieure M décrite ci-dessus.

(c) Méthode : on lit les valeurs propres sur la diagonale de la matrice triangulaire M , puis on utilise le critère « $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$ ».

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Les valeurs propres de φ sont donc les réels $0, -2, -4, \dots, -2n$, c'est-à-dire les $-2k$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

Ces $n + 1$ réels sont deux à deux distincts et $\dim E = n + 1$. Un endomorphisme d'un espace de dimension $n + 1$ possédant $n + 1$ valeurs propres distinctes est diagonalisable ; de plus, chacun de ses espaces propres est alors une droite (la somme des dimensions des espaces propres est au plus $n + 1$ et chacune vaut au moins 1).

Conclusion

φ est diagonalisable, de valeurs propres $-2k$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, et chaque espace propre est de dimension 1.

2. (a) Il faut établir la convergence de l'intégrale impropre sur $\mathbb{R}$; on montre sa convergence absolue par comparaison à une intégrale de Riemann.

Soient $P, Q \in E$ et $h(t) = P(t)Q(t)e^{-t^2}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$; l'intégrale n'est impropre qu'en $-\infty$ et $+\infty$.

Le polynôme $R = X^2PQ$ s'écrit

$$R = \sum_{j=0}^d r_j X^j.$$

Pour tout entier j , $|t|^j e^{-t^2} \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow +\infty$ (croissances comparées : en posant $s = t^2$, $|t|^j e^{-t^2} = s^{j/2} e^{-s} \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow +\infty$). Donc $t^2 h(t) = R(t) e^{-t^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.

Il existe donc $A > 0$ tel que pour $|t| \geq A$, $|h(t)| \leq \frac{1}{t^2}$. Comme $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$), le critère de comparaison pour les fonctions positives montre que $\int_A^{+\infty} |h(t)| dt$ converge ; de même $\int_{-\infty}^{-A} |h(t)| dt$ converge (par le changement de variable affine $t \mapsto -t$). Sur le segment $[-A, A]$, h est continue.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion

pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.

(b) On vérifie successivement la symétrie, la bilinéarité, la positivité et le caractère défini.

Symétrie : $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, donc $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.

Linéarité à gauche : pour $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les intégrales $\langle P_1, Q \rangle$ et $\langle P_2, Q \rangle$ convergent d'après (a), et la linéarité des intégrales convergentes donne $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$. Par symétrie, l'application est aussi linéaire à droite : elle est bilinéaire.

Positivité : $\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant).

Caractère défini : supposons $\langle P, P \rangle = 0$ et notons $k(t) = P(t)^2 e^{-t^2}$, fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde : s'il existait t_0 tel que $k(t_0) > 0$, par continuité il existerait $\eta > 0$ tel que $k(t) \geq \frac{k(t_0)}{2}$ sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$; par la relation de Chasles et la positivité de k ,

$$\langle P, P \rangle \geq \int_{t_0 - \eta}^{t_0 + \eta} k(t) dt \geq 2\eta \cdot \frac{k(t_0)}{2} > 0,$$

ce qui est absurde. Donc k est nulle sur $\mathbb{R}$; comme $e^{-t^2} > 0$, $P(t) = 0$ pour tout réel t . Le polynôme P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Conclusion

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , c'est-à-dire un produit scalaire.

3. Il faut montrer que pour tous $P, Q \in E$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$. L'idée est de reconnaître une dérivée, puis d'intégrer par parties sur un segment avant de passer à la limite.

Soient $P, Q \in E$ et $w(t) = P'(t)e^{-t^2}$. La fonction w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$w'(t) = P''(t)e^{-t^2} - 2tP'(t)e^{-t^2} = \varphi(P)(t)e^{-t^2}.$$

Soient $A, B > 0$. Les fonctions w et Q étant de classe C^1 sur le segment $[-A, B]$, une intégration par parties donne :

$$\int_{-A}^B \varphi(P)(t)Q(t)e^{-t^2} dt = \int_{-A}^B w'(t)Q(t) dt = \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2} \right]_{-A}^B - \int_{-A}^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.$$

Passage à la limite quand $A \rightarrow +\infty$ et $B \rightarrow +\infty$:

- le membre de gauche tend vers $\langle \varphi(P), Q \rangle$, qui converge d'après 2(a) puisque $\varphi(P) \in E$;
- le crochet vaut $P'(B)Q(B)e^{-B^2} - P'(-A)Q(-A)e^{-A^2}$; comme $P'Q$ est un polynôme, les croissances comparées vues en 2(a) montrent que ces deux termes tendent vers 0;
- l'intégrale de droite tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt = \langle P', Q' \rangle$, qui converge d'après 2(a) puisque $P', Q' \in E$.

On obtient donc, pour tous $P, Q \in E$:

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.$$

Le membre de droite est symétrique en P et Q ; en échangeant les rôles de P et Q , on obtient $\langle \varphi(Q), P \rangle = \langle \varphi(P), Q \rangle$, c'est-à-dire $\langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle \varphi(P), Q \rangle$.

Conclusion

φ est un endomorphisme symétrique de E pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque : avec $Q = P$, on obtient $\langle \varphi(P), P \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)^2 e^{-t^2} dt \leq 0$, ce qui est cohérent avec le fait que toutes les valeurs propres $-2k$ sont négatives.

4. (a) On procède par récurrence forte, en montrant simultanément que la famille est bien définie, que chaque P_k est unitaire de degré k et que les P_k sont deux à deux orthogonaux.

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, notons $\mathcal{H}_k$: « $P_0, \dots, P_k$ sont bien définis, pour tout $j \leq k$, P_j est unitaire de degré j , et $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ pour tous $i \neq j$ dans $\{0, \dots, k\}$ ».

Initialisation : $P_0 = 1$ est unitaire de degré 0 ; $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité : soit $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathcal{H}_{k-1}$ soit vraie. Pour $i \leq k-1$, P_i est unitaire, donc non nul, et $\langle P_i, P_i \rangle > 0$ car le produit scalaire est défini positif : les quotients intervenant dans la définition de P_k ont un sens et P_k est bien défini. Ensuite,

$$P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i P_i$$

avec des P_i de degré au plus $k-1$: P_k est unitaire de degré k . Enfin, pour $j \in \{0, \dots, k-1\}$, par bilinéarité et grâce à l'orthogonalité des P_i ($i \leq k-1$),

$$\langle P_k, P_j \rangle = \langle X^k, P_j \rangle - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} \langle P_i, P_j \rangle = \langle X^k, P_j \rangle - \frac{\langle P_j, X^k \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_j \rangle = 0.$$

Donc $\mathcal{H}_k$ est vraie.

Ainsi $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls. Elle est libre : si

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = 0,$$

le produit scalaire avec P_j donne $\lambda_j \langle P_j, P_j \rangle = 0$, donc $\lambda_j = 0$ pour tout j . Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, c'est une base.

Conclusion

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, et chaque P_k est unitaire de degré k .

(b) Il s'agit de montrer que, pour tout k , $\varphi(P_k)$ est colinéaire à P_k (avec $P_k \neq 0$). Deux approches classiques sont possibles : la première exploite la symétrie de φ et la stabilité des $\mathbb{R}_k[X]$; la seconde part de la diagonalisation de la question 1(c) et utilise l'orthogonalité des espaces propres d'un endomorphisme symétrique.

Méthode 1 — Symétrie et degrés.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. D'après le calcul de 1(a), $\varphi(X^j) \in \mathbb{R}_j[X]$ pour tout j , donc par linéarité $\varphi(\mathbb{R}_j[X]) \subset \mathbb{R}_j[X]$ pour tout $j \leq n$. En particulier $\varphi(P_k) \in \mathbb{R}_k[X]$.

La famille $(P_0, \dots, P_k)$ est orthogonale, formée de $k + 1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$, donc libre, et $\dim \mathbb{R}_k[X] = k + 1$: c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$. On peut donc écrire

$$\varphi(P_k) = \sum_{j=0}^k c_j P_j$$

et, en prenant le produit scalaire avec P_j , $c_j = \frac{\langle \varphi(P_k), P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}$.

Pour $j < k$: par la question 3, $\langle \varphi(P_k), P_j \rangle = \langle P_k, \varphi(P_j) \rangle$. Or $\varphi(P_j) \in \mathbb{R}_j[X] \subset \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$ et P_k est orthogonal à chacun de $P_0, \dots, P_{k-1}$, donc à leur espace engendré. Ainsi $c_j = 0$.

Donc $\varphi(P_k) = c_k P_k$ avec $P_k \neq 0$: P_k est un vecteur propre de φ . En comparant les coefficients de X^k : P_k est unitaire de degré k et le coefficient de X^k dans $\varphi(P_k)$ est $-2k$ (seul $-2X \cdot P'_k$ contribue en degré k), d'où $c_k = -2k$.

Méthode 2 — Diagonalisation et orthogonalité des espaces propres.

D'après 1(c), pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, l'espace propre E_{-2k} est une droite. Soit $Q \neq 0$ un vecteur de E_{-2k} , de degré d et de coefficient dominant $c \neq 0$. Le coefficient de X^d dans $\varphi(Q)$ est $-2dc$, et dans $-2kQ$ il vaut $-2kc$; donc $d = k$. On peut ainsi choisir dans E_{-2k} un unique polynôme unitaire Q_k , de degré k .

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux (question 3) : $\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

Montrons par récurrence forte que $Q_k = P_k$ pour tout k . On a $Q_0 = 1 = P_0$ (polynôme unitaire de degré 0). Soit $k \geq 1$ tel que $Q_j = P_j$ pour tout $j < k$. La famille $(Q_0, \dots, Q_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (famille orthogonale de k vecteurs non nuls dans un espace de dimension k). Comme Q_k est unitaire de degré k , $Q_k - X^k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc il existe des réels β_i tels que

$$Q_k = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i Q_i.$$

En prenant le produit scalaire avec Q_j ($j < k$) : $0 = \langle X^k, Q_j \rangle + \beta_j \langle Q_j, Q_j \rangle$, donc

$$\beta_j = -\frac{\langle Q_j, X^k \rangle}{\langle Q_j, Q_j \rangle}. \text{ Avec } Q_j = P_j \text{ pour } j < k, \text{ on obtient exactement la définition de } P_k : \\ Q_k = P_k.$$

Ainsi chaque $P_k = Q_k$ est un vecteur propre de φ , associé à la valeur propre $-2k$.

Comparaison des méthodes : la méthode 1 n'utilise que la symétrie de φ et le fait que φ ne fait pas augmenter le degré; elle s'adapte à tout endomorphisme symétrique qui laisse stables les $\mathbb{R}_k[X]$. La méthode 2 s'appuie sur la connaissance complète du spectre (question 1(c)) et montre en plus que la famille orthogonale de polynômes unitaires échelonnés en degré est unique.

Conclusion

la base $(P_0, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ , avec $\varphi(P_k) = -2kP_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

EXERCICE 2

1. (a) On cherche une racine évidente. $P(1) = 2 - 3 + 1 = 0$, donc $X - 1$ divise P . Par identification (ou division euclidienne) :

$$2X^3 - 3X^2 + 1 = (X - 1)(2X^2 - X - 1).$$

Le trinôme $2X^2 - X - 1$ admet aussi 1 pour racine ($2 - 1 - 1 = 0$), et le produit de ses racines vaut $-\frac{1}{2}$, donc l'autre racine est $-\frac{1}{2}$: $2X^2 - X - 1 = (X - 1)(2X + 1)$.

Conclusion

$$P(X) = (X - 1)^2(2X + 1).$$

- (b) Sur I , $\cos(x) > 0$, donc $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur I , de dérivée $\frac{1}{\cos^2}$; $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opérations, f puis u sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$:

$$u'(x) = \frac{1}{3} \left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) - 1 = \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{3\cos^2(x)} = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

Conclusion

u est dérivable sur I et $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$ pour tout $x \in I$.

- (c) D'après (a), $u'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2(2\cos(x) + 1)}{3\cos^2(x)}$. Pour $x \in I$, $0 < \cos(x) < 1$, donc $(\cos(x) - 1)^2 > 0$, $2\cos(x) + 1 > 0$ et $3\cos^2(x) > 0$. Ainsi $u'(x) > 0$ sur l'intervalle I .

Limites aux bornes : par continuité de $\sin$ et $\tan$ en 0 , $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$; comme $\tan(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, $u(x) \rightarrow +\infty$.

Conclusion

u est strictement croissante sur I , de limite 0 en 0^+ et $+\infty$ en $\frac{\pi^-}{2}$.

(d) Sur I , $2 + \cos(x) > 0$, donc g est dérivable sur I comme quotient, et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3 \cos(x)(2 + \cos(x)) + 3 \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{6 \cos(x) + 3(\cos^2(x) + \sin^2(x))}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{6 \cos(x) + 3}{(2 + \cos(x))^2}. \end{aligned}$$

Donc v est dérivable sur I et

$$v'(x) = 1 - g'(x) = \frac{4 + 4 \cos(x) + \cos^2(x) - 6 \cos(x) - 3}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) - 2 \cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}.$$

Conclusion

le polynôme $Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, de degré deux, convient : $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}$ pour tout $x \in I$.

(e) Pour $x \in I$, $\cos(x) \neq 1$, donc $v'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{(2 + \cos(x))^2} > 0$.

Limites : $v(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ (continuité de g en 0 , avec $g(0) = 0$) et $v(x) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}$ quand $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$.

Conclusion

v est strictement croissante sur I .

(f) Il s'agit de montrer que $u > 0$ et $v > 0$ sur I , à partir de leur stricte croissance et de leur limite nulle en 0^+ .

Méthode 1 — Monotonie et passage à la limite.

Soit $x \in I$. Pour tout $t \in \left]0, \frac{x}{2}\right]$, la croissance de u donne $u(t) \leq u\left(\frac{x}{2}\right)$; en faisant tendre t vers 0^+ , on obtient $0 \leq u\left(\frac{x}{2}\right)$. Comme u est strictement croissante, $u(x) > u\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$. Donc $f(x) > x$.

Le même raisonnement appliqué à v (strictement croissante, de limite 0 en 0^+) donne $v(x) > 0$, c'est-à-dire $g(x) < x$.

Méthode 2 — Accroissements finis.

Prolongeons u par continuité en 0 en posant $u(0) = 0$: u est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. L'égalité des accroissements finis fournit $c \in]0, x[$ tel que $u(x) - u(0) = xu'(c)$, et $u'(c) > 0$ d'après (c), donc $u(x) > 0$. De même pour v prolongée par $v(0) = 0$, avec $v'(c) > 0$ d'après (e).

La méthode 1 n'utilise que la monotonie et la limite; la méthode 2 utilise directement le signe strict de la dérivée et s'avère pratique dès qu'une fonction se prolonge par continuité en une borne.

Conclusion

pour tout $x \in I$, $g(x) < x < f(x)$.

2. (a) On applique les formules d'addition du cosinus et du sinus avec

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} :$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Enfin, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{6} - \sqrt{2}$:

$$\tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Conclusion

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}.$$

(b) Comme $\frac{\pi}{12} \in I$, la question 1(f) donne $g \left(\frac{\pi}{12} \right) < \frac{\pi}{12} < f \left(\frac{\pi}{12} \right)$, puis, en multipliant par $12 > 0$: $12 g \left(\frac{\pi}{12} \right) < \pi < 12 f \left(\frac{\pi}{12} \right)$.

Calcul de la borne supérieure :

$$12f \left(\frac{\pi}{12} \right) = 4 \left(2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + 2 - \sqrt{3} \right) = 8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3}.$$

Calcul de la borne inférieure :

$$12g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{36 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{2 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{36(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

Conclusion

$$\frac{36(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} < \pi < 8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3}.$$

À titre indicatif (valeurs numériques non demandées), cet encadrement s'écrit environ $3,14151 < \pi < 3,14235$.

3. (a) Pour tout réel θ , la formule d'addition du cosinus et l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donnent :

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et de même $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$, de sorte que $a_n = \sin(\theta_n)$, $b_n = \cos(\theta_n)$ et $2\theta_{n+1} = \theta_n$. En appliquant les formules à $\theta = \theta_{n+1}$:

$$b_n = 1 - 2a_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad b_n = 2b_{n+1}^2 - 1,$$

donc $a_{n+1}^2 = \frac{1 - b_n}{2}$ et $b_{n+1}^2 = \frac{1 + b_n}{2}$. Or $\theta_{n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$; on peut prendre les racines carrées.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 < \theta_n \leq \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, $\theta_n \in I$ et la question 1(f) donne $g(\theta_n) < \theta_n < f(\theta_n)$, soit, puisque $\tan(\theta_n) = \frac{a_n}{b_n}$ avec $b_n > 0$:

$$\frac{3a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

En multipliant par $3 \times 2^n > 0$:

Conclusion

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(c) On étudie la limite de $2^n a_n$ et de b_n .

On a $\theta_n \rightarrow 0$. La fonction $\sin$ est dérivable en 0 de dérivée $\cos(0) = 1$, donc $\frac{\sin(t)}{t} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$. Par composition avec la suite (θ_n) , qui tend vers 0 et ne s'annule pas, $\frac{a_n}{\theta_n} \rightarrow 1$, d'où

$$2^n a_n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a_n}{\theta_n} \rightarrow \frac{\pi}{3}.$$

Par continuité de $\cos$ en 0, $b_n \rightarrow 1$.

Par opérations sur les limites :

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} = \frac{9(2^n a_n)}{2+b_n} \rightarrow \frac{9 \cdot \frac{\pi}{3}}{3} = \pi, \quad 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right) = 2^n a_n \left(2 + \frac{1}{b_n} \right) \rightarrow \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \pi.$$

Conclusion

les deux termes de l'encadrement tendent vers π quand $n \rightarrow +\infty$.

(d) Code adapté en Python.

Notons $L_k = 9 \times 2^k \frac{a_k}{2 + b_k}$ et $U_k = 2^k \left(2a_k + \frac{a_k}{b_k} \right)$, de sorte que $L_k < \pi < U_k$. Si

$U_k - L_k \leq 2e$, le milieu $x = \frac{L_k + U_k}{2}$ vérifie $|x - \pi| \leq \frac{U_k - L_k}{2} \leq e$: c'est une approximation de π à e près. On itère donc tant que $U_k - L_k > 2e$.

Au début de chaque passage dans la boucle, on a $a = a_k$ et $b = b_k$ (initialement $a_0 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b_0 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Les relations (*) et (**) calculent a_{k+1} et b_{k+1} à partir de b_k seulement : il faut mettre à jour a avant b , puisque la nouvelle valeur de a utilise l'ancienne valeur de b .

Python

```
import numpy as np

def h(e):
    k = 0
    a = np.sqrt(3) / 2 # a_0 = sin(pi/3)
    b = 1 / 2          # b_0 = cos(pi/3)
    while 2**k * (2*a + a/b) - 9 * 2**k * a / (2 + b) > 2*e:
        a = np.sqrt((1 - b) / 2) # relation (*), utilise l'ancien b
        b = np.sqrt((1 + b) / 2) # relation (**)
        k = k + 1
    x = (2**k * (2*a + a/b) + 9 * 2**k * a / (2 + b)) / 2 # milieu de l'encadrement
    return x, k
```

Terminaison (mathématique) : d'après (c), $U_k - L_k \rightarrow 0$, donc la condition finit par être fausse pour tout $e > 0$. La fonction renvoie le milieu x de l'encadrement final et le nombre k d'itérations effectuées.

Une variante acceptable consiste à tester $U_k - L_k > e$ et à renvoyer l'une des deux bornes. C'est la version « milieu, test avec $2e$ » ci-dessus qui reproduit exactement le

graphe de la question (f).

Code exécuté : par exemple, $h(1e-6)$ renvoie $k = 5$ et une valeur x qui diffère de π d'environ 8×10^{-8} .

(e) Code adapté en Python.

On appelle h avec $e = 10^{-k}$ pour k de 1 à p et on stocke le second résultat. Attention : `range(1, p + 1)` parcourt $1, \dots, p$ (borne supérieure exclue), et la case d'indice $k - 1$ du tableau correspond à la précision 10^{-k} .

Python

```
import numpy as np

def nb_iterations(p):
    N = np.zeros(p)
    for k in range(1, p + 1):
        x, it = h(10**(-k))    # approximation à 10^(-k) près
        N[k - 1] = it         # nombre d'itérations nécessaires
    return N
```

Code exécuté avec $p = 30$; il renvoie les valeurs 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12 puis 13 quinze fois, c'est-à-dire exactement les valeurs du graphe de la question (f). Le tracé s'obtient par exemple avec :

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt

N = nb_iterations(30)
plt.plot(range(1, 31), N, '+')
plt.show()
```

(f) On distingue ce que prévoit l'analyse mathématique de ce qu'impose le calcul en virgule flottante.

Analyse de la largeur de l'encadrement. Avec les notations de (d), pour tout n ,

$$U_n - L_n = 2^n a_n \left(2 + \frac{1}{b_n} - \frac{9}{2 + b_n} \right) = 2^n a_n \cdot \frac{2b_n(2 + b_n) + (2 + b_n) - 9b_n}{b_n(2 + b_n)}$$

$$= \frac{2^{n+1} a_n (1 - b_n)^2}{b_n(2 + b_n)}.$$

D'après 3(a), $1 - b_n = 2a_{n+1}^2$ et, comme en (c), $a_{n+1} \sim \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$; donc
 $(1 - b_n)^2 = 4a_{n+1}^4 \sim \frac{\theta_n^4}{4}$ (puissance d'un équivalent). Avec $2^{n+1}a_n \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ et $b_n(2 + b_n) \rightarrow 3$, le produit des équivalents donne

$$U_n - L_n \sim \frac{\pi}{18} \theta_n^4 = \frac{\pi}{18} \left(\frac{\pi}{3} \right)^4 \frac{1}{16^n}.$$

La largeur est donc divisée par environ 16 à chaque itération. Pour atteindre la précision 10^{-k} , il faut $U_n - L_n \leq 2 \times 10^{-k}$, soit n de l'ordre de $\frac{k \ln(10)}{\ln(16)} \approx 0,83 k$: le nombre d'itérations doit croître linéairement avec k , avec une pente d'environ 0,83.

Partie croissante du graphe ($1 \leq k \leq 16$). On passe de 1 itération pour $k = 1$ à 13 itérations pour $k = 16$, soit une pente moyenne de $\frac{12}{15} = 0,8$, conforme à la prévision. Comme $16 > 10$, une itération fait parfois gagner plus d'une décimale : c'est pourquoi certaines valeurs apparaissent deux fois ($k = 1, 2$; $k = 7, 8$; $k = 12, 13$). Les valeurs exactes de la largeur, $U_1 - L_1 \approx 1,4 \times 10^{-2}$, $U_5 - L_5 \approx 2,0 \times 10^{-7}$, $U_{13} - L_{13} \approx 4,7 \times 10^{-17}$, confirment les valeurs obtenues jusqu'à $k = 16$.

Palier ($k \geq 16$). Mathématiquement, le nombre d'itérations devrait continuer à croître (environ 25 pour $k = 30$). Le palier à 13 provient de l'arithmétique des nombres flottants, qui ne conserve qu'environ 16 chiffres significatifs (précision relative de l'ordre de 10^{-16}). D'une part, la quantité $2 + \frac{1}{b} - \frac{9}{2+b}$ est la différence de deux nombres voisins de 3 dont la vraie valeur, à la 13e itération, est inférieure à 10^{-16} : sa valeur calculée n'est plus que du bruit d'arrondi, et le test de la boucle devient faux, quelle que soit la précision demandée. D'autre part, le calcul de a par $\sqrt{\frac{1-b}{2}}$ soustrait deux nombres très proches (b est proche de 1), ce qui fait perdre beaucoup de chiffres significatifs.

Code exécuté : l'écart mesuré entre la valeur renvoyée et π vaut environ $9,9 \times 10^{-12}$ pour $k = 11$, $4,4 \times 10^{-11}$ pour $k = 12$ et environ $2,9 \times 10^{-10}$ pour tout $k \geq 16$. Dès $k = 12$, la

valeur renvoyée n'est donc plus une approximation de π à 10^{-k} près, bien que la boucle se soit arrêtée.

Conclusion

le graphe illustre la convergence géométrique de raison environ $\frac{1}{16}$ de la largeur de l'encadrement (croissance linéaire du nombre d'itérations, pente voisine de 0,83) jusqu'à une précision de l'ordre de 10^{-15} ; au-delà, le palier traduit les limites de la précision machine et non une propriété mathématique de la méthode. Le résultat mathématique est démontré en 3(b) et 3(c); les valeurs numériques ne sont que des observations.

Remarque : on limite la perte de précision en calculant a_{k+1} par $a_{k+1} = \frac{a_k}{2b_{k+1}}$ (conséquence de $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$), qui évite la soustraction $1 - b_k$.

PROBLÈME

Partie A - Résultats préliminaires

1. On passe par l'événement contraire $[Y_n > x]$, qui s'exprime comme une intersection, puis on utilise l'indépendance.

Soient $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$. Le minimum de $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ est strictement supérieur à x si et seulement si chacun des $X_i(\omega)$ l'est, donc

$$[Y_n > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x].$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, les événements $[X_1 > x], \dots, [X_n > x]$ sont mutuellement indépendants. Comme les X_i ont la même loi que X , $P(X_i > x) = 1 - F(x)$ pour tout i . Donc

$$P(Y_n > x) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = (1 - F(x))^n.$$

Conclusion

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - (1 - F(x))^n \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2. On utilise la caractérisation des variables à densité par leur fonction de répartition : continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Comme X admet la densité f , il existe une partie finie D de $\mathbb{R}$ telle que F soit continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$, avec $F' = f$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ (on peut prendre pour D l'ensemble fini des points de discontinuité de f).

D'après la question 1, $F_n = 1 - (1 - F)^n$. Par composition avec la fonction polynomiale $s \mapsto 1 - (1 - s)^n$, F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$, avec pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$:

$$F'_n(x) = n F'(x) (1 - F(x))^{n-1} = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$$

Donc Y_n est une variable à densité. Toute fonction positive égale à F'_n sauf en un nombre fini de points est une densité de Y_n ; c'est le cas de la fonction

$f_n : x \mapsto n f(x) (1 - F(x))^{n-1}$, définie sur tout $\mathbb{R}$, positive car $f \geq 0$ et $1 - F \geq 0$, continue sauf éventuellement aux points de D .

Conclusion

$$Y_n \text{ admet la densité } f_n \text{ définie par } f_n(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Préliminaires communs aux sous-questions. Comme V est positive, $\Phi(x) = 0$ pour $x < 0$, et $P(V = 0) = 0$ puisque V est à densité ; donc $\int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt = \Phi(0) = 0$. La fonction φ étant positive et continue sauf en un nombre fini de points, elle est nulle sur $] - \infty, 0[$ sauf peut-être en un nombre fini de points (même argument de

positivité qu'à l'exercice 1, question 2(b), sur chaque intervalle où elle est continue).

Par conséquent $\int_{-\infty}^0 t\varphi(t) dt$ converge et vaut 0, et :

- V admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} t\varphi(t) dt$ converge (l'intégrande étant positif sur $[0, +\infty[$, convergence et convergence absolue coïncident), et alors

$$E(V) = \int_0^{+\infty} t\varphi(t) dt;$$

- pour $x \geq 0$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$; comme φ est continue sur $[0, +\infty[$, le théorème fondamental du calcul intégral montre que Φ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec $\Phi' = \varphi$;

- pour $x \geq 0$, $1 - \Phi(x) = P(V > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$.

(a) Méthode 1 — Intégration par parties.

Soit $x \geq 0$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \Phi(t) - 1$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$, de dérivées 1 et φ . Par intégration par parties sur ce segment :

$$\int_0^x t\varphi(t) dt = \left[t(\Phi(t) - 1) \right]_0^x - \int_0^x (\Phi(t) - 1) dt = -x(1 - \Phi(x)) + \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt.$$

Méthode 2 — Dérivation d'une différence.

Pour $x \geq 0$, posons $D(x) = \int_0^x t\varphi(t) dt - \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt + x(1 - \Phi(x))$. Les intégrandes $t \mapsto t\varphi(t)$ et $1 - \Phi$ sont continus sur $[0, +\infty[$ et Φ y est de classe C^1 , donc D est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$D'(x) = x\varphi(x) - (1 - \Phi(x)) + (1 - \Phi(x)) - x\varphi(x) = 0.$$

Donc D est constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, égale à $D(0) = 0$.

La méthode 1 produit directement la formule ; la méthode 2 permet de vérifier une identité intégrale connue à l'avance sans avoir à deviner le découpage de l'intégration par parties.

Conclusion

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad \int_0^x t\varphi(t) dt = \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt - x(1 - \Phi(x)).$$

(b) On encadre $x(1 - \Phi(x))$ par le reste d'une intégrale convergente.

Soit $x \geq 0$. Pour $t \geq x$, $x\varphi(t) \leq t\varphi(t)$ car $\varphi(t) \geq 0$. Par positivité et croissance de l'intégrale (les intégrales convergent : la première car φ est une densité, la seconde car V admet une espérance),

$$0 \leq x(1 - \Phi(x)) = \int_x^{+\infty} x\varphi(t) dt \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt = E(V) - \int_0^x t\varphi(t) dt.$$

Le membre de droite tend vers $E(V) - E(V) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $x(1 - \Phi(x)) \rightarrow 0$.

D'après (a), pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x (1 - \Phi(t)) dt = \int_0^x t\varphi(t) dt + x(1 - \Phi(x)) \rightarrow E(V) + 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Conclusion

$$x(1 - \Phi(x)) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty, \text{ et } \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt \text{ converge, avec } \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt = E(V).$$

(c) On montre que la fonction $x \mapsto \int_0^x t\varphi(t) dt$ est croissante et majorée.

Pour $x \geq 0$, d'après (a), et comme $x(1 - \Phi(x)) \geq 0$ et $1 - \Phi \geq 0$:

$$\int_0^x t\varphi(t) dt \leq \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x t\varphi(t) dt$ est croissante sur $[0, +\infty[$ (intégrande positif) et majorée : par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$. Donc

$\int_0^{+\infty} t\varphi(t) dt$ converge, et absolument puisque l'intégrande est positif.

Conclusion

V admet une espérance.

(d) Les questions (b) et (c) donnent les deux implications ; la question (b) donne en outre la valeur de l'intégrale.

Conclusion

V admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge, et dans ce cas $E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$.

Ce résultat est admis par l'énoncé lorsque φ est seulement continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points ; c'est donc le cas pour toute variable à densité positive.

Partie B - Quelques exemples

4. (a) La fonction f est continue sauf en 0 ; elle est positive si et seulement si $\alpha \geq 0$. Pour $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}(A) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (A \rightarrow +\infty),$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \alpha \frac{\pi}{2}$, qui vaut 1 si et seulement si $\alpha = \frac{2}{\pi}$ (valeur positive).

Conclusion

$$\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

(b) Pour $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f = 0$. Pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x).$$

Conclusion

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } F(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) \text{ si } x \geq 0.$$

(c) D'après A.1, $F_2 = 1 - (1 - F)^2$:

$$F_2(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_2(x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right)^2 \text{ si } x \geq 0.$$

Comme X admet une densité, la question A.2 montre que Y_2 admet la densité $f_2 = 2f(1 - F)$:

$$f_2(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x)\right) \text{ si } x \geq 0.$$

Conclusion

F_2 et f_2 sont données ci-dessus ; Y_2 est bien une variable à densité.

(d) Méthode 1 — Étude de fonction.

Soit $k(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$. La fonction k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$k'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, k y est constante, égale à $k(1) = 2 \text{Arctan}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Méthode 2 — Angle complémentaire.

Soit $x > 0$ et $\theta = \text{Arctan}(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que $\tan(\theta) = x$. Les formules d'addition donnent $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$, donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{x}.$$

Comme $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que Arctan est la réciproque de la restriction de $\tan$ à cet intervalle, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

La méthode 1 est l'outil général pour établir une identité entre fonctions sur un intervalle ; la méthode 2 explique géométriquement l'identité par les angles complémentaires.

Conclusion

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(e) Pour $x > 0$, d'après (d),

$$1 - F(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \right) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction Arctan est dérivable en 0, de dérivée 1, donc $\frac{\text{Arctan}(u)}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$, $u \neq 0$; avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, on obtient $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$. Ainsi $1 - F(x) \sim \frac{2}{\pi x}$.

Par ailleurs $f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{2}{\pi x^2}$. Par produit d'équivalents :

$$f_2(x) = 2f(x)(1 - F(x)) \sim 2 \cdot \frac{2}{\pi x^2} \cdot \frac{2}{\pi x}.$$

Conclusion

$$f_2(x) \sim \frac{8}{\pi^2 x^3} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

(f) Il faut montrer que X n'admet pas d'espérance mais que Y_2 en admet une ; l'indice vaudra alors 2, plus petite valeur possible.

Méthode 1 — Avec les densités.

Les variables X et Y_2 sont positives (densités nulles sur $] -\infty, 0[$), donc l'existence de l'espérance équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$, respectivement

$\int_0^{+\infty} t f_2(t) dt$, intégrales de fonctions continues et positives sur $[0, +\infty[$.

Pour X : $tf(t) = \frac{2t}{\pi(1+t^2)} \sim \frac{2}{\pi t}$ en $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge ; par comparaison de fonctions positives équivalentes, $\int_1^{+\infty} tf(t) dt$ diverge. Donc X n'admet pas d'espérance.

Pour Y_2 : d'après (e), $tf_2(t) \sim \frac{8}{\pi^2 t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ; donc $\int_1^{+\infty} tf_2(t) dt$ converge, et $\int_0^1 tf_2(t) dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Donc Y_2 admet une espérance.

Méthode 2 — Avec la question A.3.

Les densités f et f_2 (définies par leurs expressions pour $x \geq 0$) sont continues sur $\mathbb{R}^+$, donc la question 3 s'applique à X et à Y_2 .

On a $1 - F(t) \sim \frac{2}{\pi t}$ (question (e)), donc $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$ diverge : X n'admet pas d'espérance.

On a $1 - F_2(t) = (1 - F(t))^2 \sim \frac{4}{\pi^2 t^2}$, donc $\int_0^{+\infty} (1 - F_2(t)) dt$ converge (fonction continue et positive, comparaison à une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$) : Y_2 admet une espérance.

La méthode 1 utilise l'équivalent de f_2 demandé en (e) ; la méthode 2 évite tout calcul de densité, car la queue $1 - F_n = (1 - F)^n$ se calcule directement : c'est l'outil le plus efficace dans la suite du problème.

Conclusion

la loi de X est implosive, d'indice d'implosion 2.

5. (a) Les termes sont positifs car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $N \in \mathbb{N}$, la somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^N P(X = k) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \rightarrow 1.$$

Conclusion

la série converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

(b) Comme X est positive, X admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum k P(X = k)$$

converge.

Méthode 1 — Équivalent du terme général.

En réduisant au même dénominateur puis en multipliant par la quantité conjuguée :

$$P(X = k) = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})}.$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, $\sqrt{k+1} \sim \sqrt{k}$, $\sqrt{k+2} \sim \sqrt{k}$ et

$$\frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}{\sqrt{k}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k}} + \sqrt{1 + \frac{2}{k}} \rightarrow 2. \text{ Par produit et quotient d'équivalents,}$$

$$P(X = k) \sim \frac{1}{2k^{3/2}}, \text{ donc } k P(X = k) \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}. \text{ La série de Riemann}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$$

diverge (exposant $\frac{1}{2} \leq 1$) ; par comparaison de séries à termes positifs équivalents,

$$\sum k P(X = k)$$

diverge.

Méthode 2 — Transformation d'Abel (calcul exact des sommes partielles).

Notons $w_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, de sorte que $P(X = k) = w_k - w_{k+1}$. Pour $N \geq 1$, par décalage d'indice :

$$S_N = \sum_{k=0}^N k(w_k - w_{k+1}) = \sum_{k=0}^N kw_k - \sum_{j=1}^{N+1} (j-1)w_j = \sum_{j=1}^N w_j - Nw_{N+1}.$$

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, pour $j \geq 1$, $w_j = \frac{1}{\sqrt{j+1}} \geq \int_{j+1}^{j+2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, donc

$$\sum_{j=1}^N w_j \geq \int_2^{N+2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{N+2} - 2\sqrt{2}.$$

Comme $Nw_{N+1} = \frac{N}{\sqrt{N+2}} \leq \sqrt{N+2}$:

$$S_N \geq \sqrt{N+2} - 2\sqrt{2} \rightarrow +\infty.$$

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 montre comment exploiter directement la forme télescopique de la loi.

Conclusion

X n'admet pas d'espérance.

(c) Pour $k \in \mathbb{N}$, par le même calcul télescopique qu'en (a) :

$$F(k) = \sum_{j=0}^k P(X = j) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

Conclusion

$$F(k) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

(d) La variable Y_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $P(Y_2 = k) = F_2(k) - F_2(k-1)$ pour $k \geq 1$ et $P(Y_2 = 0) = F_2(0)$. D'après A.1 et (c), pour $k \in \mathbb{N}$,

$$F_2(k) = 1 - (1 - F(k))^2 = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Pour $k \geq 1$: $P(Y_2 = k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$; pour $k = 0$:

$P(Y_2 = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$. La formule est donc valable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Espérance : $k P(Y_2 = k) = \frac{k}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k}$ et la série harmonique diverge ; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum k P(Y_2 = k)$$

diverge.

Conclusion

$$Y_2(\Omega) = \mathbb{N} \text{ avec } P(Y_2 = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \text{ et } Y_2 \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

(e) De même, $F_3(k) = 1 - (1 - F(k))^3 = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$ pour $k \in \mathbb{N}$, d'où, pour $k \geq 1$,
 $P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$, et $P(Y_3 = 0) = 1 - \frac{1}{2^{3/2}}$, ce qui correspond à la même formule pour $k = 0$.

Espérance : pour $k \in \mathbb{N}$, avec $u_k = \frac{1}{k+1}$,

$$P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} \left(1 - (1 + u_k)^{-3/2} \right).$$

Le développement limité usuel $(1 + u)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}u + o(u)$ en 0 donne

$$1 - (1 + u_k)^{-3/2} \sim \frac{3}{2}u_k, \text{ donc } P(Y_3 = k) \sim \frac{3}{2(k+1)^{5/2}} \sim \frac{3}{2k^{5/2}} \text{ et}$$

$k P(Y_3 = k) \sim \frac{3}{2k^{3/2}}$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{k^{3/2}}$$

converge (exposant $\frac{3}{2} > 1$) ; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum k P(Y_3 = k)$$

converge.

Conclusion

$$P(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ et } Y_3 \text{ admet une espérance.}$$

(f) D'après (b), (d) et (e) : X n'admet pas d'espérance, Y_2 non plus, mais Y_3 en admet une.

Conclusion

la loi de X est implosive, d'indice d'implosion 3.

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

6. (a) Pour f positive, il faut $a \geq 0$; f est continue sauf en 1. Pour $A > 1$, comme $\alpha > 1$:

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1 - A^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} \quad (A \rightarrow +\infty).$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{a}{\alpha - 1}$, qui vaut 1 si et seulement si $a = \alpha - 1 > 0$.

Conclusion

$$a = \alpha - 1.$$

(b) Pour $x < 1$, $F(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x \frac{\alpha - 1}{t^\alpha} dt = 1 - x^{1-\alpha}$.

Conclusion

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 1 \text{ et } F(x) = 1 - x^{1-\alpha} \text{ si } x \geq 1.$$

(c) La variable X est positive, donc elle admet une espérance si et seulement si

$$\int_1^{+\infty} t \cdot \frac{\alpha - 1}{t^\alpha} dt = (\alpha - 1) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha-1}} \text{ converge, c'est-à-dire, d'après le critère de}$$

Riemann, si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Conclusion

$$X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 2; \text{ dans ce cas } E(X) = (\alpha - 1) \cdot \frac{1}{\alpha - 2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}.$$

(d) On montre que Y_n suit une loi du même type, de paramètre $\beta_n = n(\alpha - 1) + 1$, puis on applique (c).

Soit $n \geq 2$. D'après A.1 et (b) : $F_n(x) = 0$ si $x < 1$ et, pour $x \geq 1$,

$$F_n(x) = 1 - (x^{1-\alpha})^n = 1 - x^{n(1-\alpha)} = 1 - x^{1-\beta_n} \quad \text{avec} \quad \beta_n = n(\alpha - 1) + 1 > 1.$$

D'après A.2, Y_n admet la densité f_n nulle sur $] -\infty, 1[$ et, pour $x \geq 1$,

$$f_n(x) = n \frac{\alpha - 1}{x^\alpha} (x^{1-\alpha})^{n-1} = \frac{n(\alpha - 1)}{x^{n(\alpha-1)+1}} = \frac{\beta_n - 1}{x^{\beta_n}}.$$

C'est exactement la densité étudiée en (a) avec le paramètre $\beta_n > 1$ à la place de α .

D'après (c), Y_n admet une espérance si et seulement si $\beta_n > 2$, c'est-à-dire $n(\alpha - 1) > 1$.

Conclusion

$$\text{pour } n \geq 2, Y_n \text{ admet une espérance si et seulement si } n > \frac{1}{\alpha - 1}.$$

(e) Soit $m \geq 2$. On cherche α tel que X n'ait pas d'espérance ($\alpha \leq 2$) et que le plus petit entier $n \geq 2$ vérifiant $n > \frac{1}{\alpha - 1}$ soit m .

Choisissons $\alpha = 1 + \frac{1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$. Alors $\alpha > 1$ et $\alpha \leq 2$ car $m - 1 \geq 1$: d'après (c),

X n'admet pas d'espérance. De plus $\frac{1}{\alpha - 1} = m - 1$, donc d'après (d), pour $n \geq 2$, Y_n admet une espérance si et seulement si $n > m - 1$, soit $n \geq m$. Ainsi Y_m admet une espérance et, si $m \geq 3$, Y_n n'en admet pas pour $2 \leq n \leq m - 1$.

Conclusion

oui. Pour tout entier $m \geq 2$, la loi de densité $x \mapsto \frac{1}{(m-1)x^{m/(m-1)}}$ sur $[1, +\infty[$ (nulle ailleurs) est implosive, d'indice d'implosion m .

Partie D - Lois non implosives

7. (a) Pour f positive, il faut $a \geq 0$; f est continue sauf en 2. Pour $A > 2$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$ sur $[2, +\infty[$ est $x \mapsto -\frac{1}{\ln(x)}$, donc

$$\int_2^A \frac{dx}{x \ln^2(x)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)} \rightarrow \frac{1}{\ln(2)} \quad (A \rightarrow +\infty).$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{a}{\ln(2)}$, qui vaut 1 si et seulement si $a = \ln(2) > 0$.

Conclusion

$$a = \ln(2).$$

- (b) Pour $x < 2$, $F(x) = 0$. Pour $x \geq 2$, d'après le calcul précédent :

$$F(x) = \ln(2) \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(x)}.$$

Conclusion

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 2 \text{ et } F(x) = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(x)} \text{ si } x \geq 2.$$

- (c) La variable X est positive; elle admet une espérance si et seulement si

$$\int_2^{+\infty} t f(t) dt = \ln(2) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln^2(t)} \text{ converge.}$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln^2(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$; il existe donc $T \geq 2$ tel que $\ln^2(t) \leq t$, soit $\frac{1}{\ln^2(t)} \geq \frac{1}{t} > 0$, pour $t \geq T$. Comme $\int_T^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, le critère de comparaison pour les fonctions positives montre que $\int_T^{+\infty} \frac{dt}{\ln^2(t)}$ diverge.

Conclusion

X n'admet pas d'espérance.

(d) Soit $n \geq 2$. D'après A.1 et (b), $F_n(x) = 0$ si $x < 2$ et $1 - F_n(x) = \left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^n$ si $x \geq 2$. D'après A.2, Y_n admet la densité f_n nulle sur $] -\infty, 2[$ et, pour $x \geq 2$,

$$f_n(x) = n \frac{\ln(2)}{x \ln^2(x)} \left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^{n-1} = \frac{n(\ln 2)^n}{x(\ln x)^{n+1}}.$$

Méthode 1 — Avec la densité.

Y_n est positive; elle admet une espérance si et seulement si

$\int_2^{+\infty} t f_n(t) dt = n(\ln 2)^n \int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}$ converge. Par croissances comparées, $\frac{(\ln t)^{n+1}}{t} \rightarrow 0$, donc il existe $T_n \geq 2$ tel que $\frac{1}{(\ln t)^{n+1}} \geq \frac{1}{t}$ pour $t \geq T_n$. Par comparaison avec $\int_{T_n}^{+\infty} \frac{dt}{t}$, qui diverge, l'intégrale diverge.

Méthode 2 — Avec la question A.3.

La densité f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en 2 : d'après le résultat admis à la fin de la partie A, Y_n admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(t)) dt$ converge. Or, pour

$t \geq T'_n$ convenable, $(\ln t)^n \leq t$ (croissances comparées), donc

$1 - F_n(t) = \frac{(\ln 2)^n}{(\ln t)^n} \geq \frac{(\ln 2)^n}{t}$, et $\int_{T'_n}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge : l'intégrale diverge.

La méthode 1 demande le calcul de f_n ; la méthode 2 n'utilise que la queue

$1 - F_n = (1 - F)^n$, immédiate à partir de A.1, ce qui la rend plus rapide.

Conclusion

pour tout $n \geq 2$, Y_n n'admet pas d'espérance.

(e) D'après (c), X est une variable aléatoire positive sans espérance, et d'après (d), aucune des variables Y_m , $m \geq 2$, n'admet d'espérance : la loi de X n'est pas implosive.

Conclusion

oui, il existe des variables aléatoires positives sans espérance dont la loi n'est pas implosive, par exemple la variable de densité $x \mapsto \frac{\ln(2)}{x \ln^2(x)}$ sur $[2, +\infty[$ (nulle ailleurs).

Partie E - Variables implosant sur une autre

8. On note F_Y la fonction de répartition de Y . La démonstration de A.1 n'utilise pas la positivité de X : elle reste valable pour une variable réelle X . Comme Y_n et Y ont la même loi, elles ont la même fonction de répartition, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - F_Y(x) = 1 - F_n(x) = (1 - F(x))^n.$$

Comme $1 - F(x) \geq 0$ et que $t \mapsto t^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, de réciproque $t \mapsto t^{1/n}$, on obtient $1 - F(x) = (1 - F_Y(x))^{1/n}$.

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 1 - (1 - F_Y(x))^{1/n}$.

9. On raisonne par l'absurde : on suppose qu'une telle variable X existe, on détermine sa loi grâce à la question 8 et on obtient une contradiction.

Supposons que X soit implosive, d'indice m , et implose sur Y . Alors Y_m a la même loi que Y et, d'après la question 8, $1 - F(x) = (1 - F_Y(x))^{1/m}$ pour tout réel x .

Notons $q = 1 - p \in]0, 1[$. La variable Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $P(Y > j) = q^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour $x \geq 0$, comme Y est à valeurs entières, $P(Y > x) = P(Y > \lfloor x \rfloor) = q^{\lfloor x \rfloor}$; pour $x < 0$, $P(Y > x) = 1$. Avec $r = q^{1/m} \in]0, 1[$, on obtient :

$$1 - F(x) = 1 \text{ si } x < 0, \quad 1 - F(x) = r^{\lfloor x \rfloor} \text{ si } x \geq 0.$$

Ce sont exactement les valeurs de $1 - F_W$ pour une variable W suivant la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - r \in]0, 1[$ (même calcul que pour Y). La fonction de répartition caractérisant la loi, X suit la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - (1 - p)^{1/m}$. Elle admet donc une espérance, égale à $\frac{1}{p'}$, ce qui contredit le fait que X est implosive.

Conclusion

aucune variable aléatoire implosive n'implose sur une variable de loi géométrique.

10. On utilise la loi de la partie C : il suffit de prendre pour Y le minimum Y_m lui-même.

Soit $m \geq 2$. Soit X de densité f de la partie C avec $\alpha = \frac{m}{m-1}$; d'après 6(e), la loi de X est implosive d'indice d'implosion m . Posons $Y = Y_m = \min(X_1, \dots, X_m)$. D'après 6(d), Y est positive (elle est à valeurs dans $[1, +\infty[$) et admet une espérance. Par construction, Y_m a la même loi que Y , donc X implose sur Y .

Plus précisément, d'après 6(d), Y admet la densité $x \mapsto \frac{\beta-1}{x^\beta}$ sur $[1, +\infty[$ (nulle ailleurs) avec $\beta = m(\alpha - 1) + 1 = \frac{2m-1}{m-1}$, et $E(Y) = \frac{\beta-1}{\beta-2} = m$.

Conclusion

pour tout $m \geq 2$, la variable Y de densité $x \mapsto \frac{m}{(m-1)x^{(2m-1)/(m-1)}}$ sur $[1, +\infty[$ admet une espérance, et la variable X de densité $x \mapsto \frac{1}{(m-1)x^{m/(m-1)}}$ sur $[1, +\infty[$ est implosive d'indice m et implose sur Y .

11. Question adaptée au programme actuel (rectification d'une erreur d'énoncé). Le PDF demande de montrer la conclusion « pour tout entier k tel que $k \geq m$ ». Cet énoncé est faux ; la version rectifiée porte sur les entiers k tels que $2 \leq k \leq m$.

Pourquoi l'énoncé original est faux. Prenons les variables de la question 10 avec $m = 2$: X de densité $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$ et $Y = Y_2$, de fonction de répartition $G(x) = 1 - x^{-2}$ pour $x \geq 1$ ($G(x) = 0$ sinon) ; Y admet une densité et X implose sur Y avec l'indice 2. Supposons qu'une variable X' implosive d'indice 3 implose sur Y . D'après la question 8, sa fonction de répartition vérifie $1 - F_{X'} = (1 - G)^{1/3}$, donc le minimum Y'_2 de deux copies indépendantes de X' vérifie, d'après A.1, $1 - F_{Y'_2}(x) = (1 - G(x))^{2/3} = x^{-4/3}$ pour $x \geq 1$. Comme $\int_1^{+\infty} x^{-4/3} dx$ converge, Y'_2 admet une espérance (question A.3 et résultat admis, Y'_2 étant à densité d'après le lemme ci-dessous), donc l'indice de X' vaut au plus 2 : contradiction. Pour cette variable Y , aucune variable implosive d'indice 3 n'implose sur Y .

Démonstration de l'énoncé rectifié.

Notations. Y admet une densité g , donc G est continue sur $\mathbb{R}$, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, nulle sur $] -\infty, 0[$ (Y est positive), et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie. Pour $s > 0$, posons pour tout réel x :

$$H_s(x) = 1 - (1 - G(x))^s.$$

Lemme. Pour tout $s > 0$: (i) il existe une variable aléatoire positive à densité de fonction de répartition H_s ; (ii) toute variable aléatoire de fonction de répartition H_s admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (1 - G(t))^s dt$ converge.

Preuve du lemme. La fonction H_s est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues,

$1 - G$ étant à valeurs dans $[0, 1]$, croissante (car $t \mapsto 1 - (1 - t)^s$ est croissante sur $[0, 1]$), nulle sur $] -\infty, 0[$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Régularité : notons $x_0 = \min\{x \in \mathbb{R} \mid G(x) = 1\}$ lorsque cet ensemble est non vide (il est alors de la forme $[x_0, +\infty[$ par continuité et croissance de G). Si $x \notin D$ et $G(x) < 1$, alors $G < 1$ au voisinage de x par continuité, et $t \mapsto (1 - t)^s$ est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$: H_s est de classe C^1 au voisinage de x . Si $x > x_0$, H_s est constante égale à 1 sur $]x_0, +\infty[$. Donc H_s est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble fini $D \cup \{x_0\}$.

Notons h_s la fonction égale à H'_s hors de $D \cup \{x_0\}$ et à 0 en ces points : elle est positive (car H_s est croissante), continue sauf en un nombre fini de points, et, par le théorème fondamental du calcul intégral appliqué sur chaque intervalle où H_s est de classe C^1 , avec la continuité de H_s aux points de raccord, $\int_{-\infty}^x h_s = H_s(x)$ pour tout x ; en

particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} h_s = 1$. D'après le résultat du programme selon lequel toute fonction positive, continue sauf en un nombre fini de points et d'intégrale égale à 1 est la densité d'une variable aléatoire, il existe une variable de densité h_s , dont la fonction de répartition est $x \mapsto \int_{-\infty}^x h_s = H_s$; elle est positive car $H_s(x) = 0$ pour $x < 0$. Cela prouve (i).

Pour (ii), une variable de fonction de répartition H_s est positive et à densité (fonction de répartition continue, de classe C^1 sauf en un nombre fini de points), de densité continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points ; la question A.3, étendue par le résultat admis, donne l'équivalence, puisque $1 - H_s = (1 - G)^s$.

Utilisation de l'hypothèse. Soit X implosive d'indice m qui implose sur Y . D'après la question 8, $F = H_{1/m}$ et, d'après A.1, pour $i \geq 2$, $F_i = 1 - (1 - H_{1/m})^i = H_{i/m}$. Par définition de l'indice d'implosion, X n'admet pas d'espérance et, si $m \geq 3$, Y_{m-1} non plus. Dans les deux cas (X si $m = 2$, Y_{m-1} si $m \geq 3$), une variable de fonction de répartition $H_{(m-1)/m}$ n'admet pas d'espérance ; d'après le lemme (ii) :

$$(\star) \quad \int_0^{+\infty} (1 - G(t))^{(m-1)/m} dt \text{ diverge.}$$

Construction. Soit k un entier tel que $2 \leq k \leq m$. D'après le lemme (i), il existe une variable aléatoire positive X' de fonction de répartition $H_{1/k}$; comme dans le

préambule, on lui associe une suite $(X'_i)_{i \geq 1}$ de variables mutuellement indépendantes de même loi que X' , et on note $Y'_j = \min(X'_1, \dots, X'_j)$. D'après A.1, pour $j \geq 2$, la fonction de répartition de Y'_j est $1 - (1 - H_{1/k})^j = H_{j/k}$; celle de X' est $H_{1/k}$.

Cas $j = k$: $H_{k/k} = H_1 = G$, donc Y'_k a la même loi que Y ; comme Y admet une espérance, Y'_k aussi.

Cas $1 \leq j \leq k-1$ (où $j = 1$ désigne X' lui-même) : on a $\frac{j}{k} \leq 1 - \frac{1}{k} \leq 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$ car $k \leq m$. Pour $c \in [0, 1]$, la fonction $s \mapsto c^s$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $t \geq 0$:

$$(1 - G(t))^{j/k} \geq (1 - G(t))^{(m-1)/m} \geq 0.$$

D'après $(\star)$ et le critère de comparaison pour les fonctions positives,

$\int_0^{+\infty} (1 - G(t))^{j/k} dt$ diverge; d'après le lemme (ii), X' n'admet pas d'espérance et Y'_j n'en admet pas pour $2 \leq j \leq k-1$.

Ainsi la loi de X' est implosive, d'indice d'implosion exactement k , et Y'_k a la même loi que Y : X' implose sur Y .

Remarque : la question 8 montre qu'une variable implosant sur Y avec l'indice k a nécessairement pour fonction de répartition $H_{1/k}$; le contre-exemple ci-dessus montre que cette variable peut avoir un indice strictement inférieur à k lorsque $k > m$, ce qui explique la rectification.

Conclusion

s'il existe une variable implosive d'indice m qui implose sur Y , alors pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$, il existe une variable implosive d'indice k qui implose sur Y (et, en général, ce n'est pas vrai pour $k > m$).

Partie F - Variables explosives

Dans cette partie, X est, comme dans tout le problème, une variable positive ; on la suppose discrète ou à densité, cadre dans lequel l'espérance est définie. Les variables Z_n sont alors discrètes ou à densité : dans le cas à densité, $[Z_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$ et l'indépendance donnent $P(Z_n \leq x) = F(x)^n$, fonction continue et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, de dérivée $nf(x)F(x)^{n-1}$ hors de ces points.

12. On montre que, pour tout $n \geq 2$, Z_n admet une espérance si et seulement si X en admet une. Il en résulte qu'une loi explosive a toujours un indice d'explosion égal à 2.

Méthode 1 — Domination.

Pour tout $n \geq 2$, comme les X_i sont positives :

$$0 \leq X_1 \leq Z_n \leq X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Si X admet une espérance, $X_1 + \cdots + X_n$ en admet une (linéarité), donc Z_n aussi par domination. Si X n'admet pas d'espérance et si Z_n en admettait une, l'inégalité $0 \leq X_1 \leq Z_n$ et la domination montreraient que X_1 , de même loi que X , admet une espérance : c'est absurde. Donc aucun Z_n n'admet d'espérance.

Méthode 2 — Avec la question A.3 (cas d'une variable à densité).

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 2$, comme $0 \leq F(x) \leq 1$,

$$1 - F(x)^n = (1 - F(x))(1 + F(x) + \cdots + F(x)^{n-1}) \quad \text{donc} \quad 1 - F(x) \leq 1$$

$$-F(x)^n \leq n(1 - F(x)).$$

La variable Z_n est positive, de densité $x \mapsto nf(x)F(x)^{n-1}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points ; par la question A.3 et le résultat admis, Z_n admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)^n) dt$ converge, ce qui, d'après l'encadrement et le critère de comparaison pour les fonctions positives, équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$, c'est-à-dire à l'existence de l'espérance de X .

La méthode 1 est générale (cas discret et cas à densité) et ne demande aucun calcul ; la méthode 2 donne en plus un encadrement quantitatif de $E(Z_n)$:

$E(X) \leq E(Z_n) \leq nE(X)$ lorsque ces espérances existent.

Conséquence. Si X admet une espérance, aucun Z_m n'est sans espérance : la loi de X n'est pas explosive. Si X n'admet pas d'espérance, Z_2 n'en admet pas : la loi est explosive, d'indice d'explosion 2.

Conclusion

pour $m = 2$, oui, il existe des lois explosives d'indice 2 : par exemple la loi de la question 4, celles de la partie C avec $1 < \alpha \leq 2$, ou celle de la partie D. Pour $m \geq 3$, non : toute loi explosive a pour indice d'explosion 2.

- 13.** D'après la question 12, une variable positive admettant une espérance n'est pas explosive. Par exemple, une variable X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, ou la loi de la partie C avec $\alpha > 2$, admet une espérance ; alors, pour tout $n \geq 2$, Z_n admet une espérance (avec $E(Z_n) \leq nE(X)$).

Conclusion

oui, les variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives sont exactement celles qui admettent une espérance ; elles existent, par exemple la loi exponentielle de paramètre 1.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 3(d) : Code adapté en Python. La fonction Scilab à compléter est remplacée par une fonction Python équivalente (mêmes initialisations, même boucle while, mêmes blancs à compléter), conformément au référentiel informatique.
- Exercice 2, question 3(e) : Code adapté en Python. La fonction demandée est écrite en Python et renvoie un tableau numpy de taille p .
- Exercice 2, question 3(f) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées ; ces valeurs ont été confirmées exactement par l'exécution du code Python du corrigé. Un tableau des valeurs lues est ajouté sous la figure.
- Problème, question 11 : rectification d'une erreur d'énoncé. La conclusion « pour tout entier k tel que $k \geq m$ » est remplacée par « pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq m$ », car l'énoncé original est faux (contre-exemple donné dans le corrigé avec $m = 2$, $k = 3$) ; la version rectifiée conserve l'objectif de la question (construire, à partir d'une variable implosant sur Y , d'autres variables implosant sur Y avec un indice prescrit).