



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2014

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. Il s'agit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et qu'il est engendré par les $2n$ fonctions u_k, v_k .

Méthode 1 — Écriture de E comme un Vect.

Soit $f \in E$: il existe

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$$

et

$$Q = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$$

dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^{j+1} \ln(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1} u_k(x) + \sum_{k=1}^n b_{k-1} v_k(x).$$

Donc $f \in \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$.

Réciproquement, soit

$$f = \sum_{k=1}^n (a_k u_k + b_k v_k)$$

avec des réels a_k, b_k . En posant

$$P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$$

et

$$Q = \sum_{k=1}^n b_k X^{k-1},$$

qui appartiennent à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a pour tout $x > 0$: $f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x)$, donc $f \in E$.

Ainsi $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. Un sous-espace engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de cet espace ; donc E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Méthode 2 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels.

$E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient à E (avec $P = Q = 0$). Si $f, g \in E$, associées respectivement à (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) , et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = x(\alpha P_1 + \beta P_2)(x) + x \ln(x)(\alpha Q_1 + \beta Q_2)(x)$$

avec $\alpha P_1 + \beta P_2$ et $\alpha Q_1 + \beta Q_2$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est un espace vectoriel. Donc $\alpha f + \beta g \in E$ et E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. L'égalité $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ s'obtient ensuite par la double inclusion de la méthode 1.

La méthode 1 donne les deux résultats d'un coup ; la méthode 2 est le réflexe à avoir lorsque l'ensemble n'est pas visiblement un Vect.

Conclusion

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$.

2. On étudie la limite en 0 des fonctions de la base, puis on calcule les intégrales.

Prolongement. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k = 0$ car $k \geq 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} v_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln(x) = 0$ par croissances comparées ($k \geq 1$). Toute $f \in E$ s'écrit

$$f = \sum_{k=1}^n (a_k u_k + b_k v_k)$$

(question 1) : elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. En posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Conséquence : pour $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, x]$; de plus, $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^x f(t) dt$ est continue sur $[0, x]$ (c'est, au signe près, une primitive de f), donc $\int_0^x f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^x f(t) dt$. Ainsi $\varphi(f)$ est bien définie.

Calcul de $\varphi(u_k)$. Pour $x > 0$:

$$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^k dt = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{x^k}{k+1}.$$

Donc $\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k$.

Calcul de $\varphi(v_k)$.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment.

Soit $0 < \varepsilon < x$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, x]$, donc :

$$\int_{\varepsilon}^x t^k \ln(t) dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_{\varepsilon}^x - \int_{\varepsilon}^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{x^{k+1} \ln(x)}{k+1} - \frac{\varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon)}{k+1} - \frac{x^{k+1} - \varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Comme $\varepsilon^{k+1} \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$ et $\varepsilon^{k+1} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$\int_0^x t^k \ln(t) dt = \frac{x^{k+1} \ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Méthode 2 — Vérification d'une primitive.

La fonction $G : t \mapsto \frac{t^{k+1} \ln(t)}{k+1} - \frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$G'(t) = t^k \ln(t) + \frac{t^k}{k+1} - \frac{t^k}{k+1} = t^k \ln(t).$$

De plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = 0$ par croissances comparées. Donc

$$\int_{\varepsilon}^x v_k(t) dt = G(x) - G(\varepsilon) \rightarrow G(x) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+, \text{ ce qui redonne le même résultat.}$$

La méthode 1 construit la primitive ; la méthode 2 est plus rapide lorsqu'on a déjà une idée de la forme de la primitive.

Dans les deux cas, pour $x > 0$:

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{x^k \ln(x)}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2}.$$

Conclusion

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k \quad \text{et} \quad \varphi(v_k) = -\frac{1}{(k+1)^2}u_k + \frac{1}{k+1}v_k.$$

3. Linéarité. Soient $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha f + \beta g$ appartient à E , et son prolongement continu à $\mathbb{R}_+$ est $\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}$, où $\tilde{f}, \tilde{g}$ désignent les prolongements de f, g . Par linéarité de l'intégrale sur le segment $[0, x]$, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(\alpha f + \beta g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \varphi(f)(x) + \beta \varphi(g)(x).$$

Donc φ est linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

Stabilité. Soit $f \in E$; on écrit

$$f = \sum_{k=1}^n (a_k u_k + b_k v_k).$$

Par linéarité et d'après la question 2 :

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi(u_k) + b_k \varphi(v_k)) = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{a_k}{k+1} - \frac{b_k}{(k+1)^2} \right) u_k + \frac{b_k}{k+1} v_k \right),$$

qui est une combinaison linéaire des u_k, v_k , donc appartient à E .

Conclusion

φ est linéaire et $\varphi(E) \subset E$; φ est donc un endomorphisme de E .

4. D'après la question 2, en notant les coordonnées dans l'ordre $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$, la colonne de $\varphi(u_k)$ ne comporte que le coefficient $\frac{1}{k+1}$ sur la ligne de u_k , et la

colonne de $\varphi(v_k)$ comporte $-\frac{1}{(k+1)^2}$ sur la ligne de u_k et $\frac{1}{k+1}$ sur la ligne de v_k .

Conclusion

la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est la matrice carrée d'ordre $2n$, diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & -\frac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, M est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}$.

5. Méthode 1 — Matrice triangulaire.

M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux $\frac{1}{k+1}$ sont tous non nuls : M est inversible, donc φ est bijectif.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Donc le spectre de φ est :

$$\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{k+1} ; k \in \{1, \dots, n\} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Méthode 2 — Noyau, pour la bijectivité.

Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme le prolongement de f est continu sur $\mathbb{R}_+$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée f (théorème fondamental de

l'analyse), donc $f = F' = 0$. Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$: φ est un endomorphisme injectif de l'espace E de dimension finie $2n$, donc bijectif.

La méthode 1 exploite la matrice et donne en même temps les valeurs propres ; la méthode 2 n'utilise que la définition de φ et s'applique même sans connaître la matrice.

Conclusion

φ est bijectif et ses valeurs propres sont $\frac{1}{k+1}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ (n valeurs propres distinctes).

6. On traduit la relation $\varphi(f) = \lambda f$ sur la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, puis on dérive g .

Comme f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ (question 2), F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $F' = f$. La relation $\varphi(f) = \lambda f$ s'écrit : pour tout $x > 0$, $\frac{F(x)}{x} = \lambda F'(x)$, c'est-à-dire, puisque $\lambda \neq 0$:

$$\forall x > 0, \quad xF'(x) = \frac{1}{\lambda}F(x).$$

La fonction $g : x \mapsto x^{-1/\lambda}F(x) = e^{-\frac{1}{\lambda}\ln(x)}F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$:

$$g'(x) = -\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}F(x) + x^{-\frac{1}{\lambda}}F'(x) = x^{-\frac{1}{\lambda}-1} \left(xF'(x) - \frac{1}{\lambda}F(x) \right) = 0.$$

g est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g = C$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Expression de F : pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t) dt = F(x) = Cx^{1/\lambda}$.

Expression de f : en dérivant, pour tout $x > 0$, $f(x) = F'(x) = \frac{C}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Comme f est un vecteur propre, $f \neq 0$, donc $C \neq 0$. De plus λ est une valeur propre de φ , donc (question 5) il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda = \frac{1}{k+1}$, d'où $\frac{1}{\lambda} - 1 = k$.

Conclusion

$$\int_0^x f(t) dt = Cx^{1/\lambda} \text{ et } f(x) = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}; \text{ lorsque } \lambda = \frac{1}{k+1}, \text{ cela donne } f = C(k+1)u_k \text{ avec } C \neq 0 : f \text{ est un multiple non nul de } u_k.$$

7. Soit $\lambda = \frac{1}{k+1}$ une valeur propre de φ , avec $k \in \{1, \dots, n\}$. On note $E_\lambda(\varphi)$ l'espace propre associé.

Méthode 1 — Utilisation de la question 6.

Tout vecteur propre associé à λ est un multiple de u_k (question 6), donc $E_\lambda(\varphi) \subset \text{Vect}(u_k)$. Réciproquement, $\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k$ (question 2), donc $u_k \in E_\lambda(\varphi)$. Ainsi $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(u_k)$, de dimension 1 puisque $u_k \neq 0$.

Méthode 2 — Résolution du système matriciel.

On cherche les colonnes $Y = {}^t(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ telles que $MY = \lambda Y$. Le caractère diagonal par blocs de M découple le système en n systèmes : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left(\frac{1}{j+1} - \lambda\right) a_j - \frac{1}{(j+1)^2} b_j = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{j+1} - \lambda\right) b_j = 0.$$

Si $j \neq k$, $\frac{1}{j+1} - \lambda \neq 0$, donc $b_j = 0$ puis $a_j = 0$. Si $j = k$, la seconde équation est triviale et la première donne $-\frac{1}{(k+1)^2} b_k = 0$, soit $b_k = 0$, tandis que a_k est quelconque. Donc $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(u_k)$, de dimension 1.

La méthode 1 réutilise le travail analytique de la question 6 ; la méthode 2 est purement matricielle et ne dépend pas de la question 6.

Diagonalisabilité. φ possède n valeurs propres distinctes, chacune d'espace propre de dimension 1 ; la somme des dimensions des espaces propres vaut $n < 2n = \dim(E)$. Or φ est diagonalisable si et seulement si cette somme vaut $\dim(E)$.

Conclusion

chaque espace propre est de dimension 1, et φ n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 2

1. Soient $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. La fonction $h : t \mapsto (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$; l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On établit la convergence absolue en comparant $|h|$, qui est positive, à des fonctions de référence.

En $+\infty$: $t^2 |h(t)| = |\ln(t)|^k t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $|h(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), $\int_1^{+\infty} |h(t)| dt$ converge.

En 0 : posons $\beta = 1 - \frac{x}{2} < 1$. Alors $t^\beta |h(t)| = |\ln(t)|^k t^{x/2} e^{-t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ par croissances comparées ($\frac{x}{2} > 0$), donc $|h(t)| = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$. Comme $\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta}$ converge ($\beta < 1$), $\int_0^1 |h(t)| dt$ converge.

Conclusion

$\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est absolument convergente, donc convergente. Pour $k = 0$, on retrouve la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$.

2. Relation fonctionnelle de Γ . Soit $x > 0$ et $0 < \varepsilon < B$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, B]$; par intégration par parties :

$$\int_{\varepsilon}^B t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^B + x \int_{\varepsilon}^B t^{x-1} e^{-t} dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - B^x e^{-B} + x \int_{\varepsilon}^B t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ car $x > 0$; quand $B \rightarrow +\infty$, $B^x e^{-B} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Les intégrales convergent (question 1). En passant à la limite :

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Positivité de Γ . L'intégrande $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc $\Gamma(x) \geq \int_1^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$. Ainsi $L = \ln \circ \Gamma$ est bien définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Relation pour Ψ .

Méthode 1 — Passage au logarithme.

Pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ avec $x > 0$ et $\Gamma(x) > 0$, donc $L(x+1) = \ln(x) + L(x)$. Les deux membres sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et la dérivée de $x \mapsto L(x+1)$ est $x \mapsto L'(x+1) = \Psi(x+1)$. En dérivant :

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x).$$

Méthode 2 — Dérivation directe de la relation sur Γ .

En dérivant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$: $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. En divisant par $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \neq 0$:

$$\Psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} + \frac{x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \Psi(x).$$

Le logarithme transforme le produit en somme et rend le calcul immédiat ; la méthode 2 évite le logarithme mais demande une division soigneuse.

Valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la relation en $n+1$ puis en n :

$$\Psi(n+2) - \Psi(n) = (\Psi(n+2) - \Psi(n+1)) + (\Psi(n+1) - \Psi(n)) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

Conclusion

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

3. Soient $x > 0$ et $A > 0$. On note $w(t) = e^{-t}t^{x-1}$, fonction continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Les trois intégrales sur $]0, A]$ convergent d'après la question 1 (seule la borne 0 est impropre).

Méthode 1 — Inégalité de Cauchy-Schwarz sur un segment, puis passage à la limite.

Soit $\varepsilon \in]0, A[$. Sur l'espace $\mathcal{C}([\varepsilon, A])$ des fonctions continues sur $[\varepsilon, A]$, l'application

$\langle f, g \rangle = \int_{\varepsilon}^A f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire : elle est bilinéaire et symétrique par

linéarité de l'intégrale, positive par positivité de l'intégrale, et définie car si $\int_{\varepsilon}^A f^2 = 0$ avec f^2 continue et positive, alors $f^2 = 0$ sur $[\varepsilon, A]$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$, aux fonctions continues $f(t) = \ln(t)\sqrt{w(t)}$ et $g(t) = \sqrt{w(t)}$:

$$\left(\int_{\varepsilon}^A \ln(t) w(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^A (\ln(t))^2 w(t) dt \right) \left(\int_{\varepsilon}^A w(t) dt \right).$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, chacune des trois intégrales tend vers l'intégrale correspondante sur $]0, A]$, qui converge. Par passage à la limite dans une inégalité large, on obtient l'inégalité demandée.

Méthode 2 — Argument du trinôme, directement sur $]0, A]$.

Notons $a = \int_0^A (\ln t)^2 w(t) dt$, $b = \int_0^A \ln(t) w(t) dt$ et $c = \int_0^A w(t) dt$. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale convergente $\int_0^A (\mu \ln(t) + 1)^2 w(t) dt$ est positive (intégrande positif), et vaut par linéarité :

$$\mu^2 a + 2\mu b + c \geq 0.$$

La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 w(t)$ est continue, positive, et strictement positive sur $]0, A] \setminus \{1\}$; en choisissant un segment $[\alpha, \beta] \subset]0, A]$ ne contenant pas 1, on obtient

$a \geq \int_{\alpha}^{\beta} (\ln t)^2 w(t) dt > 0$. Le trinôme du second degré $\mu \mapsto a\mu^2 + 2b\mu + c$, de coefficient dominant $a > 0$, reste positif sur $\mathbb{R}$: son discriminant est négatif ou nul, soit $4b^2 - 4ac \leq 0$, c'est-à-dire $b^2 \leq ac$.

La méthode 1 applique le théorème du cours mais impose de travailler sur un segment avant de passer à la limite ; la méthode 2 refait la preuve de Cauchy-Schwarz et fonctionne directement avec les intégrales impropres convergentes.

Conclusion

pour tous $x > 0$ et $A > 0$,

$$\left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

4. Soit $x > 0$. Quand $A \rightarrow +\infty$, les trois intégrales de la question 3 tendent respectivement vers $\Gamma'(x)$, $\Gamma''(x)$ et $\Gamma(x)$, d'après les formules admises (avec $k = 1, 2, 0$) et la convergence établie à la question 1. Par passage à la limite dans l'inégalité large :

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

Γ est de classe C^∞ et ne s'annule pas, donc $\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0.$$

Conclusion

$\Psi' \geq 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. (a) Égalité. Pour $k \geq 1$, on a $k - a > 0$ et $k + a > 0$ (car $0 < a < 1$), et la décomposition :

$$\frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{(k - a)(k + a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{k - a} - \frac{1}{k + a} \right),$$

qui se vérifie en réduisant au même dénominateur : $\frac{(k + a) - (k - a)}{(k - a)(k + a)} = \frac{2a}{k^2 - a^2}$.

D'après la question 2 appliquée en $k - a > 0$ et en $k + a > 0$:

$$\frac{1}{k-a} = \Psi(k+1-a) - \Psi(k-a) \quad \text{et} \quad \frac{1}{k+a} = \Psi(k+1+a) - \Psi(k+a).$$

Par télescopage, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-a} = \Psi(n+1-a) - \Psi(1-a) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+a} = \Psi(n+1+a) - \Psi(1+a).$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(n+1-a) - \Psi(1-a) - \Psi(n+1+a) + \Psi(1+a)),$$

ce qui est exactement l'égalité demandée après regroupement des termes.

Encadrement. Comme $a > 0$: $n < n+1-a < n+1+a < n+2$ (on utilise $a < 1$ pour les inégalités extrêmes). Tous ces réels appartiennent à $]0, +\infty[$ et Ψ y est croissante (question 4), donc :

$$\Psi(n) \leq \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+1+a) \leq \Psi(n+2).$$

On en déduit $\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \geq 0$ et

$$\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

Conclusion

l'égalité et l'encadrement $0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)$ sont établis pour tout $n \geq 1$.

(b) Méthode 1 — Calcul des sommes partielles.

D'après la question 2, $\Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Par encadrement (question

5a), $\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \rightarrow 0$. La formule de la question 5a montre alors que la suite des sommes partielles converge :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)).$$

Méthode 2 — Critère d'équivalence, pour la convergence seule.

Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2 - a^2} > 0$ et $\frac{1}{n^2 - a^2} \sim \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, donc par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,

$$\sum \frac{1}{n^2 - a^2}$$

converge.

La méthode 2 établit rapidement la convergence mais ne fournit pas la somme ; la méthode 1 donne les deux à la fois grâce au télescopage.

Conclusion

la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{\Psi(1+a) - \Psi(1-a)}{2a}.$$

PROBLÈME

Modélisation. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note G_k l'événement «le joueur A_k remporte le duel numéro k ». L'énoncé indique que chaque duel se déroule indépendamment des précédents : on traduit cela par le fait que les événements $(G_k)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants, avec $P(G_k) = p$ et $P(\overline{G_k}) = q$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le nombre de victoires obtenues, à l'issue du duel numéro n , par le vainqueur de ce duel, avec la convention $V_0 = 0$ (le joueur A_0 n'a encore aucune victoire avant le duel 1). Pour $n \geq 1$:

- si G_n est réalisé, le vainqueur du duel n est A_n , qui a une victoire : $V_n = 1$;
- sinon, le vainqueur du duel $n - 1$ (ou A_0 si $n = 1$) gagne une victoire de plus :

$$V_n = V_{n-1} + 1.$$

En particulier $V_1 = 1$ dans tous les cas, $1 \leq V_n \leq n$ pour $n \geq 1$ (récurrence immédiate), et V_n ne dépend que des événements $G_1, \dots, G_n$. Un joueur éliminé ne rejoue plus : ses victoires sont toujours consécutives. Le gagnant du tournoi est désigné à l'issue du duel n lorsque $V_n = N$ pour la première fois. Ainsi :

$$E_n = \{V_1 \leq N - 1\} \cap \dots \cap \{V_n \leq N - 1\} \quad (n \geq 1), \quad E_0 = \Omega.$$

La suite (E_n) est décroissante pour l'inclusion, et E_n ne dépend que de $G_1, \dots, G_n$.

Fait utile. Soient $m \geq 2$ et $k \geq 1$ avec $m - k + 1 \geq 2$. Alors :

$$\{V_m = k\} = G_{m-k+1} \cap \overline{G_{m-k+2}} \cap \dots \cap \overline{G_m}.$$

En effet, pour $j \geq 2$, $V_j = 1$ équivaut à G_j (si A_j perd, le vainqueur avait déjà au moins une victoire, donc $V_j \geq 2$) ; donc $V_m = k$ signifie que le joueur A_{m-k+1} a gagné le duel $m - k + 1$, puis les $k - 1$ duels suivants. Sur cet événement, $V_{m-k+j} = j$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$.

PARTIE I : Étude d'un cas particulier.

1. Code adapté en Python.

Le code suivant a été exécuté (Python 3, NumPy).

Python

```
import numpy.random as rd

def DUEL():
    x = rd.random()          # réel uniforme dans [0,1[
    if x < 1/2:
        return 1
    else:
        return 0

def TEST_VICTOIRE(a, b, c):
    return a == b and b == c

def TOURNOI():
    gagnant = 0              # numéro du joueur en jeu avant le duel 1 : A0
    g1 = -1                  # numéros des gagnants des trois derniers duels
    g2 = -2                  # (valeurs fictives distinctes au départ)
    g3 = -3
    k = 0                    # nombre de duels déjà joués
    while not TEST_VICTOIRE(g1, g2, g3):
        k = k + 1
        if DUEL() == 1:      # le joueur Ak remporte le duel numéro k
            gagnant = k
        g1 = g2
        g2 = g3
        g3 = gagnant
    return k
```

(a) DUEL tire un réel uniforme x dans $[0, 1[$; $P(x < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, donc DUEL renvoie 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

(b) TEST_VICTOIRE renvoie la valeur booléenne de « $a = b$ et $b = c$ », qui vaut True exactement lorsque les trois nombres sont égaux.

(c) La variable gagnant contient le numéro du joueur encore en jeu ; au duel numéro k , le joueur A_k gagne si DUEL renvoie 1 (probabilité $\frac{1}{2} = p$), et gagnant devient k ; sinon gagnant est inchangé. Les variables g1, g2, g3 contiennent les numéros des gagnants des trois derniers duels; les valeurs initiales $-1, -2, -3$ sont distinctes entre elles et de tout numéro de joueur, donc le test ne peut pas être vrai avant le troisième duel.

Le test devient vrai pour la première fois au duel k si et seulement si un même joueur a gagné les duels $k - 2, k - 1$ et k , c'est-à-dire a 3 victoires consécutives à l'issue du duel k : il a exactement 3 victoires, sinon le test aurait été vrai dès le duel $k - 1$. La fonction renvoie donc le nombre de duels nécessaires à la désignation du vainqueur.

Remarque : avec `rd.seed(1)` et 200 000 appels à `TOURNOI`, la moyenne observée est environ 6,99, valeur cohérente avec $E(X) = 7$ obtenue à la question II.8 pour $N = 3$ et $p = \frac{1}{2}$. Cette observation n'est pas une preuve.

Note sur l'indication : trois valeurs consécutives égales renvoyées par DUEL ne caractérisent pas la fin du tournoi (par exemple, trois valeurs 0 consécutives donnent un joueur ayant au moins 4 victoires si le premier de ces duels n'est pas le duel 1) ; c'est pourquoi l'indication a été précisée en portant le test sur les numéros des gagnants.

2. Tableau des gagnants possibles. Le gagnant du duel 1 est A_0 (probabilité q) ou A_1 (probabilité p) ; le gagnant du duel $k \geq 2$ est soit le gagnant du duel $k - 1$, soit A_k .

	numéro du joueur gagnant le duel	
duel 1	0	1

	numéro du joueur gagnant le duel			
duel 2	0	1	2	
duel 3	0	1	2	3

Plus précisément, les suites possibles de gagnants des trois premiers duels sont, en notant (w_1, w_2, w_3) les numéros des gagnants :

$(0, 0, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 2), (0, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3).$

Calcul de $P(E_1), P(E_2), P(E_3).$

Méthode 1 — Lecture de l'arbre des issues.

Après un ou deux duels, aucun joueur ne peut avoir 3 victoires : $E_1 = E_2 = \Omega$, donc $P(E_1) = P(E_2) = 1$. À l'issue du duel 3, un vainqueur est désigné seulement pour les suites $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Par indépendance des duels :

$$P((0, 0, 0)) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = q^3 = \frac{1}{8}, \quad P((1, 1, 1)) = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = pq^2 = \frac{1}{8}.$$

Donc $P(\overline{E_3}) = \frac{1}{4}$ et $P(E_3) = \frac{3}{4}.$

Méthode 2 — Utilisation de V_n .

$V_1 = 1$ et $V_2 \leq 2$, donc $E_1 = E_2 = \Omega$. Puis $\overline{E_3} = \{V_3 = 3\}$, et $V_3 = 3$ si et seulement si $V_2 = 2$ et $\overline{G_3}$, c'est-à-dire $\overline{G_2} \cap \overline{G_3}$ (puisque $V_1 = 1$ toujours). Donc $P(\overline{E_3}) = q^2 = \frac{1}{4}$.

La méthode 1 colle au tableau demandé ; la méthode 2 évite l'énumération et se généralise directement (question II.3).

Vérification :
$$\frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = P(E_3).$$

Conclusion

$$P(E_1) = P(E_2) = 1, \quad P(E_3) = \frac{3}{4} \text{ et } P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. Soit $n \geq 3$. On applique la formule des probabilités totales selon la valeur de V_n .

Système complet. Les événements $\{V_n = 1\}$, $\{V_n = 2\}$ et $\{V_n \geq 3\}$ forment un système complet d'événements (car $V_n \geq 1$). De plus $E_n \cap \{V_n \geq 3\} = \emptyset$, puisque sur E_n on a $V_n \leq 2$.

Calcul de $P(E_n \cap \{V_n = k\})$ pour $k \in \{1, 2\}$. Comme $n - k + 1 \geq n - 1 \geq 2$, le « fait utile » s'applique :

$$\{V_n = k\} = G_{n-k+1} \cap \overline{G_{n-k+2}} \cap \cdots \cap \overline{G_n}, \quad P(V_n = k) = pq^{k-1}.$$

Sur cet événement, $V_{n-k+j} = j \leq 2$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$, donc

$E_n \cap \{V_n = k\} = E_{n-k} \cap \{V_n = k\}$. L'événement E_{n-k} ne dépend que de $G_1, \dots, G_{n-k}$, et $\{V_n = k\}$ que de $G_{n-k+1}, \dots, G_n$; par le lemme des coalitions, ils sont indépendants.

Ainsi :

$$P(E_n \cap \{V_n = k\}) = P(E_{n-k}) pq^{k-1}.$$

Conclusion. Par la formule des probabilités totales, avec $p = q = \frac{1}{2}$:

$$P(E_n) = pP(E_{n-1}) + pqP(E_{n-2}) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Pour $m \geq 0$, posons $w_m = P(E_{m+1})$. La relation $(\mathcal{R}_1)$ appliquée en $n = m + 3 \geq 3$ donne :

$$\forall m \geq 0, \quad w_{m+2} = \frac{1}{2}w_{m+1} + \frac{1}{4}w_m.$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}$, soit $4r^2 - 2r - 1 = 0$. Son discriminant vaut $4 + 16 = 20 > 0$: elle possède deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

D'après le cours, il existe deux réels λ', μ' tels que $w_m = \lambda' r_1^m + \mu' r_2^m$ pour tout $m \geq 0$. Comme $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$P(E_n) = w_{n-1} = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\lambda'}{r_1}, \quad \mu = \frac{\mu'}{r_2}.$$

En particulier la formule vaut pour tout $n \geq 2$.

Limite. Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $0 < r_1 < 1$ et $-1 < r_2 < 0$, donc $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$. Ainsi $r_1^n \rightarrow 0$ et $r_2^n \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0.$$

5. La suite $(E_n)_{n \geq 2}$ est décroissante pour l'inclusion (si le gagnant n'est pas désigné à l'issue du duel $n + 1$, il ne l'était pas à l'issue du duel n). Par le théorème de continuité monotone :

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0.$$

L'événement « le tournoi désignera un vainqueur » est le complémentaire de

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n \text{ (car } E_2 \subset E_1 \text{)}.$$

Conclusion

$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = 0$ et le tournoi désigne presque sûrement un vainqueur : la probabilité demandée vaut 1.

PARTIE II : Étude du cas général.

1. Soient $n \geq N$ et $k \in \{1, \dots, N - 1\}$. On a $A_k^{(n)} = \{V_n = k\}$ et $n - k + 1 \geq n - N + 2 \geq 2$, donc d'après le « fait utile » :

$$A_k^{(n)} = G_{n-k+1} \cap \overline{G_{n-k+2}} \cap \dots \cap \overline{G_n}, \quad P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1} > 0,$$

par indépendance des G_j . La probabilité conditionnelle est donc bien définie.

Sur $A_k^{(n)}$, on a $V_{n-k+j} = j \leq k \leq N - 1$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$: aucun joueur n'atteint N victoires lors des duels $n - k + 1, \dots, n$. Donc :

$$E_n \cap A_k^{(n)} = E_{n-k} \cap A_k^{(n)}.$$

E_{n-k} ne dépend que de $G_1, \dots, G_{n-k}$ et $A_k^{(n)}$ que de $G_{n-k+1}, \dots, G_n$: par le lemme des coalitions, ces deux événements sont indépendants. Ainsi :

$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \frac{P(E_{n-k} \cap A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} = \frac{P(E_{n-k})P(A_k^{(n)})}{P(A_k^{(n)})} = P(E_{n-k}).$$

Conclusion

pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$.

2. Soit $n \geq N$. Les événements $A_1^{(n)}, \dots, A_{N-1}^{(n)}$ et $B = \{V_n \geq N\}$ forment un système complet d'événements, car $V_n \geq 1$. Sur E_n , $V_n \leq N-1$, donc $P(E_n \cap B) = 0$. Les $A_k^{(n)}$ sont de probabilité non nulle (question II.1). La formule des probabilités totales et la question II.1 donnent :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) + P(E_n \cap B) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

Conclusion

la relation $(\mathcal{R}_2)$ est établie pour tout $n \geq N$.

3. Pour $1 \leq n \leq N-1$, on a $V_m \leq m \leq N-1$ pour tout $m \leq n$, donc $E_n = \Omega$ et $P(E_n) = 1$. Ainsi $P(E_1) = \dots = P(E_{N-1}) = 1$.

Méthode 1 — Relation $(\mathcal{R}_2)$ en $n = N$.

Les indices $N - k$, pour $k \in \{1, \dots, N - 1\}$, parcourent $\{1, \dots, N - 1\}$, donc :

$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \cdot 1 = p \cdot \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} = 1 - q^{N-1},$$

car $q \neq 1$ et $1 - q = p$.

Méthode 2 — Calcul direct.

Comme $E_{N-1} = \Omega$, on a $\overline{E_N} = \{V_N \geq N\} = \{V_N = N\}$ (car $V_N \leq N$). Or $V_N = N$ impose $V_m = m$ pour tout $m \leq N$, c'est-à-dire que le vainqueur du duel 1 gagne les duels 2, ..., N : $\{V_N = N\} = \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_N}$, de probabilité q^{N-1} par indépendance.

La méthode 1 répond au « en déduire » de l'énoncé ; la méthode 2 interprète le résultat : le vainqueur du premier duel gagne les $N - 1$ duels suivants.

Conclusion

$$P(E_1) = \dots = P(E_{N-1}) = 1 \text{ et } P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geq N$.

Méthode 1 — Manipulation de $(\mathcal{R}_2)$.

On applique $(\mathcal{R}_2)$ en $n + 1 \geq N$ et on isole le terme $k = 1$:

$$P(E_{n+1}) = pP(E_n) + \sum_{k=2}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k}) = pP(E_n) + q \sum_{j=1}^{N-2} pq^{j-1}P(E_{n-j}),$$

en posant $j = k - 1$. Or, d'après $(\mathcal{R}_2)$ en n :

$$\sum_{j=1}^{N-2} pq^{j-1} P(E_{n-j}) = P(E_n) - pq^{N-2} P(E_{n-N+1}).$$

Donc

$$P(E_{n+1}) = pP(E_n) + qP(E_n) - pq^{N-1} P(E_{n-N+1}) = P(E_n) - pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

Méthode 2 — Interprétation probabiliste.

Comme $E_{n+1} \subset E_n$, $P(E_n) - P(E_{n+1}) = P(E_n \cap \overline{E_{n+1}})$: c'est la probabilité que le vainqueur soit désigné exactement au duel $n + 1$. Sur E_n , $V_n \leq N - 1$, donc $V_{n+1} = N$ si et seulement si $V_n = N - 1$ et $\overline{G_{n+1}}$. Ainsi :

$$E_n \cap \overline{E_{n+1}} = E_n \cap A_{N-1}^{(n)} \cap \overline{G_{n+1}} = E_{n-N+1} \cap G_{n-N+2} \cap \overline{G_{n-N+3}} \cap \cdots \cap \overline{G_{n+1}},$$

en utilisant la question II.1 (avec $k = N - 1$). Par indépendance (lemme des coalitions), cette probabilité vaut $P(E_{n-N+1}) p q^{N-1}$: un nouveau joueur gagne le duel $n - N + 2$ puis les $N - 1$ duels suivants.

La méthode 1 est purement algébrique ; la méthode 2 explique le sens de la relation et sert de nouveau à la question II.8.

Conclusion

pour tout $n \geq N$, $P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1})$.

5. La fonction polynomiale

$$Q : x \mapsto \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}x^k - 1$$

est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, avec :

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} = p + \sum_{k=2}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} \geq p > 0 \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Q est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $Q(0) = -1 < 0$ et $Q(x) \geq px - 1 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection, Q réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, qui contient 0 : l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution r_N sur $[0, +\infty[$.

$r_N > 1$: on calcule

$$Q(1) = p \sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} - 1 = p \cdot \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N).$$

Comme Q est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit $1 < r_N$.

$Q'(r_N) > 0$: d'après le calcul ci-dessus, $Q'(r_N) \geq p > 0$.

Conclusion

l'équation $Q(x) = 0$ a une unique solution r_N sur $[0, +\infty[$, et $r_N > 1$, $Q'(r_N) > 0$.

6. Posons $\rho = \frac{1}{r_N} \in]0, 1[$. Par définition de r_N :

$$\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}r_N^k = 1.$$

On montre par récurrence forte sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{H}_n : P(E_n) \leq \rho^{n-N}$.

Initialisation : pour $1 \leq n \leq N$, $n - N \leq 0$ et $\rho \in]0, 1[$, donc $\rho^{n-N} \geq 1 \geq P(E_n)$.

Hérédité : soit $n \geq N + 1$ tel que $\mathcal{H}_m$ soit vraie pour tout $m \in \{1, \dots, n - 1\}$. Pour $k \in \{1, \dots, N - 1\}$, $n - k \in \{n - N + 1, \dots, n - 1\} \subset \{1, \dots, n - 1\}$. Par $(\mathcal{R}_2)$ et l'hypothèse de récurrence (les coefficients pq^{k-1} sont positifs) :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \rho^{n-k-N} = \rho^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k = \rho^{n-N}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N} \right)^{n-N}.$$

7. Convergence. Pour $n \geq 1$, $0 \leq P(E_n) \leq r_N^N \rho^n$. La série géométrique

$$\sum \rho^n$$

converge car $0 < \rho < 1$; par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} P(E_n)$$

converge. On note

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n).$$

Somme. Soit $M \geq N$. En sommant $(\mathcal{R}_3)$ pour n de N à M et en télescopant :

$$P(E_N) - P(E_{M+1}) = pq^{N-1} \sum_{n=N}^M P(E_{n-N+1}) = pq^{N-1} \sum_{j=1}^{M-N+1} P(E_j).$$

Quand $M \rightarrow +\infty$, $P(E_{M+1}) \rightarrow 0$ (terme général d'une série convergente, ou majoration de la question II.6) et la somme partielle tend vers S . Donc $P(E_N) = pq^{N-1}S$, et avec la question II.3 :

$$S = \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}.$$

Conclusion

$$\sum_{n \geq 1} P(E_n)$$

converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}.$$

Vérification : pour $N = 3$ et $p = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{3/4}{1/8} = 6$.

8. (a) Soit $n \geq 2$. L'événement $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ signifie que le gagnant n'est pas désigné à l'issue du duel $n-1$ mais l'est à l'issue du duel n : il est donc proclamé exactement à l'issue du duel n , ce qui signifie que n duels ont eu lieu au moment de la proclamation. Réciproquement, si $X = n \geq 2$, le vainqueur est proclamé au duel n , donc pas avant, et $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ est réalisé.

Conclusion

pour tout $n \geq 2$, $E_{n-1} \cap \overline{E_n} = (X = n)$.

(b) Loi de X . X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a $(X = 0) = \bigcap_{n \geq 1} E_n$, et par continuité monotone et la question II.6, $P(X = 0) = \lim P(E_n) = 0$. De plus $(X = 1) = \emptyset$ car $E_1 = \Omega$ ($N \geq 3$). Pour $n \geq 2$, comme $E_n \subset E_{n-1}$:

$$P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n).$$

Existence de l'espérance. X est à valeurs positives ; il suffit de montrer la convergence de

$$\sum nP(X = n).$$

Pour $M \geq 2$, par un changement d'indice :

$$\sum_{n=2}^M nP(X = n) = \sum_{n=2}^M nP(E_{n-1}) - \sum_{n=2}^M nP(E_n) = \sum_{n=1}^{M-1} (n+1)P(E_n) - \sum_{n=2}^M nP(E_n).$$

Le premier terme de la première somme vaut $2P(E_1)$; pour $2 \leq n \leq M-1$ il reste $P(E_n)$; il reste enfin $-MP(E_M)$. D'où :

$$\sum_{n=2}^M nP(X = n) = P(E_1) + \sum_{n=1}^{M-1} P(E_n) - MP(E_M).$$

D'après la question II.6, $0 \leq MP(E_M) \leq r_N^N M \rho^M \rightarrow 0$ par croissances comparées ($0 < \rho < 1$). Donc les sommes partielles convergent : la série

$$\sum nP(X = n),$$

à termes positifs, converge, et X admet une espérance. En passant à la limite, avec $P(E_1) = 1$:

$$E(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n).$$

Valeur. Avec la question II.7 :

$$E(X) = 1 + \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}} = \frac{pq^{N-1} + 1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}} = \frac{1 - q^N}{pq^{N-1}},$$

car $pq^{N-1} - q^{N-1} = -q^{N-1}(1 - p) = -q^N$.

Conclusion

X admet une espérance,

$$E(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^N}{pq^{N-1}}.$$

Vérification : pour $N = 3$ et $p = \frac{1}{2}$, $E(X) = \frac{7/8}{1/8} = 7$, en accord avec la simulation de la question I.1(c).

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

1. Question adaptée au programme actuel : z est désormais un réel (et non un complexe).

Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $Q(z) = 0$ et $Q'(z) = 0$.

$R(z) = 0$: d'après l'identité admise, $R(z) = (qz - 1)Q(z) = 0$.

$R'(z) = 0$: en dérivant l'identité polynomiale $(qX - 1)Q(X) = R(X)$, on obtient $qQ(X) + (qX - 1)Q'(X) = R'(X)$, d'où $R'(z) = qQ(z) + (qz - 1)Q'(z) = 0$.

$z \in [0, +\infty[$: en évaluant la seconde identité admise en z :

$$zR'(z) - NR(z) = (N - 1)z - N, \quad \text{soit} \quad 0 = (N - 1)z - N,$$

donc $z = \frac{N}{N - 1} > 0$ (car $N \geq 3$). Ainsi $z \in [0, +\infty[$.

Contradiction : z est une racine de Q dans $[0, +\infty[$, donc $z = r_N$ par unicité (question II.5). Mais alors $Q'(z) = Q'(r_N) > 0$, ce qui contredit $Q'(z) = 0$.

Conclusion

aucun réel n'annule à la fois Q et Q' ; toute racine réelle de Q est de multiplicité 1.

Justification de l'affirmation qui suit (cas $N = 3$). Pour $N = 3$, $Q(X) = pqX^2 + pX - 1$ est de degré 2 (car $pq \neq 0$) et admet la racine réelle r_3 . On peut donc factoriser $Q(X) = (X - r_3)(pqX + c)$ pour un réel c , ce qui fournit une seconde racine réelle. Les deux racines réelles z_1, z_2 de Q sont distinctes, puisque toute racine réelle est simple ; elles sont non nulles car $Q(0) = -1 \neq 0$. Le coefficient dominant de Q étant pq , on obtient $Q(X) = pq(X - z_1)(X - z_2)$. On peut aussi le voir directement : le discriminant $p^2 + 4pq$ est strictement positif.

Remarque : comme $Q(0) = -1$ et que le produit des racines vaut $-\frac{1}{pq} < 0$, l'une des racines est $r_3 > 0$ et l'autre est strictement négative.

2. Question adaptée au programme actuel : on travaille avec $N = 3$, dans $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

(a) Linéarité : pour $S, T \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha S + \beta T) \left(\frac{1}{z_j} \right) = \alpha S \left(\frac{1}{z_j} \right) + \beta T \left(\frac{1}{z_j} \right)$ pour $j = 1, 2$, donc $f(\alpha S + \beta T) = \alpha f(S) + \beta f(T)$.

Méthode 1 — Injectivité et dimension.

Soit $S \in \text{Ker}(f)$: $S\left(\frac{1}{z_1}\right) = S\left(\frac{1}{z_2}\right) = 0$. Comme $z_1 \neq z_2$, les réels $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{1}{z_2}$ sont distincts ; S , de degré au plus 1, possède deux racines distinctes, donc $S = 0$. Ainsi f est injective. Comme $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, f est un isomorphisme.

Méthode 2 — Construction explicite de l'antécédent.

Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Notons $c_1 = \frac{1}{z_1}$, $c_2 = \frac{1}{z_2}$, distincts. Le polynôme

$$S = y_1 \frac{X - c_2}{c_1 - c_2} + y_2 \frac{X - c_1}{c_2 - c_1} \in \mathbb{R}_1[X]$$

vérifie $S(c_1) = y_1$ et $S(c_2) = y_2$: f est surjective. Avec l'égalité des dimensions (ou l'unicité obtenue par la méthode 1), f est un isomorphisme.

La méthode 1 est la plus rapide ; la méthode 2 (interpolation de Lagrange) donne en plus la bijection réciproque.

Conclusion

f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) La base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, X)$ et $f(1) = (1, 1)$, $f(X) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$. Les colonnes de A sont les coordonnées de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} \\ 1 & \frac{1}{z_2} \end{pmatrix}, \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} \end{pmatrix}.$$

(c) Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit matriciellement :

$${}^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ P(E_2) \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Transposée d'une matrice inversible.

f est un isomorphisme, donc sa matrice A est inversible ; la transposée d'une matrice inversible est inversible, avec $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Le système admet donc l'unique solution

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = ({}^t A)^{-1} \begin{pmatrix} P(E_1) \\ P(E_2) \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Formule de l'inverse d'ordre 2.

Pour ${}^t A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la quantité $ad - bc = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}$ est non nulle car $z_1 \neq z_2$; ${}^t A$ est donc inversible et :

$$({}^t A)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & -1 \\ -\frac{1}{z_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode 1 se généralise à toute dimension ; la méthode 2, propre à l'ordre 2, fournit

explicitement α_1 et α_2 . Ici $P(E_1) = P(E_2) = 1$ (question II.3 avec $N = 3$), donc

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{z_2} - 1}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}}$$

et

$$\alpha_2 = \frac{1 - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}}.$$

Conclusion

le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution (α_1, α_2) .

3. Question adaptée au programme actuel : cas $N = 3$.

Relation de récurrence. Soit $n \geq 3$. Pour $j \in \{1, 2\}$, $z_j \neq 0$ et $Q(z_j) = 0$, c'est-à-dire $pz_j + pqz_j^2 = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 pq^{k-1} u_{n-k} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_j \left(p z_j^{-(n-2)} + pq z_j^{-(n-3)} \right) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j z_j^{-(n-1)} (pz_j + pqz_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^2 \alpha_j z_j^{-(n-1)} = u_n. \end{aligned}$$

Égalité $P(E_n) = u_n$. On raisonne par récurrence forte. Par définition de (α_1, α_2) :

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = P(E_1), \quad u_2 = \frac{\alpha_1}{z_1} + \frac{\alpha_2}{z_2} = P(E_2).$$

Soit $n \geq 3$ tel que $P(E_m) = u_m$ pour tout $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Par $(\mathcal{R}_2)$ (valable pour $n \geq N = 3$) et la relation précédente :

$$P(E_n) = pP(E_{n-1}) + pqP(E_{n-2}) = pu_{n-1} + pqu_{n-2} = u_n.$$

Conclusion

pour tout $n \geq 3$,

$$u_n = \sum_{k=1}^2 pq^{k-1} u_{n-k},$$

et pour tout $n \geq 1$, $P(E_n) = u_n = \frac{\alpha_1}{z_1^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{z_2^{n-1}}.$

Lien avec la partie I : pour $p = \frac{1}{2}$, $Q(X) = \frac{1}{4}(X^2 + 2X - 4)$, de racines $z_1 = -1 + \sqrt{5}$ et $z_2 = -1 - \sqrt{5}$, et $\frac{1}{z_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = r_1$, $\frac{1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = r_2$: on retrouve les racines de la question I.4. Le calcul donne $\alpha_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\alpha_2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}}$; par exemple $u_3 = \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 = \frac{3}{4} = P(E_3)$. Une vérification numérique (code exécuté) confirme $P(E_n) = u_n$ pour $n \leq 9$ à 10^{-15} près.

Relevé des adaptations

- Problème, partie I, question 1 (a), (b), (c) : Code adapté en Python. Les fonctions demandées en Turbo-Pascal sont demandées en Python ; la commande `random` est remplacée par `rd.random()` de `numpy.random`, qui renvoie un réel de $[0, 1[$ (et non $[0, 1]$). L'indication de la question (c) est précisée : la valeur 1 de DUEL signifie que A_k gagne, et le test `TEST_VICTOIRE` porte sur les numéros des gagnants des trois derniers duels. Justification : langage Pascal hors programme ; l'indication originale, prise littéralement (trois valeurs consécutives égales de DUEL), ne caractérise pas la fin du tournoi.
- Partie III, question 1 : le nombre complexe z est remplacé par un réel z ; la conclusion devient « chaque racine réelle de Q est de multiplicité 1 ». Le recours au théorème de

d'Alembert-Gauss est supprimé. Justification : nombres complexes hors programme.

- Partie III, paragraphe suivant la question 1 : rectification d'une erreur du PDF. La factorisation y était écrite sans coefficient dominant et avec une coquille $((X - z_1) \cdots (Z - z_{N-1}))$; le coefficient dominant de Q est pq^{N-2} . Dans la version adaptée ($N = 3$), la factorisation correcte $Q(X) = pq(X - z_1)(X - z_2)$ est donnée.
- Partie III, questions 2 et 3 : on suppose $N = 3$; l'application f est définie de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$, le système $(\mathcal{S})$ comporte deux équations et la suite (u_n) deux termes. Justification : pour $N \geq 4$, Q possède au plus deux racines réelles (sa seule racine positive est r_N , et il a au plus une racine négative), donc des racines non réelles ; la méthode exige alors les nombres complexes. Le cas $N = 3$ conserve l'objectif (formule explicite de $P(E_n)$), la méthode (isomorphisme d'évaluation, transposée, système, récurrence) et reste entièrement réel.
- Aucune figure n'est présente dans le PDF ; le tableau de la question I.2 est retranscrit en tableau Markdown.