



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2012

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Notations : pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$, $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}$ et, pour $a > 0$,
 $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.

1. Il s'agit d'établir la convergence de deux intégrales impropres en $+\infty$: I_a par un calcul direct sur un segment puis passage à la limite, $f(x)$ par comparaison de fonctions positives.

Convergence et valeur de I_a . La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $A > 0$:

$$\int_0^A e^{-at} dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_0^A = \frac{1 - e^{-aA}}{a}.$$

Comme $a > 0$, $e^{-aA} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$, donc $\int_0^A e^{-at} dt \rightarrow \frac{1}{a}$.

Conclusion

$$I_a \text{ converge et } I_a = \frac{1}{a}.$$

Convergence de $f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{x + e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car $x + e^t \geq e^t > 0$. De plus, pour tout $t \geq 0$:

$$0 < \frac{1}{x + e^t} \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_1$ converge. Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $f(x)$ converge.

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)$ converge, et $f(x) \geq 0$ par positivité.

Remarque : la convergence de $g(x)$, admise par l'énoncé, s'obtient de la même façon puisque $0 < \frac{1}{(x + e^t)^2} \leq e^{-2t}$ et que I_2 converge.

2. On établit l'inégalité arithmético-géométrique par un carré, puis on intègre la majoration obtenue.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Les réels x et e^t sont positifs, donc $\sqrt{xe^t} = \sqrt{x}\sqrt{e^t}$ et :

$$x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0.$$

Donc $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$.

Soit maintenant $x > 0$. Pour tout $t \geq 0$, $2\sqrt{x}e^{t/2} > 0$, donc par décroissance de l'inverse sur $]0, +\infty[$:

$$0 < \frac{1}{x + e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}e^{t/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-t/2}.$$

Les intégrales $f(x)$ et $I_{1/2}$ convergent (question 1). Par croissance de l'intégrale (sur $[0, A]$ puis en faisant $A \rightarrow +\infty$) :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} I_{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. On écrit $f(x) - f(y)$ comme une seule intégrale, puis on encadre l'intégrande.

Soient $0 \leq x < y$. Les intégrales $f(x)$ et $f(y)$ convergent, donc par linéarité :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x + e^t} - \frac{1}{y + e^t} \right) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt, \quad \text{avec } h(t) \\ &= \frac{y - x}{(x + e^t)(y + e^t)}. \end{aligned}$$

Minoration stricte. La fonction h est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Pour $t \in [0, 1]$, $0 < (x + e^t)(y + e^t) \leq (y + e)^2$, donc $h(t) \geq \frac{y - x}{(y + e)^2}$. Comme $h \geq 0$ sur $[1, +\infty[$:

$$f(x) - f(y) \geq \int_0^1 h(t) dt \geq \frac{y - x}{(y + e)^2} > 0.$$

Majoration. Pour tout $t \geq 0$, $(x + e^t)(y + e^t) \geq e^t \cdot e^t = e^{2t} > 0$, donc

$0 < h(t) \leq (y - x)e^{-2t}$. Par croissance de l'intégrale (les deux intégrales convergent) :

$$f(x) - f(y) \leq (y - x) I_2 = \frac{y - x}{2}.$$

Conclusion

$$0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y - x}{2}.$$

4. On applique le théorème de la bijection à f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$: il faut la continuité, la stricte monotonie, la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

Stricte décroissance : d'après la question 3, $x < y$ implique $f(x) > f(y)$.

Continuité : d'après la question 3, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}$ (si $x = y$ c'est évident, sinon on applique la question 3 en rangeant x et y dans l'ordre croissant).

Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé, $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$, donc f est continue en x_0 .

Valeur en 0 : $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_1 = 1$.

Limite en $+\infty$: pour $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ (question 2) et $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Théorème de la bijection : f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{+\infty} f, f(0) \right] =]0, 1]$.

Conclusion

f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

5. On étudie la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (question 4) et strictement décroissante comme somme de la fonction strictement décroissante f et de la fonction décroissante $x \mapsto -x$.

On a $\varphi(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 < 0$ car $f(1) < f(0) = 1$ par stricte décroissance de f .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule sur $]0, 1[$. Comme φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est injective : ce zéro est unique sur $\mathbb{R}_+$.

On peut aussi remarquer directement que $\alpha = f(\alpha)$ appartient à $f(\mathbb{R}_+) =]0, 1]$ d'après la question 4.

Conclusion

l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$, et $\alpha \in]0, 1[\subset]0, 1]$.

6. (a) On montre d'abord que la suite est bien définie, puis on utilise le caractère $\frac{1}{2}$ -lipschitzien de f et une récurrence.

La suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+ : u_0 = 0 \in \mathbb{R}_+$ et, si $u_n \in \mathbb{R}_+$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0, 1] \subset \mathbb{R}_+$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}$ (question 4). Comme $f(\alpha) = \alpha$ et $u_n, \alpha \in \mathbb{R}_+$:

$$|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \leq \frac{1}{2}|\alpha - u_n|.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$.

Initialisation : $|\alpha - u_0| = \alpha \leq 1 = \frac{1}{2^0}$ car $\alpha \in]0, 1]$.

Hérédité : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $|\alpha - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, on obtient par encadrement $u_n \rightarrow \alpha$.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

(b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

On fait évoluer simultanément deux variables : u contient u_k et p contient $\frac{1}{2^k}$. On itère tant que $\frac{1}{2^k} > \varepsilon$; la boucle s'arrête au premier indice k tel que $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire en $k = N$, et l'on renvoie alors u_N .

Python

```
def suite(eps):
    u = 0          # u contient u_k, avec k = 0 au départ
    p = 1          # p contient 1/2**k
    while p > eps:
        u = ecricome(u)  # passage de u_k à u_{k+1}
```

```
p = p / 2          # passage de 1/2**k à 1/2**(k+1)
return u
```

Justification : au début de chaque passage dans la boucle, u vaut u_k et p vaut $\frac{1}{2^k}$ pour le même entier k , et la condition $p > \text{eps}$ garantit que $k < N$. La boucle termine car $\frac{1}{2^k} \rightarrow 0$ et $\varepsilon > 0$. À la sortie, $p \leq \text{eps}$ pour la première fois, donc $k = N$ et la fonction renvoie u_N . Si $\varepsilon \geq 1$, on a $N = 0$ et la fonction renvoie $u_0 = 0$.

D'après la question 6(a), la valeur renvoyée vérifie $|u_N - \alpha| \leq \frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$: c'est une valeur approchée de α à ε près.

Code exécuté. Pour tester, on a utilisé la fonction `ecricome` suivante, qui repose sur l'expression $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$ établie à la question 8 :

Python

```
import numpy as np

def ecricome(x):
    if x == 0:
        return 1.0
    return np.log(1 + x) / x

print(suite(1e-6))    # affiche environ 0.746881742308
print(suite(1))       # affiche 0 (cas N = 0)
```

L'exécution donne $\text{suite}(1e-6) \approx 0,7468817$, en accord avec la valeur $\alpha \approx 0,7468817$ obtenue en itérant f un grand nombre de fois. Cette observation numérique illustre la question 6(a) mais ne constitue pas une preuve.

7. On calcule exactement l'intégrande de $f(x+h) - f(x) + hg(x)$, puis on le majore par un multiple de e^{-3t} ; on en déduit la dérivabilité par la définition du nombre dérivé.

Soient $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h > 0$. Les intégrales $f(x+h)$, $f(x)$ et $g(x)$ convergent, donc par linéarité :

$$f(x+h) - f(x) + hg(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt.$$

Pour $t \geq 0$, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} = \frac{-h}{(x+h+e^t)(x+e^t)},$$

puis

$$\frac{-h}{(x+h+e^t)(x+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} = h \cdot \frac{-(x+e^t) + (x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} = \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}.$$

Comme $x+h > 0$ et $x > 0$, on a $x+h+e^t \geq e^t > 0$ et $(x+e^t)^2 \geq e^{2t}$, donc :

$$0 \leq \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \leq h^2 e^{-3t}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq f(x+h) - f(x) + hg(x) \leq h^2 I_3 = \frac{h^2}{3}.$$

Donc $|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}$.

Dérivabilité. Soit $x > 0$. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $h > -x$ (ce qui est le cas pour $|h| < x$), on divise par $|h|$:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + g(x) \right| \leq \frac{|h|}{3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Le taux d'accroissement de f en x tend donc vers $-g(x)$.

Conclusion

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x)$.

8. Méthode 1 — Par la dérivée de T (méthode suggérée par l'énoncé).

Calcul de T' . D'après la question 7, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc T aussi comme produit, et pour $x > 0$:

$$T'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x).$$

Les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent, donc par linéarité :

$$f(x) - xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(x + e^t) - x}{(x + e^t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x + e^t)^2} dt.$$

Sur un segment $[0, A]$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{x + e^t}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{(x + e^t)^2}$, donc :

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x + e^t)^2} dt = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + e^A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x}.$$

Ainsi $\forall x > 0$, $T'(x) = \frac{1}{1 + x}$.

Expression de T . La fonction $\psi : x \mapsto T(x) - \ln(1 + x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de dérivée nulle, donc elle y est constante, égale à un réel c . Pour $x > 0$, $0 < f(x) \leq 1$ (question 4), donc $0 < T(x) \leq x$ et $T(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$; de plus $\ln(1 + x) \rightarrow 0$. Donc $c = \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = 0$.

Conclusion

$$\forall x > 0, T'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } T(x) = \ln(1+x).$$

Méthode 2 — Calcul direct de $f(x)$ par une primitive explicite.

Soit $x > 0$. Pour $t \geq 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-t} :

$\frac{1}{x + e^t} = \frac{e^{-t}}{1 + xe^{-t}}$. La fonction $G : t \mapsto -\frac{1}{x} \ln(1 + xe^{-t})$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (car $1 + xe^{-t} > 0$) et :

$$G'(t) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{-xe^{-t}}{1 + xe^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1 + xe^{-t}}.$$

Donc, pour $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{dt}{x + e^t} = G(A) - G(0) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1 + xe^{-A})}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x},$$

par continuité de $\ln$ en 1. Ainsi $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, donc $T(x) = \ln(1+x)$, et en dérivant

$$T'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Comparaison : la méthode 1 exploite la structure de l'exercice (dérivée $f' = -g$ obtenue sans calculer f) et une constante d'intégration déterminée par une limite ; elle reste utilisable quand aucune primitive n'est apparente. La méthode 2, plus rapide quand on repère la primitive, donne directement l'expression explicite de f .

EXERCICE 2

1. (a) On vérifie directement que

$$\sum_{k=0}^{q-1} U^k$$

est un inverse de $I_n - U$ grâce à un télescopage.

Posons

$$S = \sum_{k=0}^{q-1} U^k.$$

Alors :

$$(I_n - U)S = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=0}^{q-1} U^{k+1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=1}^q U^k = I_n - U^q = I_n.$$

De même,

$$S(I_n - U) = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=1}^q U^k = I_n - U^q = I_n.$$

Conclusion

$I_n - U$ est inversible et

$$(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k.$$

(b) On traduit $A(A - I_n) = 0_n$ en $f \circ f = f$, puis on décompose tout vecteur.

Comme $A(A - I_n) = A^2 - A = 0_n$ et que la matrice de $f \circ f$ dans la base canonique est A^2 , on a $f \circ f = f$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = 0, \text{ donc } x - f(x) \in \text{Ker}(f);$$

$$(f - \text{Id})(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = 0, \text{ donc } f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}).$$

Somme. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x - f(x)) + f(x)$ avec $x - f(x) \in \text{Ker}(f)$ et $f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Donc $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id})$.

Intersection. Si $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f - \text{Id})$, alors $f(y) = 0$ et $f(y) = y$, donc $y = 0$.

Donc $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$.

Diagonalisabilité. En concaténant une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ (l'une des deux pouvant être vide si l'espace correspondant est réduit à $\{0\}$), on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à cette somme directe. Ses vecteurs vérifient $f(v) = 0 \cdot v$ ou $f(v) = 1 \cdot v$: ce sont des vecteurs propres de f . Dans cette base, la matrice de f est diagonale, de coefficients diagonaux $0, \dots, 0, 1, \dots, 1$.

Conclusion

f est diagonalisable (c'est le projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$), et la matrice A est donc diagonalisable.

2. Dans toute cette question, on pose $M = B(B - I_n) = B^2 - B$, de sorte que $M^N = 0_n$.

Remarque utile : si une matrice X commute avec B , alors $XB^2 = BXB = B^2X$, donc X commute avec $M = B^2 - B$, puis avec toutes les puissances de M (résultat admis par l'énoncé). Par ailleurs, si X et Y commutent, alors $(XY)^m = X^mY^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate utilisant la commutation de X^m et Y).

(a) On développe $(2B - I_n)^2$ puis on utilise la question 1(a).

Comme $2B$ et I_n commutent : $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n$. Donc :

$$I_n - (2B - I_n)^2 = 4B - 4B^2 = -4B(B - I_n) = -4M.$$

Ainsi $(I_n - (2B - I_n)^2)^N = (-4)^N M^N = 0_n$: la matrice $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente.

D'après la question 1(a) appliquée à $U = I_n - (2B - I_n)^2$ et $q = N$, la matrice $I_n - U = (2B - I_n)^2$ est inversible ; notons W son inverse. Alors :

$$(2B - I_n) [(2B - I_n)W] = I_n \quad \text{et} \quad [W(2B - I_n)] (2B - I_n) = I_n.$$

La matrice $2B - I_n$ admet un inverse à droite et un inverse à gauche, qui sont donc égaux : $2B - I_n$ est inversible.

Propriété $(\mathcal{H}_0)$. On a $B_0 = B$, donc $2B_0 - I_n$ est inversible. Avec $C_0 = 0_n$ et $D_0 = I_n$:

$$B_0 - B = 0_n = M C_0 \quad \text{et} \quad B_0(B_0 - I_n) = M = M^{2^0} D_0.$$

Enfin $B_0 B = B^2 = B B_0$, $C_0 B = 0_n = B C_0$ et $D_0 B = B = B D_0$.

Conclusion

$(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

(b) Question adaptée au programme actuel : dans la troisième égalité, la notation I du sujet original a été remplacée par I_n (harmonisation des notations, sans changement de sens).

Supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie. La matrice $2B_k - I_n$ est inversible, ce qui donne un sens à B_{k+1} ; on pose $J = (2B_k - I_n)^{-1}$.

Commutations préliminaires. B_k commute avec $2B_k - I_n$, donc avec J (résultat admis). Comme B_k commute avec B , la matrice $2B_k - I_n$ commute avec B , donc J commute avec B (résultat admis), et par la remarque initiale, J commute avec M et ses puissances.

Première égalité. En écrivant $I_n = (2B_k - I_n)J$:

$$2B_{k+1} - I_n = 2B_k^2 J - (2B_k - I_n)J = (2B_k^2 - 2B_k + I_n)J = [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] J.$$

Deuxième égalité. En écrivant $B = B(2B_k - I_n)J$:

$$B_{k+1} - B = B_k^2 J - B(2B_k - I_n)J = (B_k^2 - 2BB_k + B)J.$$

Or, comme $B_k B = BB_k$:

$$(B_k - B)^2 - (B^2 - B) = B_k^2 - B_k B - BB_k + B^2 - B^2 + B = B_k^2 - 2BB_k + B.$$

Donc $B_{k+1} - B = [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)] J$.

Troisième égalité. On a $B_{k+1} - I_n = (B_k^2 - 2B_k + I_n)J = (B_k - I_n)^2 J$, donc :

$$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2 J (B_k - I_n)^2 J.$$

La matrice J commute avec $B_k - I_n$ (car elle commute avec B_k et I_n), donc avec $(B_k - I_n)^2$. Ainsi $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2 (B_k - I_n)^2 J^2$. Par ailleurs, J commute avec $B_k(B_k - I_n)$, et B_k commute avec $B_k - I_n$, donc :

$$[B_k(B_k - I_n)J]^2 = B_k(B_k - I_n)B_k(B_k - I_n)J^2 = B_k^2(B_k - I_n)^2 J^2.$$

D'où $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}]^2$.

Démonstration de $(\mathcal{H}_{k+1})$.

Inversibilité de $2B_{k+1} - I_n$. Posons $U = -2B_k(B_k - I_n) = -2M^{2^k} D_k$. Comme D_k commute avec B , il commute avec M^{2^k} , donc :

$$U^N = (-2)^N M^{2^k N} D_k^N = (-2)^N M^N M^{(2^k-1)N} D_k^N = 0_n,$$

car $M^N = 0_n$. D'après la question 1(a), $I_n - U = I_n + 2B_k(B_k - I_n)$ est inversible. Par la première égalité, $2B_{k+1} - I_n$ est le produit des matrices inversibles $I_n - U$ et J , donc elle est inversible.

Existence de C_{k+1} . On a $B_k - B = MC_k$ avec C_k commutant avec B , donc avec M . Ainsi $(B_k - B)^2 = MC_k MC_k = M^2 C_k^2$ et, avec $B^2 - B = M$:

$$B_{k+1} - B = (M^2 C_k^2 - M)J = M(MC_k^2 - I_n)J.$$

On pose $C_{k+1} = (MC_k^2 - I_n)J$.

Existence de D_{k+1} . On a $B_k(B_k - I_n)J = M^{2^k} D_k J$, et $D_k J$ commute avec M^{2^k} (car D_k et J commutent avec B). Donc :

$$\begin{aligned} B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) &= (M^{2^k} D_k J)^2 = M^{2^{k+1}} (D_k J)^2 = [B(B - I_n)]^{2^{k+1}} D_{k+1}, \quad D_{k+1} \\ &= (D_k J)^2. \end{aligned}$$

Commutations. $B_{k+1} = B_k^2 J$, $C_{k+1} = (MC_k^2 - I_n)J$ et $D_{k+1} = (D_k J)^2$ sont des sommes de produits de matrices commutant avec B (à savoir B_k, J, M, C_k, D_k, I_n) ; elles commutent donc avec B .

Conclusion

$(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie. Par récurrence, $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$; en particulier la suite (B_k) est bien définie.

(c) Existence de p . Choisissons un entier p tel que $2^p \geq N$, par exemple $p = N$ (car $2^N \geq N + 1$ par récurrence). D'après $(\mathcal{H}_p)$:

$$B_p(B_p - I_n) = M^{2p} D_p = M^N M^{2p-N} D_p = 0_n.$$

Diagonalisabilité de B_p . La question 1(b) appliquée à $A = B_p$ montre que l'endomorphisme canoniquement associé à B_p est diagonalisable ; donc B_p est semblable à une matrice diagonale : B_p est diagonalisable.

Nilpotence de $B - B_p$. D'après $(\mathcal{H}_p)$, $B - B_p = -MC_p$, et C_p commute avec M , donc :

$$(B - B_p)^N = (-1)^N M^N C_p^N = 0_n.$$

La matrice $B - B_p$ est nilpotente.

Stationnarité. Soit $k \geq p$. Alors $2^k \geq 2^p \geq N$, donc comme ci-dessus

$$B_k(B_k - I_n) = M^{2^k} D_k = 0_n, \text{ c'est-à-dire } B_k^2 = B_k.$$

Méthode 1 — Par une factorisation de $B_{k+1} - B_k$.

Avec $J = (2B_k - I_n)^{-1}$:

$$B_{k+1} - B_k = B_k^2 J - B_k(2B_k - I_n)J = (B_k - B_k^2)J = -B_k(B_k - I_n)J = 0_n.$$

Méthode 2 — Par le calcul de l'inverse de $2B_k - I_n$.

Comme $B_k^2 = B_k$: $(2B_k - I_n)^2 = 4B_k^2 - 4B_k + I_n = I_n$, donc $(2B_k - I_n)^{-1} = 2B_k - I_n$.
Alors :

$$B_{k+1} = B_k^2(2B_k - I_n) = B_k(2B_k - I_n) = 2B_k^2 - B_k = B_k.$$

Comparaison : la méthode 1 repose sur l'identité générale

$B_{k+1} - B_k = -B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}$, qui montre que les points fixes de la récurrence sont exactement les matrices vérifiant $B_k(B_k - I_n) = 0_n$; la méthode 2 met en évidence que $2B_k - I_n$ est alors une symétrie (elle est son propre inverse).

Conclusion

il existe p (par exemple $p = N$) tel que $B_p(B_p - I_n) = 0_n$, la matrice B_p est diagonalisable, $B - B_p$ est nilpotente et $\forall k \geq p$, $B_{k+1} = B_k$. On a ainsi décomposé $B = B_p + (B - B_p)$ en somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent.

PROBLÈME

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Dans cette partie, on identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.

1. On vérifie la linéarité, puis la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, par linéarité du produit par $X - 1$ et de la dérivation :

$$g(\lambda P + \mu Q) = [(X - 1)(\lambda P + \mu Q)]' = \lambda[(X - 1)P]' + \mu[(X - 1)Q]' = \lambda g(P) + \mu g(Q).$$

Stabilité. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg((X - 1)P) \leq n + 1$, et sa dérivée est de degré au plus n . Donc $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion

g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calcul de $f(g(P))$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme $(X - 1)P$ est une primitive de $g(P)$.
Pour $x \neq 1$, d'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_1^x g(P)(t) dt = [(t - 1)P(t)]_1^x = (x - 1)P(x), \quad \text{donc} \quad f(g(P))(x) = P(x).$$

En $x = 1$: $f(g(P))(1) = g(P)(1) = (1 - 1)P'(1) + P(1) = P(1)$.

Donc $f(g(P)) = P$.

Noyau de g . On a $0 \in \text{Ker}(g)$. Réciproquement, si $g(P) = 0$, alors $P = f(g(P)) = f(0)$. Or
 $f(0)(x) = \frac{1}{x - 1} \int_1^x 0 dt = 0$ pour $x \neq 1$ et $f(0)(1) = 0$; donc $P = 0$.

Conclusion

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(g(P)) = P, \text{ et } \text{Ker}(g) = \{0\}$.

3. g est un endomorphisme injectif de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension finie $n + 1$. Par le théorème du rang, $\text{rg}(g) = (n + 1) - \dim \text{Ker}(g) = n + 1$, donc g est surjectif : g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = g^{-1}(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question 2 :

$$f(P) = f(g(Q)) = Q = g^{-1}(P).$$

Ainsi $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et f coïncide avec g^{-1} , qui est linéaire comme réciproque d'une application linéaire bijective.

Conclusion

g est un isomorphisme, $g^{-1} = f$, et f est un endomorphisme (et même un automorphisme) de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Matrice B de g . On a $g(e_0) = [(X-1)]' = 1 = e_0$, et pour $k \in \{1, \dots, n\}$,
 $(X-1)X^k = X^{k+1} - X^k$, donc :

$$g(e_k) = (k+1)X^k - kX^{k-1} = (k+1)e_k - k e_{k-1}.$$

En numérotant lignes et colonnes de 0 à n , la colonne k de B contient $k+1$ en position (k, k) et $-k$ en position $(k-1, k)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

Matrice A de f . Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Pour $x \neq 1$:

$$\int_1^x t^k dt = \frac{x^{k+1} - 1}{k+1} = \frac{(x-1)(1+x+\dots+x^k)}{k+1}, \quad \text{donc} \quad f(e_k)(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x^j.$$

En $x = 1$: $f(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \frac{k+1}{k+1}$, ce qui coïncide avec la même expression.
 Donc :

$$f(e_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k e_j.$$

La colonne k de A contient $\frac{1}{k+1}$ sur les lignes 0 à k et des zéros en dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Contrôle : comme $f = g^{-1}$, on doit avoir $AB = I_{n+1}$, ce qui a été vérifié numériquement pour $n = 5$ (contrôle exécuté, qui ne remplace pas le calcul ci-dessus).

5. Méthode 1 — Par les matrices triangulaires.

La matrice B est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $1, 2, \dots, n+1$. Ce sont $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$, donc g est diagonalisable.

De même, A est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}$, deux à deux distincts : f admet $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$, donc f est diagonalisable.

Méthode 2 — En déduisant la diagonalisabilité de f de celle de g .

Une fois g diagonalisable (méthode 1), soit $(P_0, \dots, P_n)$ une base de vecteurs propres de $g : g(P_r) = \lambda_r P_r$. Comme g est bijective, $\lambda_r \neq 0$ (sinon $P_r \in \text{Ker}(g) = \{0\}$). En appliquant

$f = g^{-1} : P_r = \lambda_r f(P_r)$, donc $f(P_r) = \frac{1}{\lambda_r} P_r$. La même base diagonalise f .

Comparaison : la méthode 1 traite chaque endomorphisme indépendamment via le critère des $n + 1$ valeurs propres distinctes ; la méthode 2 met en évidence le fait général qu'un automorphisme et son inverse ont les mêmes vecteurs propres, avec des valeurs propres inverses.

Conclusion

f et g sont diagonalisables.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On rappelle que $Z_0 = n$ est certaine, donc $P(Z_0 = n) = 1$ et $P(Z_0 = r) = 0$ pour $r \neq n$. Chaque Z_k prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

- On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z_k = i)_{0 \leq i \leq n}$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, n\}$. Par la description de l'expérience, si $P(Z_k = i) > 0$, sachant $(Z_k = i)$, le $(k + 1)$ -ième tirage s'effectue dans l'urne U_i (pour $k = 0$, c'est l'urne U_n , en accord avec la convention $Z_0 = n$), qui contient $i + 1$ boules numérotées $0, \dots, i$ tirées de façon équiprobable. Donc :

$$P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = \frac{1}{i+1} \text{ si } r \leq i, \quad P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r) = 0 \text{ si } r > i.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=0}^n P((Z_k = i) \cap (Z_{k+1} = r)).$$

Pour chaque i :

si $P(Z_k = i) > 0$, alors

$$P((Z_k = i) \cap (Z_{k+1} = r)) = P(Z_k = i) P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = r);$$

si $P(Z_k = i) = 0$, alors $0 \leq P((Z_k = i) \cap (Z_{k+1} = r)) \leq P(Z_k = i) = 0$, et l'égalité $P((Z_k = i) \cap (Z_{k+1} = r)) = P(Z_k = i) \times c_{i,r}$ reste vraie quel que soit le réel $c_{i,r}$.

En retenant uniquement les indices $i \geq r$:

$$P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

Conclusion

la formule demandée est établie pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, n\}$.

2. On particularise la question 1, puis on fait la différence de deux relations consécutives.

($\mathcal{R}_1$) : pour $r = n$, la somme ne contient que le terme $i = n$:

$$P(Z_{k+1} = n) = \frac{P(Z_k = n)}{n+1}, \text{ donc } (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n).$$

($\mathcal{R}_2$) : pour $r \in \{0, \dots, n-1\}$, en soustrayant les formules relatives à r et à $r+1$:

$$P(Z_{k+1} = r) - P(Z_{k+1} = r+1) = \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1} - \sum_{i=r+1}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = r)}{r+1}.$$

En multipliant par $r+1$, on obtient ($\mathcal{R}_2$).

Conclusion

$(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$ sont établies.

3. Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse $n \geq 2$ a été ajoutée pour la seconde partie de la question. En effet, pour $n = 1$, on aurait $S_{n-1} = S_0$, qui n'est pas défini (la convergence n'est admise que pour $r \geq 1$, et la série

$$\sum P(Z_k = 0)$$

diverge d'après III.7(b)).

On somme les relations de $k = 0$ à $k = K$ puis on fait tendre K vers $+\infty$, en utilisant la convergence admise. Pour $r \in \{0, \dots, n\}$ et $K \in \mathbb{N}$, on note

$$T_K(r) = \sum_{k=0}^K P(Z_k = r).$$

Pour $r \geq 1$, $T_K(r) \rightarrow S_r$ quand $K \rightarrow +\infty$. Remarquons que :

$$\sum_{k=0}^K P(Z_{k+1} = r) = T_{K+1}(r) - P(Z_0 = r).$$

Valeur de S_n . En sommant $(\mathcal{R}_1)$ pour $k = 0, \dots, K$, avec $P(Z_0 = n) = 1$:

$$(n+1)(T_{K+1}(n) - 1) = T_K(n).$$

Comme $n \geq 1$, la série

$$\sum P(Z_k = n)$$

converge; en faisant $K \rightarrow +\infty$: $(n+1)(S_n - 1) = S_n$, soit $nS_n = n+1$.

Donc $S_n = \frac{n+1}{n}$.

On suppose désormais $n \geq 2$ et on fixe $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Alors $r \geq 1$ et $r+1 \leq n$, donc les séries

$$\sum P(Z_k = r)$$

et

$$\sum P(Z_k = r+1)$$

convergent. En sommant $(\mathcal{R}_2)$ pour $k = 0, \dots, K$:

$$(r+1)(T_{K+1}(r) - P(Z_0 = r)) - (r+1)(T_{K+1}(r+1) - P(Z_0 = r+1)) = T_K(r).$$

En faisant $K \rightarrow +\infty$:

$$(r+1)(S_r - P(Z_0 = r)) - (r+1)(S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)) = S_r. \quad (*)$$

Valeur de S_{n-1} . Pour $r = n-1$: $P(Z_0 = n-1) = 0$ et $P(Z_0 = n) = 1$, donc $(*)$ s'écrit $nS_{n-1} - n(S_n - 1) = S_{n-1}$, soit :

$$(n-1)S_{n-1} = nS_n - n = (n+1) - n = 1, \quad \text{donc} \quad S_{n-1} = \frac{1}{n-1}.$$

Constance de $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$. Si $n = 2$, la suite n'a qu'un terme et est constante. Si $n \geq 3$, pour $r \in \{1, \dots, n-2\}$, on a $r \neq n$ et $r+1 \neq n$, donc $P(Z_0 = r) = P(Z_0 = r+1) = 0$, et $(*)$ donne $(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r$, c'est-à-dire :

$$rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Conclusion

$S_n = \frac{n+1}{n}$; pour $n \geq 2$, $S_{n-1} = \frac{1}{n-1}$ et la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante, égale à $(n-1)S_{n-1} = 1$, d'où $S_r = \frac{1}{r}$ pour $1 \leq r \leq n-1$.

4. Méthode 1 — Par identification des coefficients grâce à $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$.

Notons $p_r = P(Z_{k+1} = r)$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F'_{k+1}(x) = \sum_{r=1}^n r p_r x^{r-1},$$

donc :

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^n r p_r x^r - \sum_{r=1}^n r p_r x^{r-1} + \sum_{r=0}^n p_r x^r.$$

(Le terme $r = 0$ ajouté dans la première somme est nul.) En regroupant la première et la troisième somme, et en posant $s = r - 1$ dans la deuxième :

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^n (r+1)p_r x^r - \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)p_{s+1} x^s$$

$$= (n+1)p_n x^n + \sum_{r=0}^{n-1} [(r+1)p_r - (r+1)p_{r+1}] x^r.$$

D'après $(\mathcal{R}_1)$, $(n+1)p_n = P(Z_k = n)$, et d'après $(\mathcal{R}_2)$,

$(r+1)p_r - (r+1)p_{r+1} = P(Z_k = r)$ pour $0 \leq r \leq n-1$. Donc le membre de droite vaut

$$\sum_{r=0}^n P(Z_k = r) x^r = F_k(x).$$

Méthode 2 — À partir de la formule de la question 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 1, en échangeant les deux sommes finies indexées par $0 \leq r \leq i \leq n$:

$$F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^n \sum_{i=r}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1} x^r = \sum_{i=0}^n \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \sum_{r=0}^i x^r.$$

Comme

$$(x-1) \sum_{r=0}^i x^r = x^{i+1} - 1$$

pour tout réel x (télescopage) :

$$(x-1)F_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^n P(Z_k = i) \frac{x^{i+1} - 1}{i+1}.$$

On dérive les deux membres, fonctions polynomiales : à gauche, $[(x-1)F_{k+1}(x)]' = F_{k+1}(x) + (x-1)F_{k+1}'(x)$; à droite, on obtient

$$\sum_{i=0}^n P(Z_k = i) x^i = F_k(x).$$

Comparaison : la méthode 1 réutilise les relations $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$ par identification des coefficients ; la méthode 2 montre que $(x-1)F_{k+1}(x)$ est la primitive de F_k nulle en 1, ce qui explique la relation $F_{k+1} = f(F_k)$ exploitée dans la partie III.

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Z_k est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, donc elle admet des moments de tous ordres. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F'_k(x) = \sum_{r=1}^n rP(Z_k = r)x^{r-1}, \quad F''_k(x) = \sum_{r=2}^n r(r-1)P(Z_k = r)x^{r-2}.$$

En $x = 1$, en ajoutant les termes nuls correspondant à $r = 0$ (et $r = 1$ pour la dérivée seconde) :

$$F'_k(1) = \sum_{r=0}^n rP(Z_k = r) = E(Z_k), \quad F''_k(1) = \sum_{r=0}^n r(r-1)P(Z_k = r) = E(Z_k(Z_k - 1)),$$

la dernière égalité résultant du théorème de transfert.

Conclusion

$$F'_k(1) = E(Z_k) \text{ et } F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1)).$$

- (b) Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En dérivant ($\mathcal{S}$) une fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

$$\text{En } x = 1 : 2F'_{k+1}(1) = F'_k(1).$$

En dérivant une seconde fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3F''_{k+1}(x) + (x-1)F'''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

En $x = 1 : 3F''_{k+1}(1) = F''_k(1)$.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, F'_{k+1}(1) = \frac{1}{2}F'_k(1) \text{ et } F''_{k+1}(1) = \frac{1}{3}F''_k(1).$$

(c) Les suites $(F'_k(1))$ et $(F''_k(1))$ sont géométriques de raisons respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Comme $Z_0 = n$ est certaine : $F'_0(1) = E(Z_0) = n$ et

$F''_0(1) = E(Z_0(Z_0 - 1)) = n(n - 1)$. Donc :

$$F'_k(1) = \frac{n}{2^k}, \quad F''_k(1) = \frac{n(n - 1)}{3^k}.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(Z_k^2) = E(Z_k(Z_k - 1)) + E(Z_k)$, puis par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z_k) = E(Z_k(Z_k - 1)) + E(Z_k) - E(Z_k)^2 = \frac{n(n - 1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.$$

Contrôles : pour $k = 0$, on trouve $n(n - 1) + n - n^2 = 0$, ce qui est cohérent avec Z_0

certaine ; pour $k = 1$, Z_1 suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$ et la formule donne

$$\frac{n(n - 1)}{3} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n + 2)}{12}, \text{ qui est bien la variance de cette loi uniforme.}$$

Conclusion

$$E(Z_k) = \frac{n}{2^k}, \quad E(Z_k(Z_k - 1)) = \frac{n(n - 1)}{3^k} \text{ et } V(Z_k) = \frac{n(n - 1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

1. La première égalité est la définition de F_k vu comme polynôme :

$$F_k = \sum_{r=0}^n P(Z_k = r)X^r = \sum_{r=0}^n P(Z_k = r)e_r,$$

et $F_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Montrons par récurrence que $F_k = f^k(e_n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $Z_0 = n$ est certaine, donc $F_0 = e_n = f^0(e_n)$ (avec $f^0 = \text{Id}$).

Hérédité : si $F_k = f^k(e_n)$, alors de $g(F_{k+1}) = F_k$ (question II.4) et $f = g^{-1}$ (question I.3), on tire $F_{k+1} = f(g(F_{k+1})) = f(F_k) = f^{k+1}(e_n)$.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{r=0}^n P(Z_k = r)e_r = F_k = f^k(e_n).$$

2. Méthode 1 — Par les degrés échelonnés.

La famille $(u_0, \dots, u_n)$ compte $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, avec $\deg u_r = r$. Supposons

$$\sum_{r=0}^n \lambda_r u_r = 0$$

avec des λ_r non tous nuls, et soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Le coefficient de X^m dans

$$\sum_{r=0}^m \lambda_r u_r$$

vaut λ_m (seul u_m contient X^m), donc ce polynôme est non nul : contradiction. La famille est libre, de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: c'est une base.

Méthode 2 — Par la formule de Taylor pour les polynômes.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la formule de Taylor en 1 donne

$$P = \sum_{r=0}^n \frac{P^{(r)}(1)}{r!} (X-1)^r = \sum_{r=0}^n \frac{P^{(r)}(1)}{r!} u_r.$$

La famille $(u_0, \dots, u_n)$ est donc génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$, et son cardinal est $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: c'est une base.

Comparaison : la méthode 1 est un argument général valable pour toute famille de polynômes de degrés échelonnés ; la méthode 2 fournit en plus les coordonnées d'un polynôme dans la base (u_r) .

Conclusion

$(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Méthode 1 — Par la définition de f .

Soit $r \in \{0, \dots, n\}$. Pour $x \neq 1$:

$$\int_1^x (t-1)^r dt = \frac{(x-1)^{r+1}}{r+1}, \quad \text{donc} \quad f(u_r)(x) = \frac{(x-1)^r}{r+1}.$$

En $x = 1$: $f(u_r)(1) = u_r(1)$, qui vaut 1 si $r = 0$ et 0 si $r \geq 1$; c'est bien la valeur en 1 de $\frac{(x-1)^r}{r+1}$ dans les deux cas. Donc $f(u_r) = \frac{1}{r+1} u_r$.

Méthode 2 — Par g .

$g(u_r) = [(X-1)^{r+1}]' = (r+1)(X-1)^r = (r+1)u_r$. En appliquant $f = g^{-1}$:
 $u_r = (r+1)f(u_r)$, donc $f(u_r) = \frac{1}{r+1} u_r$.

Comparaison : la méthode 1 calcule directement une intégrale ; la méthode 2 utilise que dériver $(X - 1)^{r+1}$ est plus simple qu'intégrer, grâce à la relation $f = g^{-1}$.

Diagonalisabilité. Chaque u_r est non nul et vérifie $f(u_r) = \frac{1}{r+1}u_r$: c'est un vecteur propre de f associé à $\frac{1}{r+1}$. Comme $(u_0, \dots, u_n)$ est une base (question 2), c'est une base de vecteurs propres de f , dans laquelle la matrice de f est $\text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$.

Conclusion

$\forall r \in \{0, \dots, n\}, f(u_r) = \frac{u_r}{r+1}$, et f est diagonalisable.

4. On applique la formule du binôme dans $\mathbb{R}[X]$ (les polynômes commutent).

$$e_n = X^n = ((X - 1) + 1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (X - 1)^r 1^{n-r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r.$$

Pour $r \in \{0, \dots, n\}$:

$$u_r = (X + (-1))^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} X^j (-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$$

Conclusion

les deux égalités sont établies.

5. Par récurrence sur k , $f^k(u_r) = \frac{u_r}{(r+1)^k}$: c'est vrai pour $k = 0$, et si c'est vrai au rang

$$k, \text{ par linéarité de } f \text{ et la question 3, } f^{k+1}(u_r) = \frac{1}{(r+1)^k} f(u_r) = \frac{u_r}{(r+1)^{k+1}}.$$

L'application f^k est linéaire (composée d'applications linéaires). D'après la question 4 :

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} f^k(u_r) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r.$$

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r.$$

6. On exprime $f^k(e_n)$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ et on identifie avec la question 1.

D'après les questions 5 et 4, en échangeant les deux sommes finies indexées par $0 \leq j \leq r \leq n$:

$$F_k = f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Par ailleurs

$$F_k = \sum_{j=0}^n P(Z_k = j) e_j$$

(question 1). Par unicité des coordonnées dans la base $(e_0, \dots, e_n)$:

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

Contrôles : pour $k = 0$, la formule donne

$$P(Z_0 = j) = \binom{n}{j} \sum_{s=0}^{n-j} (-1)^s \binom{n-j}{s}$$

(calcul détaillé à la question 7(a)), qui vaut 1 si $j = n$ et 0 sinon, conformément à $Z_0 = n$. Une vérification numérique (code exécuté) confirme que cette formule coïncide avec la loi obtenue par la récurrence de la question II.1 pour $n \in \{1, 2, 3, 6\}$ et $k \leq 11$.

Conclusion

la loi de Z_k est donnée par la formule demandée.

7. (a) Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original nommait la constante $M_{j,n}$ puis $M_{n,j}$; la notation a été harmonisée en $M_{n,j}$.

Majoration. Par l'inégalité triangulaire, puis comme $(r+1)^k \geq (j+1)^k > 0$ pour $r \geq j$:

$$|P(Z_k = j)| \leq \sum_{r=j}^n \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k} \leq \frac{1}{(j+1)^k} \sum_{r=j}^n \binom{n}{r} \binom{r}{j}.$$

On pose

$$M_{n,j} = \sum_{r=j}^n \binom{n}{r} \binom{r}{j}.$$

Cette somme se calcule : pour $j \leq r \leq n$,

$$\binom{n}{r} \binom{r}{j} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{r!}{j!(r-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(r-j)!(n-r)!} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j},$$

donc, avec $s = r - j$ et la formule du binôme,

$$M_{n,j} = \binom{n}{j} \sum_{s=0}^{n-j} \binom{n-j}{s} = \binom{n}{j} 2^{n-j}.$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, |P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$ avec $M_{n,j} = \binom{n}{j} 2^{n-j}$.

Convergence pour $j \geq 1$. On a $0 \leq P(Z_k = j) \leq M_{n,j} \left(\frac{1}{j+1}\right)^k$. Comme

$0 < \frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{2} < 1$, la série géométrique

$$\sum \left(\frac{1}{j+1}\right)^k$$

converge. Par comparaison des séries à termes positifs, la série

$$\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$$

converge.

Conclusion

$M_{n,j} = \binom{n}{j} 2^{n-j}$ convient, et la série

$$\sum_{k \geq 0} P(Z_k = j)$$

converge pour $j \in \{1, \dots, n\}$, ce qui justifie le résultat admis à la question II.3.

(b) Pour $j = 0$, $\binom{r}{0} = 1$, donc

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k},$$

dont le terme $r = 0$ vaut 1. Ainsi, comme $(r+1)^k \geq 2^k$ pour $r \geq 1$:

$$|P(Z_k = 0) - 1| = \left| \sum_{r=1}^n (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \leq \sum_{r=1}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \leq \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} = \frac{2^n - 1}{2^k}.$$

On peut donc prendre $C_n = 2^n - 1$.

Nature de la série. Comme $\frac{C_n}{2^k} \rightarrow 0$, on obtient par encadrement $P(Z_k = 0) \rightarrow 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série

$$\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$$

diverge grossièrement.

Interprétation : l'urne U_0 ne contient que la boule 0 ; une fois la boule 0 tirée, tous les tirages suivants donnent 0, et ce numéro finit presque sûrement par être atteint.

Conclusion

$C_n = 2^n - 1$ convient, et la série

$$\sum_{k \geq 0} P(Z_k = 0)$$

est divergente.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 6(b) : code adapté en Python. La fonction Turbo-Pascal ECRICOME devient la fonction Python *ecricome*, et la fonction ou procédure SUITE devient la fonction Python *suite*, qui reçoit le réel ε en argument au lieu de le lire au clavier ; le comportement mathématique (calcul du premier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoi de u_N) est conservé. Justification : seul le langage Python est au programme.

Exercice 2, question 2(b) : dans la troisième égalité, la notation I du sujet original est remplacée par I_n . Justification : harmonisation avec les notations définies par l'énoncé, sans changement de sens.

Problème, question II.3 : ajout de l'hypothèse $n \geq 2$ pour le calcul de S_{n-1} et la constance de $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$. Justification : pour $n = 1$, $S_{n-1} = S_0$ n'est pas défini, la série

$$\sum P(Z_k = 0)$$

étant divergente (question III.7(b)) et la convergence n'étant admise que pour $r \geq 1$.

Problème, question III.7(a) : la constante notée $M_{j,n}$ puis $M_{n,j}$ dans l'original est notée uniformément $M_{n,j}$. Justification : correction d'une incohérence de notation.