



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**Ecricome**

Mathématiques

**2013**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## EXERCICE 1

Rectification de l'énoncé : le texte original demande seulement que  $k$  soit un entier naturel non nul. Pour  $k = 1$ , la conclusion de la question 4 est fausse : la matrice  $A = 2I_n$  vérifie  $A^1 = {}^tA$ , mais  $B = {}^tAA = 4I_n$  et  $B^2 = 16I_n \neq B$ . L'énoncé est donc rectifié en supposant  $k \geq 2$ , hypothèse utilisée à la question 3 pour déterminer les valeurs propres possibles de  $B$ .

1. Il s'agit de calculer une transposée, puis d'exprimer le produit scalaire sous forme matricielle.

On utilise  ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$  et  ${}^t({}^tM) = M$  :

$${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA = B.$$

Ainsi  $B$  est symétrique.

Soit  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Par définition du produit scalaire canonique :

$$\langle BX, X \rangle = {}^t(BX)X = {}^tX {}^tB X = {}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2.$$

### Conclusion

$${}^tB = B \text{ et } \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BX, X \rangle = \|AX\|^2.$$

2. Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demande de montrer que les valeurs propres de  $B$  sont « réelles et positives ». Dans le programme, les valeurs propres sont par définition réelles ; la question porte donc sur leur positivité.

On part d'un vecteur propre et on utilise la question 1.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$  et  $X$  un vecteur propre associé, donc  $X \neq 0$  et  $BX = \lambda X$ . D'après la question 1 :

$$\|AX\|^2 = \langle BX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \|X\|^2.$$

Comme  $X \neq 0$ , on a  $\|X\|^2 > 0$ , d'où  $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$ .

## Conclusion

toutes les valeurs propres de  $B$  sont positives.

Remarque :  $B$  étant symétrique réelle, le théorème spectral assure de plus que  $B$  est diagonalisable et possède au moins une valeur propre.

3. Il s'agit de montrer que  $A$  et  ${}^tA$  commutent, puis d'utiliser la relation  $A^k = {}^tA$  et sa transposée.

Étape 1 : transposée de la relation. En transposant  $A^k = {}^tA$ , et puisque  ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$  (récurrence immédiate à partir de  ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$ ), on obtient :

$$({}^tA)^k = {}^t({}^tA) = A.$$

Étape 2 : commutation. On a

$$A {}^tA = A \cdot A^k = A^{k+1} = A^k \cdot A = {}^tA A.$$

Étape 3 : calcul de  $B^k$ . Deux matrices  $M$  et  $N$  qui commutent vérifient  $(MN)^k = M^k N^k$  (récurrence sur  $k$  :  $(MN)^{k+1} = M^k N^k MN = M^k MN^k N$  car  $N^k$  commute avec  $M$ ).

Avec  $M = {}^tA$  et  $N = A$  :

$$B^k = ({}^tAA)^k = ({}^tA)^k A^k = A {}^tA = {}^tAA = B.$$

Valeurs propres possibles. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$  et  $X \neq 0$  tel que  $BX = \lambda X$ . Par récurrence,  $B^k X = \lambda^k X$ . Comme  $B^k = B$ , on obtient  $\lambda^k X = \lambda X$ , puis  $\lambda^k = \lambda$  car  $X \neq 0$  (autrement dit,  $\lambda$  est racine du polynôme annulateur  $x^k - x$ ).

Ainsi  $\lambda(\lambda^{k-1} - 1) = 0$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda^{k-1} = 1$  ; comme  $\lambda \geq 0$  (question 2) et  $k-1 \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto t^{k-1}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et vaut 1 en 1, donc  $\lambda = 1$ .

Les deux valeurs se rencontrent : pour  $A = 0_n$  (qui vérifie  $A^k = 0_n = {}^tA$ ),  $B = 0_n$  a pour valeur propre 0 ; pour  $A = I_n$ ,  $B = I_n$  a pour valeur propre 1.

## Conclusion

$B^k = B$  et les valeurs propres possibles de  $B$  sont 0 et 1, c'est-à-dire  $\text{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$ .

4. On utilise le théorème spectral pour se ramener à une matrice diagonale.

La matrice  $B$  est symétrique réelle (question 1). D'après le théorème spectral, il existe une matrice  $P$  inversible vérifiant  $P^{-1} = {}^tP$  et une matrice diagonale

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  telles que  $B = PD^tP$ .

L'égalité  $BP = PD$  montre que la  $i$ -ème colonne  $P_i$  de  $P$  vérifie  $BP_i = d_iP_i$ , et  $P_i \neq 0$  car  $P$  est inversible : chaque  $d_i$  est donc une valeur propre de  $B$ . D'après la question 3,  $d_i \in \{0, 1\}$ , donc  $d_i^2 = d_i$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire  $D^2 = D$ .

Par conséquent :

$$B^2 = PD^tP PD^tP = PD^2 {}^tP = PD^tP = B.$$

## Conclusion

$B^2 = B$ ; la matrice  $B$  est la matrice d'un projecteur (orthogonal, puisqu'elle est symétrique).

5. On établit les deux inclusions pour les noyaux, puis une inclusion et l'égalité des dimensions pour les images.

Noyaux. Si  $AX = 0$ , alors  $BX = {}^tA(AX) = 0$  : donc  $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(B)$ . Réciproquement, si  $BX = 0$ , la question 1 donne  $\|AX\|^2 = \langle BX, X \rangle = 0$ , donc  $AX = 0$  :  $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(A)$ . Ainsi  $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$ .

Images. On montre d'abord l'inclusion  $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ .

**Méthode 1 — par la commutation.** D'après la question 3,  $B = A {}^tA$ . Pour tout  $X$ ,  $BX = A({}^tAX) \in \text{Im}(A)$ . Donc  $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ .

**Méthode 2 — par la relation  $A^k = {}^t A$ . Pour tout  $X$ ,**  
 $BX = {}^t A(AX) = A^k(AX) = A(A^k X) \in \text{Im}(A)$ . **Donc  $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ .**

La première méthode réutilise directement le résultat intermédiaire de la question 3 ; la seconde n'utilise que l'hypothèse de l'énoncé et montre plus généralement que  $\text{Im}(A^m) \subset \text{Im}(A)$  pour tout  $m \geq 1$ .

Égalité des dimensions. D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associés :

$$\text{rg}(B) = n - \dim \text{Ker}(B) = n - \dim \text{Ker}(A) = \text{rg}(A).$$

Un sous-espace inclus dans un autre et de même dimension finie lui est égal.

### Conclusion

$$\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A) \text{ et } \text{Im}(B) = \text{Im}(A).$$

6. On utilise le fait que  $B$  est un projecteur, donc vaut l'identité sur son image.

Soit  $X \in \text{Im}(A)$ . D'après la question 5,  $X \in \text{Im}(B)$  : il existe  $Z$  tel que  $X = BZ$ . D'après la question 4 :

$$BX = B^2 Z = BZ = X.$$

La question 1 donne alors :

$$\|AX\|^2 = \langle BX, X \rangle = \langle X, X \rangle = \|X\|^2.$$

Les deux normes étant positives, on conclut :  $\forall X \in \text{Im}(A), \|AX\| = \|X\|$ .

## EXERCICE 2

1. Étude de  $f$ .

(a) On cherche les points où le gradient de  $f$  s'annule.

La fonction  $f$  est polynomiale, donc de classe  $C^1$  (et même  $C^2$ ) sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ . Ses dérivées partielles sont :

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{5} (2x - 4x^3 + 2y) \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{1}{5} (2y - 4y^3 + 2x).$$

Le point  $(a, b)$  est critique si et seulement si :

$$a + b = 2a^3 \quad \text{et} \quad a + b = 2b^3.$$

On en déduit  $a^3 = b^3$ . La fonction  $t \mapsto t^3$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc injective, on obtient  $a = b$ .

En reportant,  $2a = 2a^3$ , soit  $a(1 - a^2) = 0$ , donc  $a \in \{-1, 0, 1\}$ . Réciproquement, les trois points  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$  annulent bien les deux dérivées partielles.

Valeurs :

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 1) = \frac{1}{5}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{5}, \quad f(-1, -1) = \frac{1}{5}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{5}.$$

### Conclusion

les points critiques de  $f$  sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ , avec  $f(0, 0) = 0$  et  $f(1, 1) = f(-1, -1) = \frac{2}{5}$ .

Remarque sur l'inégalité admise (non demandée) : en posant  $\sigma = x^2 + y^2$ , un développement direct donne

$$5 \left( \frac{2}{5} \sigma - \frac{1}{10} \sigma^2 - f(x, y) \right) = (x - y)^2 + \frac{1}{2} (x^2 - y^2)^2 \geq 0,$$

ce qui justifie le résultat admis.

(b) On étudie les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g'(t) = \frac{2}{5} - \frac{t}{5} = \frac{2-t}{5}$ . Ainsi  $g$  est strictement croissante sur  $[0, 2]$  et strictement décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

Maximum :  $g$  admet un maximum global en  $t = 2$ , égal à  $g(2) = \frac{4}{5} - \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

Minimum : on a  $g(t) = \frac{t(4-t)}{10}$ , donc  $g(t) \sim -\frac{t^2}{10}$  et  $g(t) \rightarrow -\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$  :  $g$  n'admet pas de minimum global. En revanche  $g(0) = 0$  et  $g(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, 4]$  :  $g$  admet en 0 (borne de l'intervalle d'étude) un minimum local égal à 0.

### Conclusion

$g$  admet un maximum global  $\frac{2}{5}$  atteint uniquement en  $t = 2$ , un minimum local 0 en  $t = 0$ , et aucun minimum global.

(c) On combine l'inégalité admise et la question (b).

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$ , et l'inégalité admise s'écrit :

$$f(x, y) \leq g(x^2 + y^2) \leq \frac{2}{5}.$$

Or  $f(1, 1) = \frac{2}{5}$  (question (a)). Donc  $f$  admet un maximum global, égal à  $\frac{2}{5}$ , atteint en  $(1, 1)$  et en  $(-1, -1)$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x, 0) = \frac{x^2 - x^4}{5}$ , et  $\frac{x^2 - x^4}{5} \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (terme dominant  $-\frac{x^4}{5}$ ). Donc  $f$  n'est pas minorée.

### Conclusion

$f$  possède un maximum égal à  $\frac{2}{5}$  et n'est pas minorée.

2. Code adapté en Python (l'énoncé original demande un programme dans un autre langage).

Le programme lit  $N$ ,  $u_0$ ,  $u_1$ , puis fait avancer un couple de termes consécutifs : au début de chaque passage dans la boucle,  $a$  contient  $u_n$  et  $b$  contient  $u_{n+1}$  ; on calcule

$c = u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$  puis on décale. Après  $N$  passages,  $a$  contient  $u_N$ .

## Python

```
def f(x, y):
    return (x**2 * (1 - x**2) + y**2 * (1 - y**2) + 2 * x * y) / 5

N = int(input("N = "))
u0 = float(input("u0 = "))
u1 = float(input("u1 = "))

a = u0          # contient u_n
b = u1          # contient u_(n+1)
for n in range(N):
    c = f(a, b) # u_(n+2)
    a = b
    b = c
print(a)        # u_N
```

Vérification des indices :  $\text{range}(N)$  effectue exactement  $N$  passages ( $n = 0, \dots, N - 1$ ) ; pour  $N = 0$  aucun passage n'a lieu et le programme affiche  $u_0$  ; pour  $N = 1$ , un seul passage et le programme affiche  $u_1$ .

Ce code a été exécuté : avec  $u_0 = 0,3$  et  $u_1 = 0,9$ , il renvoie  $u_2 = f(0,3; 0,9) = 0,15516$ , valeur égale au calcul direct, puis des termes décroissant vers 0, conformément à la question 3. Cette observation numérique n'est pas une preuve.

### 3. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ .

(a) On procède par récurrence double, en montrant que  $f$  envoie  $[0, 1]^2$  dans  $[0, 1]$ .

Étape 1 :  $f([0, 1]^2) \subset [0, 1]$ . Soit  $(x, y) \in [0, 1]^2$ . Comme  $0 \leq x^2 \leq 1$ ,  $x^2(1 - x^2) \geq 0$  ; de même  $y^2(1 - y^2) \geq 0$  ; et  $2xy \geq 0$ . Donc  $f(x, y) \geq 0$ . Pour la majoration :

**Méthode 1 — par le maximum de  $f$ .** D'après la question 1(c),  $f(x, y) \leq \frac{2}{5} \leq 1$ .

---

**Méthode 2 — par des majorations directes.** On a  $x^2(1 - x^2) \leq x^2 \leq 1$ ,  $y^2(1 - y^2) \leq 1$  et  $2xy \leq 2$ , donc  $f(x, y) \leq \frac{4}{5} \leq 1$ .

---

La première méthode réutilise l'étude de  $f$  ; la seconde est autonome et ne repose pas sur le résultat admis.

Étape 2 : récurrence double. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} \in [0, 1]$  ».  $\mathcal{P}(0)$  est vraie par hypothèse sur  $(u_0, u_1)$ . Si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors  $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \in [0, 1]$  d'après l'étape 1, et  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

Donc  $\forall n \geq 0$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

Majoration de  $u_{n+2}$ . Il suffit de montrer que  $f(x, y) \leq \frac{2}{5}(x + y)$  pour  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , puis d'appliquer cette inégalité à  $(x, y) = (u_n, u_{n+1}) \in [0, 1]^2$ .

**Méthode 1 — par l'inégalité admise.** Pour  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , on a  $x^2 \leq x$  et  $y^2 \leq y$ , donc :

---

$$f(x, y) \leq \frac{2}{5}(x^2 + y^2) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)^2 \leq \frac{2}{5}(x^2 + y^2) \leq \frac{2}{5}(x + y).$$

**Méthode 2 — par des majorations élémentaires.** On a  $x^2(1 - x^2) = x^2 - x^4 \leq x^2$ ,  $y^2(1 - y^2) \leq y^2$  et  $2xy \leq x^2 + y^2$  (car  $(x - y)^2 \geq 0$ ). Donc :

---

$$5f(x, y) \leq 2x^2 + 2y^2 \leq 2x + 2y.$$

## Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}).$$

(b) On procède par récurrence double.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{Q}(n)$  : «  $u_n \leq a_n$  et  $u_{n+1} \leq a_{n+1}$  ».  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie car  $a_0 = u_0$  et  $a_1 = u_1$ .

Supposons  $\mathcal{Q}(n)$  vraie. D'après la question (a) :

$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+2},$$

la seconde inégalité venant de  $\mathcal{Q}(n)$  et de  $\frac{2}{5} > 0$ . Donc  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie.

## Conclusion

$$\forall n \geq 0, u_n \leq a_n.$$

(c) La suite  $(a_n)$  vérifie une récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients réels : on résout l'équation caractéristique.

L'équation caractéristique est  $x^2 = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$ , soit  $5x^2 - 2x - 2 = 0$ . Son discriminant vaut  $4 + 40 = 44 > 0$  : elle admet deux racines réelles distinctes

$$r = \frac{1 + \sqrt{11}}{5} \quad \text{et} \quad s = \frac{1 - \sqrt{11}}{5}.$$

D'après le cours, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda r^n + \mu s^n$ . Ils sont déterminés par  $\lambda + \mu = u_0$  et  $\lambda r + \mu s = u_1$ , ce qui donne, puisque  $r - s = \frac{2\sqrt{11}}{5} \neq 0$  :

$$\lambda = \frac{u_1 - s u_0}{r - s} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{r u_0 - u_1}{r - s}.$$

Convergence. Comme  $9 < 11 < 16$ , on a  $3 < \sqrt{11} < 4$ , d'où  $\frac{4}{5} < r < 1$  et  $-\frac{3}{5} < s < -\frac{2}{5}$ . Ainsi  $|r| < 1$  et  $|s| < 1$ , donc  $r^n \rightarrow 0$  et  $s^n \rightarrow 0$ , et  $a_n \rightarrow 0$ .

D'après les questions (a) et (b),  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq a_n$ . Par le théorème d'encadrement,  $(u_n)$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

## PROBLÈME

---

Rectification de l'énoncé : le texte original appelle  $\lfloor x \rfloor$  « la partie réelle de  $x$  » ; il s'agit de la partie entière, comme l'indique la définition qui suit. L'énoncé est rectifié en conséquence.

## PARTIE I : Calculs de discrétisées.

---

1. Code adapté en Python (l'énoncé original demande une fonction dans un autre langage). L'énoncé est également rectifié en imposant  $a > 0$ , la loi uniforme sur  $[0, a]$  n'étant définie que pour  $a > 0$ .

Si  $Z$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ , alors  $X = aZ$  suit la loi uniforme sur  $[0, a]$  et  $X_d = \lfloor aZ \rfloor$ . La fonction simule  $Z$  par `rd.random()`, multiplie par  $a$  et prend la partie entière.

### Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def discretisee(a):
    X = a * rd.random() # réalisation de X, de loi uniforme sur [0, a]
    return np.floor(X) # réalisation de X_d
```

Ce code a été exécuté : pour  $a = 5$  et 100 000 appels, les valeurs obtenues sont 0, 1, 2, 3, 4 avec des fréquences voisines de 0,2, ce qui est cohérent avec la question 3 (observation expérimentale, non une preuve).

2. On traduit l'événement  $(X_d = k)$  à l'aide de  $X$ , puis on utilise la fonction de répartition.

Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Par définition de la partie entière :

$$(X_d = k) = (\lfloor X \rfloor = k) = (k \leq X < k + 1).$$

Comme  $X$  possède une densité,  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $P(X = x) = 0$  pour tout réel  $x$ . Ainsi :

$$P(k \leq X < k + 1) = P(k < X \leq k + 1) + P(X = k) - P(X = k + 1) = F(k + 1) - F(k).$$

Comme  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , la relation de Chasles donne :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

3. On applique la question 2 avec la densité de la loi uniforme.

Une densité de  $X$  est  $f = \frac{1}{N} \mathbb{1}_{[0, N]}$ . Comme  $X$  prend ses valeurs dans  $[0, N]$ ,  $X_d$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1, \dots, N\}$ . D'après la question 2 :

- pour  $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ ,  $[k, k + 1] \subset [0, N]$  et  $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N} dx = \frac{1}{N}$  ;
- $P(X_d = N) = \int_N^{N+1} f(x) dx = 0$ , car  $f$  est nulle sur  $]N, N + 1]$  (ou encore  $P(X_d = N) = P(X = N) = 0$ ).

### Conclusion

$X_d(\Omega) \subset \{0, \dots, N\}$ , la valeur  $N$  n'étant prise qu'avec une probabilité nulle ; presque sûrement  $X_d$  prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, N - 1\}$  et suit la loi uniforme sur  $\{0, \dots, N - 1\}$  :

$$\forall k \in \{0, \dots, N - 1\}, \quad P(X_d = k) = \frac{1}{N}.$$

4. On vérifie que les nombres proposés sont positifs et de somme 1, puis on cherche  $f$  dont les intégrales sur  $[k, k + 1]$  redonnent ces nombres.

Loi de  $Y$ . Pour  $k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $\frac{k+1}{k} > 1$ , donc  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) > 0$ ; de plus  $\ln(10) > 0$ .  
Les nombres  $P(Y = k)$  sont donc positifs. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^9 \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^9 (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(10) - \ln(1) = \ln(10),$$

donc

$$\sum_{k=1}^9 P(Y = k) = 1.$$

On définit bien une variable aléatoire discrète  $Y$ .

Recherche de  $f$ . D'après la question 2, il suffit de trouver une densité  $f$  nulle hors de

$[1, 10[$  et telle que  $\int_k^{k+1} f(x) dx = P(Y = k)$  pour  $k \in \{1, \dots, 9\}$  : on aura alors  
 $P(X_d = k) = P(Y = k)$  pour  $k \in \{1, \dots, 9\}$  et  $P(X_d = k) = 0$  pour les autres entiers  $k$ ,  
donc  $X_d$  et  $Y$  auront la même loi.

**Méthode 1 — densité en  $\frac{1}{x}$ .** Puisque  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ , on pose :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(10)} \text{ si } x \in [1, 10[, \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

La fonction  $f$  est positive, continue sauf en 1 et 10, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\ln(10)} [\ln x]_1^{10} = 1 : \text{c'est une densité. Pour } k \in \{1, \dots, 9\} :$$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = P(Y = k).$$

## Méthode 2 — densité constante par morceaux. On pose :

$f(x) = P(Y = \lfloor x \rfloor)$  si  $x \in [1, 10[$ , et  $f(x) = 0$  sinon.

Cette fonction est positive, constante sur chaque intervalle  $[k, k+1[$  pour  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , donc continue sauf aux entiers  $1, \dots, 10$ . Pour  $k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $\int_k^{k+1} f(x) dx = P(Y = k)$ , et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \sum_{k=1}^9 P(Y = k) = 1 :$$

c'est une densité qui convient.

La méthode 1 exploite la forme particulière des probabilités (un logarithme est une intégrale de  $\frac{1}{x}$ ) ; la méthode 2 est un procédé général qui fonctionne pour toute loi à support fini dans les entiers.

## Conclusion

la densité  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$  sur  $[1, 10[$  et 0 ailleurs convient (ainsi que la densité de la méthode 2).

5.

(a) On calcule la fonction de répartition de  $nX$ .

**Méthode 1 — par la fonction de répartition.** Soit  $F_n$  la fonction de répartition de  $nX$ . Comme  $n > 0$ , pour tout réel  $x$ ,  $F_n(x) = P(nX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{n}\right)$ . Donc  $F_n(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F_n(x) = 1 - e^{-\lambda x/n}$  si  $x \geq 0$ . On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\frac{\lambda}{n}$ .

**Méthode 2 — par le théorème sur les transformations affines.** Si  $X$  admet une densité  $f_X$  et  $n \neq 0$ , alors  $nX$  admet pour densité  $x \mapsto \frac{1}{n} f_X\left(\frac{x}{n}\right)$ .

Dans les deux cas,  $nX$  possède la densité :

$$f_n(x) = \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda x/n} \text{ si } x \geq 0, \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

### Conclusion

$nX$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\frac{\lambda}{n}$ , de densité  $f_n$ .

(b) On applique la question 2 à la variable  $nX$ , dont la discrétisée est  $\lfloor nX \rfloor$ .

Posons  $q = e^{-\lambda/n}$ ; comme  $\frac{\lambda}{n} > 0$ ,  $q \in ]0, 1[$ . Pour  $k$  entier strictement négatif,  $f_n$  est nulle sur  $[k, k+1[$  donc  $P(\lfloor nX \rfloor = k) = 0$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P(\lfloor nX \rfloor = k) = \int_k^{k+1} \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda x/n} dx = e^{-\lambda k/n} - e^{-\lambda(k+1)/n} = q^k(1 - q).$$

Ainsi  $\lfloor nX \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P(\lfloor nX \rfloor = k) = q^k(1 - q)$ .

Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(\lfloor nX \rfloor + 1 = j) = P(\lfloor nX \rfloor = j - 1) = (1 - q)q^{j-1}$ .

### Conclusion

$\lfloor nX \rfloor + 1$  suit la loi géométrique de paramètre  $p_n = 1 - e^{-\lambda/n}$ .

(c) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $m = \lfloor nx \rfloor \in \mathbb{N}$ . On commence par une équivalence d'événements valable pour un entier.

Comme  $\lfloor nX \rfloor$  est un entier, on a  $\lfloor nX \rfloor \leq nx$  si et seulement si  $\lfloor nX \rfloor \leq m$  (si un entier est inférieur à  $nx$ , il est inférieur au plus grand entier inférieur à  $nx$ , et réciproquement  $m \leq nx$ ). Donc :

$$(Y_n \leq x) = (\lfloor nX \rfloor \leq nx) = (\lfloor nX \rfloor \leq m).$$

**Méthode 1 — par la loi géométrique.** Avec  $G = \lfloor nX \rfloor + 1$ , de loi géométrique de paramètre  $1 - q$  :

$$P(Y_n \leq x) = P(G \leq m + 1) = \sum_{j=1}^{m+1} (1 - q)q^{j-1} = 1 - q^{m+1}.$$

**Méthode 2 — directement avec  $X$ .** On a  $\lfloor nX \rfloor \leq m$  si et seulement si  $nX < m + 1$ , donc :

$$P(Y_n \leq x) = P\left(X < \frac{m+1}{n}\right) = 1 - e^{-\lambda(m+1)/n},$$

car  $X$  est à densité (donc  $P(X < a) = P(X \leq a)$ ) et  $\frac{m+1}{n} > 0$ .

La première méthode réinvestit la question (b) ; la seconde court-circuite la loi de  $\lfloor nX \rfloor$  et ne demande que la fonction de répartition de  $X$ .

### Conclusion

$$P(Y_n \leq x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$

(d) Question adaptée au programme actuel pour la seule notation : la suite est indexée par  $n \geq 1$ , car  $Y_n$  n'est pas défini pour  $n = 0$ .

Encadrement. Pour tout réel  $x$  et tout  $n \geq 1$ ,  $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$ , donc :

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x.$$

Convergence en loi. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . On a  $x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq x + \frac{1}{n}$ , donc par encadrement

$\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \rightarrow x$ . Par continuité de l'exponentielle et la question (c) :

$$P(Y_n \leq x) \rightarrow 1 - e^{-\lambda x}.$$

Soit  $x < 0$ . Comme  $X \geq 0$ , on a  $\lfloor nX \rfloor \geq 0$  et  $Y_n \geq 0$ , donc  $P(Y_n \leq x) = 0$  pour tout  $n$ .

Soit  $Y$  une variable de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Sa fonction de répartition vaut 0 sur  $]-\infty, 0[$  et  $1 - e^{-\lambda x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ ; elle est continue sur  $\mathbb{R}$ . On a montré que  $F_{Y_n}(x) \rightarrow F_Y(x)$  pour tout réel  $x$ , en particulier en tout point de continuité de  $F_Y$ .

### Conclusion

$(Y_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable  $Y$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

## PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

1. On calcule l'intégrale à l'aide d'une primitive, puis on développe par la formule du binôme.

Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , une primitive de  $t \mapsto t^k$  étant  $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$  :

$$u(e_k)(x) = \int_x^{x+1} t^k dt = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}.$$

Par la formule du binôme,

$$(x+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j;$$

le terme d'indice  $k+1$  vaut  $x^{k+1}$  et se simplifie. Donc :

$$u(e_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} e_j.$$

Le coefficient de  $e_k$  vaut  $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{k} = 1$ . Par exemple  $u(e_0) = e_0$  et

$$u(e_1) = e_1 + \frac{1}{2}e_0.$$

2. On utilise la linéarité de l'intégrale, puis la question 1.

Linéarité. Soient  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ , par linéarité de l'intégrale sur le segment  $[x, x+1]$  :

$$u(\alpha Q_1 + Q_2)(x) = \int_x^{x+1} (\alpha Q_1(t) + Q_2(t)) dt = \alpha u(Q_1)(x) + u(Q_2)(x).$$

Donc  $u(\alpha Q_1 + Q_2) = \alpha u(Q_1) + u(Q_2)$ .

Stabilité. Soit

$$Q = \sum_{k=0}^n q_k e_k \in \mathbb{R}_n[X].$$

**Méthode 1 — par la base canonique. Par linéarité,**

$$u(Q) = \sum_{k=0}^n q_k u(e_k).$$

**D'après la question 1, chaque  $u(e_k)$  est combinaison linéaire de  $e_0, \dots, e_k$ , donc appartient à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Donc  $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ .**

**Méthode 2 — par une primitive. Soit  $\Phi$  la primitive de  $Q$  nulle en 0 :**

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{k+1} x^{k+1},$$

**polynôme de degré au plus  $n+1$ . Alors  $u(Q)(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ . Le coefficient de  $x^{n+1}$  dans  $\Phi(x+1)$  est le même que dans  $\Phi(x)$ , à savoir  $\frac{q_n}{n+1}$ ; il disparaît dans la différence, qui est donc de degré au plus  $n$ .**

La méthode 1 donne en plus l'expression de  $u(Q)$  dans la base canonique ; la méthode 2 met en évidence le mécanisme général (la différence  $\Phi(x+1) - \Phi(x)$  fait baisser le degré).

### Conclusion

$u$  est linéaire et  $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X] : u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

3. On montre que la famille est libre ; comme elle compte  $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$  éléments, ce sera une base.

**Méthode 1 — famille échelonnée en degré.** D'après la question 1,  $u(e_k)$  est de degré exactement  $k$  (coefficient dominant 1). Supposons

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k u(e_k) = 0$$

avec des  $\alpha_k$  non tous nuls, et soit  $p$  le plus grand indice tel que  $\alpha_p \neq 0$ . Le coefficient de  $x^p$  dans cette combinaison vaut  $\alpha_p \neq 0$  (les  $u(e_k)$  avec  $k < p$  sont de degré  $< p$ ), ce qui contredit la nullité. La famille est donc libre.

**Méthode 2 — matrice triangulaire.** D'après la question 1, la matrice de  $u$  dans la base  $(e_0, \dots, e_n)$  est triangulaire supérieure, de coefficient  $(j, k)$  égal à  $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j}$  pour  $j \leq k$ , avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1. Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls est inversible, donc  $u$  est un automorphisme et transforme la base  $(e_k)$  en une base.

La méthode 1 est un argument de degré, utile pour toute famille de polynômes de degrés échelonnés ; la méthode 2 fournit en même temps la bijectivité de  $u$ , utile à la

question suivante.

### Conclusion

$(u(e_k))_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

4. On traduit la question en termes de bijectivité de  $u$ .

L'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  envoie la base  $(e_0, \dots, e_n)$  sur la base  $(u(e_0), \dots, u(e_n))$  (question 3) : c'est donc un isomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $R \in \mathbb{R}_n[X]$ . La condition demandée s'écrit  $u(Q_R) = R$ . Par surjectivité de  $u$ , il existe  $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $u(Q_R) = R$ ; par injectivité, il est unique.

### Conclusion

pour tout  $R \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe un unique  $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t) dt$ , à savoir  $Q_R = u^{-1}(R)$ .

5. On cherche  $Q_R = \alpha e_0 + \beta e_1$  et on identifie.

D'après la question 1,  $u(e_0) = e_0$  et  $u(e_1) = e_1 + \frac{1}{2}e_0$ . Par linéarité :

$$u(\alpha e_0 + \beta e_1) = \beta e_1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) e_0.$$

L'égalité avec  $R = \frac{1}{6}e_1$  équivaut, par unicité des coordonnées dans la base  $(e_0, e_1)$ , à  $\beta = \frac{1}{6}$  et  $\alpha + \frac{\beta}{2} = 0$ , soit  $\alpha = -\frac{1}{12}$ .

Vérification :

$$\int_x^{x+1} \left(\frac{t}{6} - \frac{1}{12}\right) dt = \frac{(x+1)^2 - x^2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2x+1-1}{12} = \frac{x}{6}.$$

## Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_R(x) = \frac{x}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2x-1}{12}.$$

6.

(a) On applique la question 2 de la partie I et on reconnaît  $u(Q)$ .

Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . D'après la partie I, question 2,  $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx$ .

- Si  $k \in \{0, \dots, N\}$ , alors  $[k, k+1[ \subset [0, N+1[$  et  $f$  coïncide avec  $Q$  sur  $[k, k+1[$ ; une modification de la valeur en un point ne change pas l'intégrale, donc

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} Q(t) dt = u(Q)(k).$$

- Si  $k \leq -1$  ou  $k \geq N+1$ ,  $f$  est nulle sur  $[k, k+1[$ , donc  $P(X_d = k) = 0$ .

Ainsi  $P(X_d \in \{0, \dots, N\}) = 1$  : à un événement négligeable près,  $X_d(\Omega) = \{0, \dots, N\}$ , convention habituelle pour désigner l'ensemble des valeurs prises par une variable discrète (certaines de ces valeurs pouvant éventuellement être de probabilité nulle).

On pose  $R = u(Q)$ . D'après la question 2,  $R \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ .

## Conclusion

le polynôme  $R = u(Q)$ , défini par  $R(x) = \int_x^{x+1} Q(t) dt$ , vérifie  $\forall k \in \{0, \dots, N\}$ ,  $P(X_d = k) = R(k)$ .

(b) On raisonne par l'absurde en utilisant la positivité d'une densité.

Supposons qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $f = Q$  sur  $[0, 4[$  et que  $X_d$  ait la loi de  $Y$ .

Étape 1 :  $Q$  est nulle sur  $[0, 1]$ . D'après la partie I, question 2, et puisque  $f = Q$  sur  $[0, 1[$  :

$$\int_0^1 Q(t) dt = P(X_d = 0) = P(Y = 0) = 0.$$

Une densité est positive, donc  $Q(t) = f(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, 1[$ , puis  $Q(1) \geq 0$  par

continuité du polynôme  $Q$ . Ainsi  $Q$  est continue, positive sur  $[0, 1]$ , d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$  : par le théorème de positivité stricte de l'intégrale d'une fonction continue,  $Q$  est nulle sur  $[0, 1]$ .

Étape 2 :  $Q$  est le polynôme nul. Le polynôme  $Q$  admet une infinité de racines (tous les réels de  $[0, 1]$ ), donc  $Q = 0$ .

Étape 3 : contradiction. Alors  $P(X_d = 1) = \int_1^2 Q(t) dt = 0$ , alors que

$$P(Y = 1) = \frac{1}{6} \neq 0.$$

### Conclusion

il n'existe aucun polynôme  $Q$  tel que  $f = Q$  sur  $[0, 4[$  et que  $Y$  soit la discrétisée de  $X$  ; la propriété des densités mise en défaut est la positivité ( combinée à la continuité de  $Q$  ).

Remarque : le polynôme  $Q_R(x) = \frac{2x-1}{12}$  de la question 5 vérifie bien  $\int_k^{k+1} Q_R = \frac{k}{6}$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $\int_0^4 Q_R = 1$ , mais  $Q_R(0) = -\frac{1}{12} < 0$  : il ne peut pas être une densité sur  $[0, 4[$ , ce qui illustre le résultat.

## PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

1. On compare la série à une série de Riemann convergente.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 + x + k \geq 1 + k > 0$ , donc :

$$|g'(x+k)| \leq \frac{C}{(1+x+k)^2} \leq \frac{C}{(1+k)^2}.$$

La série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2}$$

est une série de Riemann convergente (exposant  $2 > 1$ ). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |g'(x+k)|$$

converge, donc

$$\sum g'(x+k)$$

converge absolument, donc converge.

Signe. La fonction  $g$  étant décroissante et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $g' \leq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-g'(x+k))$$

est la somme d'une série convergente à termes positifs, donc  $f(x) \geq 0$ ; pour  $x < 0$ ,  $f(x) = 0$ .

## Conclusion

la série converge et  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

2.

(a) On applique l'inégalité des accroissements finis à  $g'$ .

Soient  $(x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $x = a$ , l'inégalité est une égalité  $0 = 0$ . Sinon, la fonction  $g'$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  (car  $g$  est  $C^2$ ), et pour tout  $t$  compris entre  $x+k$  et  $a+k$ , on a  $t \geq k$ , donc :

$$|g''(t)| \leq \frac{C}{(1+t)^2} \leq \frac{C}{(1+k)^2}.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à  $g'$  sur le segment d'extrémités  $x+k$  et

$a + k$  donne :

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{C}{(k+1)^2} |(x+k) - (a+k)| = \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

(b) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demande la continuité de  $f$  en tout  $a \in \mathbb{R}_+$ . En  $a = 0$ , la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  n'est en général pas continue (sa limite à gauche est 0 alors que

$$f(0) = - \sum g'(k)$$

peut être strictement positif) ; la question porte donc sur la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$ .

On somme les inégalités de la question (a).

Soient  $(x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Les séries

$$\sum g'(x+k)$$

et

$$\sum g'(a+k)$$

convergent (question 1), donc par linéarité :

$$f(a) - f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (g'(x+k) - g'(a+k)).$$

Pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , l'inégalité triangulaire et la question (a) donnent :

$$\left| \sum_{k=0}^M (g'(x+k) - g'(a+k)) \right| \leq C|x-a| \sum_{k=0}^M \frac{1}{(k+1)^2} \leq C|x-a| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

En faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$  (passage à la limite dans une inégalité large), on obtient, avec

$$D = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \geq 0,$$

réel fini d'après la question 1 :

$$|f(x) - f(a)| \leq D|x - a|.$$

Continuité. Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq |f(x) - f(a)| \leq D|x - a|$  et  $D|x - a| \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow a$ ; par encadrement,  $f(x) \rightarrow f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

### Conclusion

la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0.

3. Les sommes  $S_N(t)$  et  $R_N(t)$  sont bien définies :  $S_N(t)$  est une somme finie et  $R_N(t)$  est le reste d'ordre  $N$  de la série convergente de la question 1. De plus  $f(t) = S_N(t) + R_N(t)$  pour  $t \geq 0$ .

(a) On réduit au même dénominateur, puis on compare le reste à une série télescopique.

Inégalité. Soient  $k \geq 1$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . On a  $t + k > 0$  et :

$$\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k)(t+k+1)}.$$

Comme  $0 < (t+k)(t+k+1) \leq (t+k+1)^2$ , on obtient  $\frac{1}{(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}$ .

Majoration du reste. Soient  $N \geq 0$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $M \geq N+1$ , par l'inégalité triangulaire, l'hypothèse sur  $g'$  et l'inégalité précédente (avec  $k \geq N+1 \geq 1$ ) :

$$\left| \sum_{k=N+1}^M g'(t+k) \right| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{C}{(1+t+k)^2} \leq C \sum_{k=N+1}^M \left( \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} \right)$$

$$= C \left( \frac{1}{t + N + 1} - \frac{1}{t + M + 1} \right).$$

Le dernier membre est majoré par  $\frac{C}{t + N + 1}$ . En faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$  :

$$|R_N(t)| \leq \frac{C}{t + N + 1} \leq \frac{C}{N + 1}.$$

### Conclusion

$$\forall N \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, |R_N(t)| \leq \frac{C}{N + 1}.$$

(b) On intègre la décomposition  $f = S_N + R_N$  sur  $[0, 1]$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Sur  $[0, 1]$ ,  $f$  est continue (question 2(b)) et  $S_N$  est continue (somme finie de fonctions continues,  $g'$  étant continue). Donc  $R_N = f - S_N$  est continue sur  $[0, 1]$  et toutes les intégrales ci-dessous existent. Par linéarité :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 S_N(t) dt + \int_0^1 R_N(t) dt.$$

Pour chaque  $k$ , une primitive de  $t \mapsto g'(t + k)$  est  $t \mapsto g(t + k)$ , d'où :

$$\int_0^1 S_N(t) dt = - \sum_{k=0}^N (g(k + 1) - g(k)) = g(0) - g(N + 1)$$

par télescopage.

### Conclusion

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t) dt = g(0) - g(N + 1) + \int_0^1 R_N(t) dt.$$

(c) On fait tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans l'égalité précédente.

Limite de  $g(k)$ . La série

$$\sum g(k)$$

converge, donc son terme général tend vers 0 :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 0$ .

Limite du terme intégral. Par la question (a) et la croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^1 R_N(t) dt \right| \leq \int_0^1 |R_N(t)| dt \leq \frac{C}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Le membre de gauche de (b) ne dépend pas de  $N$  ; en passant à la limite :

$$\int_0^1 f(t) dt = g(0).$$

4.

(a) On compare les deux séries définissant  $f(t+1)$  et  $f(t)$ , puis on dérive l'intégrale.

Relation fonctionnelle. Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $t+1 \geq 0$ , et par le changement d'indice  $j = k+1$  :

$$f(t+1) = - \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+1+k) = - \sum_{j=1}^{+\infty} g'(t+j).$$

Les deux séries convergent, donc par linéarité :

$$f(t+1) - f(t) = - \sum_{j=1}^{+\infty} g'(t+j) + \sum_{j=0}^{+\infty} g'(t+j) = g'(t).$$

Expression de  $g$ .

**Méthode 1 — par dérivation.** La restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$  est continue (question 2(b)),

donc  $\Phi : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Posons

$h(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \Phi(x+1) - \Phi(x)$  pour  $x \geq 0$ . La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :

---


$$h'(x) = f(x+1) - f(x) = g'(x).$$

Ainsi  $(h - g)' = 0$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$  :  $h - g$  est constante. Or  $h(0) = \int_0^1 f = g(0)$  (question 3(c)), donc la constante est nulle et  $h = g$ .

**Méthode 2 — en reprenant la question 3 sur  $[x, x+1]$ .** Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Comme en 3(b), avec  $f = S_N + R_N$  continues sur  $[x, x+1]$  :

---


$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} f(t) dt &= - \sum_{k=0}^N (g(x+k+1) - g(x+k)) + \int_x^{x+1} R_N(t) dt = g(x) \\ &\quad - g(x+N+1) + \int_x^{x+1} R_N(t) dt. \end{aligned}$$

Le dernier terme est majoré en valeur absolue par  $\frac{C}{N+1}$  (question 3(a)). De plus  $g$  est positive et décroissante, et  $x+N+1 \geq N+1$ , donc  $0 \leq g(x+N+1) \leq g(N+1)$  ; comme  $g(N+1) \rightarrow 0$  (question 3(c)), on obtient  $g(x+N+1) \rightarrow 0$  par encadrement. En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\int_x^{x+1} f(t) dt = g(x)$ .

La méthode 1 utilise la relation fonctionnelle et la question 3(c) comme condition initiale ; la méthode 2 généralise directement le calcul de la question 3 et n'utilise pas la relation  $f(t+1) - f(t) = g'(t)$ .

## Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

(b) On découpe l'intégrale selon les entiers, puis on utilise la positivité de  $f$ .

Expression de  $S_N$ . Soit  $N \geq 1$ . Par la relation de Chasles et la question (a) appliquée en  $x = k$  :

$$S_N = \int_0^N f(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} g(k).$$

Encadrement. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  ; on a  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Comme  $f \geq 0$ , la fonction

$y \mapsto \int_0^y f(t) dt$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , d'où :

$$S_{\lfloor x \rfloor} \leq \int_0^x f(t) dt \leq S_{\lfloor x \rfloor + 1}$$

(avec  $S_0 = 0$  lorsque  $\lfloor x \rfloor = 0$ ).

Convergence de l'intégrale.

## Méthode 1 — par encadrement. Les sommes partielles de la série

$$\sum g(k)$$

**tendent vers 1 :  $S_N \rightarrow 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $N_0$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ ,  $|S_N - 1| \leq \varepsilon$ . Pour  $x \geq N_0$ , on a  $\lfloor x \rfloor \geq N_0$  et  $\lfloor x \rfloor + 1 \geq N_0$ , donc :**

$$1 - \varepsilon \leq S_{\lfloor x \rfloor} \leq \int_0^x f(t) dt \leq S_{\lfloor x \rfloor + 1} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ainsi  $\int_0^x f(t) dt \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Méthode 2 — par la limite monotone.** La fonction  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et majorée par 1, car

$$S_{[x]+1} = \sum_{k=0}^{[x]} g(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$$

(série à termes positifs). Elle admet donc une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Cette limite est en particulier celle de la suite  $\left( \int_0^N f \right)_N = (S_N)_N$ , qui vaut 1 ; donc  $\ell = 1$ .

La méthode 1 utilise pleinement l'encadrement demandé ; la méthode 2 n'utilise que sa partie droite et sépare l'existence de la limite (monotonie) de son calcul (le long des entiers).

### Conclusion

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.

(c) On vérifie les propriétés caractérisant une densité, puis on applique la partie I.

Densité. La fonction  $f$  est :

- positive sur  $\mathbb{R}$  (question 1) ;
- continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0 : sur  $] -\infty, 0[$  elle est nulle, et sur l'ouvert  $]0, +\infty[$  elle coïncide avec sa restriction à  $\mathbb{R}_+$ , continue (question 2(b)) ;
- d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}$  égale à 1 :  $\int_{-\infty}^0 f = 0$  et  $\int_0^{+\infty} f = 1$  (question (b)).

D'après le cours,  $f$  est donc une densité de probabilité, et il existe une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  pour densité.

Loi de la discrétisée. D'après la partie I, question 2 (qui n'utilise que l'existence d'une densité), pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t) dt$ .

- Si  $k \leq -1$ , alors  $k + 1 \leq 0$  et  $f$  est nulle sur  $[k, k + 1]$ , donc  $P(X_d = k) = 0$ .
- Si  $k \in \mathbb{N}$ , la question (a) donne  $P(X_d = k) = g(k) = P(Y = k)$ .

### Conclusion

$X_d$  prend presque sûrement ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X_d = k) = P(Y = k)$  : la discrétisée  $X_d$  suit la même loi que  $Y$ .

### Relevé des adaptations

---

- Exercice 1, énoncé : rectification de l'hypothèse «  $k$  entier naturel non nul » en «  $k \geq 2$  ». Pour  $k = 1$ , le résultat de la question 4 est faux ( $A = 2I_n$  donne  $B = 4I_n$ ,  $B^2 \neq B$ ) et la détermination des valeurs propres à la question 3 échoue.
- Exercice 1, question 2 : suppression du mot « réelles ». Dans le programme, les valeurs propres sont réelles par définition et aucun raisonnement sur les nombres complexes n'est autorisé ; seule la positivité est démontrée.
- Exercice 2, question 2 : code adapté en Python (programme demandé initialement dans un autre langage) ; la syntaxe de input, int, float et print est rappelée dans le sujet.
- Problème, préambule : rectification de « partie réelle » en « partie entière ».
- Partie I, question 1 : code adapté en Python, avec description de np.floor et rd.random ; rectification de  $a \in \mathbb{R}_+$  en  $a \in \mathbb{R}_+^*$  (la loi uniforme sur  $[0, a]$  exige  $a > 0$ ).

- Partie I, question 5(d) : suite indexée par  $n \geq 1$  au lieu de  $n \geq 0$ , car  $Y_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$  n'est pas défini pour  $n = 0$ .
- Partie III, question 2(b) : continuité demandée pour la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  pouvant être discontinue en 0.