



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2011

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1

1. (a) Il s'agit de montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Méthode : on montre que $\deg P_k = k$ pour tout k , puis qu'une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre, et on conclut par un argument de dimension.

Degré de P_k . On a $\deg P_0 = 0$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, le polynôme $X(X - k)^{k-1}$ est le produit de X (degré 1) et de $(X - k)^{k-1}$ (degré $k - 1$, de coefficient dominant 1). Il est donc de degré k et de coefficient dominant 1. Ainsi P_k est de degré k , de coefficient dominant $\frac{1}{k!} \neq 0$. En particulier $P_k \in E$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Liberté. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0.$$

Supposons par l'absurde que les λ_k ne soient pas tous nuls et notons m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k P_k = \lambda_m P_m + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k$$

est la somme d'un polynôme de degré m et d'un polynôme de degré au plus $m - 1$: c'est un polynôme de degré exactement m , donc non nul. C'est absurde. Donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ et la famille est libre.

Conclusion. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de $n + 1$ vecteurs de E , espace de dimension $n + 1$. C'est donc une base de E .

- (b) Il s'agit de calculer P'_k puis d'itérer la relation obtenue. Méthode : calcul direct de la dérivée, puis récurrence sur j .

Cas $k = 1$. On a $P_1(X) = \frac{X(X-1)^0}{1!} = X$, donc $P'_1 = 1$ et $P'_1(X+1) = 1 = P_0(X)$.

Cas $k \geq 2$. Par dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} P'_k(X) &= \frac{1}{k!} [(X-k)^{k-1} + (k-1)X(X-k)^{k-2}] = \frac{(X-k)^{k-2}}{k!} [(X-k) + (k-1)X] \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}}{k!} k(X-1). \end{aligned}$$

Donc $P'_k(X) = \frac{(X-1)(X-k)^{k-2}}{(k-1)!}$, puis, en remplaçant X par $X+1$:

$$P'_k(X+1) = \frac{X(X+1-k)^{k-2}}{(k-1)!} = \frac{X(X-(k-1))^{(k-1)-1}}{(k-1)!} = P_{k-1}(X).$$

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$, ce que l'on peut aussi écrire, en remplaçant X par $X-1$: $P'_k(X) = P_{k-1}(X-1)$.

Relation pour les dérivées successives. Montrons par récurrence sur j que, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$, l'entier $k \in \{1, \dots, n\}$ étant fixé.

Initialisation : pour $j = 1$, c'est la relation $P'_k(X) = P_{k-1}(X-1)$ démontrée ci-dessus.

Hérédité : soit $j \in \{1, \dots, k-1\}$ tel que $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$. En dérivant (la dérivée de $Q(X-j)$ est $Q'(X-j)$) :

$$P_k^{(j+1)}(X) = P'_{k-j}(X-j).$$

Comme $k-j \geq 1$, la relation précédente appliquée à P_{k-j} donne

$$P'_{k-j}(Y) = P_{k-j-1}(Y-1); \text{ avec } Y = X-j, \text{ on obtient } P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-(j+1)}(X-(j+1)).$$

Conclusion

pour tous entiers $1 \leq j \leq k \leq n$,

$$P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j).$$

Cette relation reste vraie pour $j = 0$ de manière évidente.

(c) Il s'agit d'identifier les coordonnées de P dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. Méthode : on dérive j fois la décomposition et on évalue en j grâce à la question précédente.

Rectification : dans la dernière relation de l'énoncé original, l'indice de sommation était noté l ; il s'agit de k . L'énoncé est donné sous la forme rectifiée

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

Existence. D'après 1.(a), $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E : tout $P \in E$ s'écrit donc, de manière unique,

$$P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$$

avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Calcul de $P^{(j)}(j)$. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Par linéarité de la dérivation :

$$P^{(j)} = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(j)}.$$

Si $k < j$: $\deg P_k = k < j$, donc $P_k^{(j)} = 0$.

Si $k \geq j$: d'après 1.(b) (relation valable aussi pour $j = 0$), $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j)$, donc $P_k^{(j)}(j) = P_{k-j}(0)$. Or $P_0(0) = 1$ et, pour $m \geq 1$, P_m est multiple de X , donc $P_m(0) = 0$.

Ainsi $P_k^{(j)}(j) = 1$ si $k = j$ et 0 si $k > j$.

Par conséquent :

$$P^{(j)}(j) = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(j)}(j) = a_j.$$

Conclusion

pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $P^{(j)}(j) = a_j$, et donc, pour tout $P \in E$:

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

Remarque utile pour la suite : en appliquant ce résultat à $P = P_i$, dont les coordonnées sont nulles sauf la i -ième qui vaut 1, on obtient $P_i^{(k)}(k) = 1$ si $k = i$ et 0 sinon.

2. (a) Il s'agit de vérifier que u est linéaire et que $u(E) \subset E$.

Linéarité. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$, puis, en composant avec $X + 1$:

$$u(\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P'(X + 1) + \mu Q'(X + 1) = \lambda u(P)(X) + \mu u(Q)(X).$$

Stabilité. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1$ (ou $P' = 0$), et la substitution $X \mapsto X + 1$ ne change pas le degré. Donc $u(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset E$.

Conclusion

u est un endomorphisme de E .

(b) Il s'agit de calculer les images des vecteurs de base.

On a $u(P_0) = P'_0(X + 1) = 0$ et, d'après 1.(b), $u(P_k) = P'_k(X + 1) = P_{k-1}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

En indexant lignes et colonnes de 0 à n , la colonne d'indice 0 est nulle et la colonne d'indice $k \geq 1$ ne contient qu'un 1, sur la ligne d'indice $k - 1$. Ainsi $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale, qui valent 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $A_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $A_{i,j} = 0$ sinon.

(c) Il s'agit de déterminer $\text{rg}(A)$ et le spectre réel de A .

Rang. Les colonnes de A sont la colonne nulle puis les n vecteurs $E_0, E_1, \dots, E_{n-1}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Le rang de A est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes, c'est-à-dire $\dim \text{Vect}(E_0, \dots, E_{n-1}) = n$, car cette famille est libre (sous-famille d'une base).

Conclusion

$$\text{rg}(A) = n.$$

Valeurs propres.

Méthode 1 — matrice triangulaire. La matrice A est triangulaire supérieure. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux; ici ils sont tous nuls. Donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Méthode 2 — polynôme annulateur. Par récurrence immédiate, $u^j(P)(X) = P^{(j)}(X + j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (si c'est vrai au rang j , alors $u^{j+1}(P)(X) = (u^j(P))'(X + 1) = P^{(j+1)}(X + 1 + j)$). Comme $\deg P \leq n$, $P^{(n+1)} = 0$, donc $u^{n+1} = 0$ et $A^{n+1} = 0$: le polynôme X^{n+1} est annulateur de A . Toute valeur propre de A est racine de ce polynôme, donc égale à 0. Réciproquement, 0 est valeur propre car $\text{rg}(A) = n < n + 1$: le noyau de A n'est pas réduit au vecteur nul (théorème du rang), ce que confirme aussi $u(P_0) = 0$ avec $P_0 \neq 0$.

La première méthode est immédiate dès qu'on reconnaît une matrice triangulaire; la seconde est utile lorsqu'une puissance de la matrice s'annule ou lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur, sans structure triangulaire visible.

Conclusion

$$\text{Sp}(A) = \{0\}.$$

(d) Il s'agit de décider si A est diagonalisable. Réponse : non.

Méthode 1 — dimension des espaces propres. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(A) = (n + 1) - \text{rg}(A) = 1$. Comme 0 est l'unique valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1 < n + 1$ (car $n \geq 1$). Une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si cette somme vaut $n + 1$; donc A n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — raisonnement par l'absurde. Si A était diagonalisable, il existerait Q inversible et D diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$, les coefficients diagonaux de D étant des valeurs propres de A , donc nuls. On aurait $D = 0$, puis $A = 0$. Or $A \neq 0$ puisque $n \geq 1$ (le coefficient $A_{0,1}$ vaut 1). Contradiction.

La première méthode donne une information quantitative (il « manque » n dimensions) ; la seconde est l'argument rapide classique pour une matrice non nulle ayant une seule valeur propre.

Conclusion

A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Il s'agit de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie sur E .

Bien définie : pour $P, Q \in E$, $\langle P, Q \rangle$ est une somme finie de réels.

Symétrie : les produits $P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$ sont symétriques en P et Q , donc $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.

Linéarité à gauche : pour k fixé, l'application $P \mapsto P^{(k)}(k)$ est linéaire (linéarité de la dérivation et de l'évaluation). Pour $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda P_1^{(k)}(k) + \mu P_2^{(k)}(k)) Q^{(k)}(k) = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle.$$

Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

Positivité :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, une somme de carrés de réels est nulle, donc chaque

terme est nul : $P^{(k)}(k) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. D'après 1.(c),

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k = 0.$$

Conclusion

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

(b) Il s'agit de calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

D'après la remarque finale de 1.(c), $P_i^{(k)}(k)$ vaut 1 si $k = i$ et 0 sinon. Donc :

$$\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k)$$

ne contient qu'un terme éventuellement non nul, celui d'indice $k = i$, qui vaut $1 \times P_j^{(i)}(i)$, c'est-à-dire 1 si $j = i$ et 0 sinon.

Conclusion

$\langle P_i, P_j \rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormale ; c'est une base de E d'après 1.(a), donc une base orthonormale de E (on peut aussi rappeler qu'une famille orthonormale est libre et compte ici $n + 1 = \dim E$ vecteurs).

Exercice 2

1. Il s'agit d'étudier ψ par le signe de sa dérivée.

La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $t > 0$:

$$\psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{t^2} > 0.$$

Donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limites (pour compléter le tableau de variations) : pour $t > 0$, $\psi(t) = \frac{t^2 - 1 - t \ln(t)}{t}$;
comme $t \ln(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ (croissances comparées), le numérateur tend vers -1
et $\psi(t) \rightarrow -\infty$. En $+\infty$, $\psi(t) = t \left(1 - \frac{\ln(t)}{t} \right) - \frac{1}{t} \rightarrow +\infty$.

Valeur en 1 : $\psi(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$.

Conclusion

ψ est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\psi(1) = 0$, donc $\psi(t) < 0$ pour $t \in]0, 1[$, $\psi(1) = 0$ et $\psi(t) > 0$ pour $t > 1$.

2. Il s'agit de décomposer le terme général à l'aide de la série exponentielle.

Pour $n \geq 1$:
$$\frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!}$$

converge et a pour somme e (série exponentielle en 1). La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$$

converge et a pour somme $e - 1$ (série exponentielle privée de son terme d'indice 0). Par linéarité des séries convergentes,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$$

converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = e - (e-1) = 1.$$

Conclusion

la série converge et sa somme vaut 1.

3. Il s'agit de développer $\psi(t^{n-1})$ et de reconnaître des séries exponentielles.

Soit $t > 0$. Pour $n \geq 1$, $t^{n-1} > 0$ et :

$$\psi(t^{n-1}) = t^{n-1} - t^{-(n-1)} - (n-1) \ln(t).$$

Première série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!}$$

converge et a pour somme $\frac{e^t - 1}{t}$.

Deuxième série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t^{-(n-1)}}{n!} = t \sum_{n \geq 1} \frac{(1/t)^n}{n!}$$

converge et a pour somme $t(e^{1/t} - 1)$.

Troisième série : d'après la question 2,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(n-1) \ln(t)}{n!}$$

converge et a pour somme $\ln(t)$.

Par linéarité, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$$

converge (ce qui justifie au passage la convergence admise par l'énoncé) et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{e^t - 1}{t} - t(e^{1/t} - 1) - \ln(t).$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln(t).$$

4. Il s'agit d'étudier le signe de $\varphi(t) - \ln(t)$ à l'aide de la question 3 et du signe de ψ .

Soit $t \in]0, 1[$. Pour $n = 1$, $\psi(t^0) = \psi(1) = 0$. Pour $n \geq 2$, $t^{n-1} \in]0, 1[$, donc $\psi(t^{n-1}) < 0$ d'après la question 1. Ainsi tous les termes de la série sont négatifs ou nuls et, pour tout $N \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} \leq \frac{\psi(t)}{2}.$$

Par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ (la série converge) :

$$\varphi(t) - \ln(t) \leq \frac{\psi(t)}{2} < 0.$$

Soit $t > 1$. De même, $\psi(t^{n-1}) > 0$ pour $n \geq 2$ et le terme d'indice 1 est nul, donc

$$\varphi(t) - \ln(t) \geq \frac{\psi(t)}{2} > 0.$$

Conclusion

$$\varphi(t) < \ln(t) \text{ pour } t \in]0, 1[\text{ et } \varphi(t) > \ln(t) \text{ pour } t \in]1, +\infty[.$$

5. Il s'agit d'écrire le système d'annulation du gradient et de le transformer par équivalences.

Comme f est de classe C^2 (donc C^1) sur l'ouvert U , elle admet des dérivées partielles.

Pour $(x, y) \in U$, avec $x^y = \exp(y \ln x)$ et $y^x = \exp(x \ln y)$:

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{y}{x} x^y - \ln(y) y^x = y x^{y-1} - y^x \ln(y),$$

$$\partial_2 f(x, y) = \ln(x) x^y - \frac{x}{y} y^x = x^y \ln(x) - x y^{x-1}.$$

Le point (x, y) est critique si et seulement si $\partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(x, y) = 0$. En divisant la première équation par $y > 0$ et la seconde par $x > 0$ (et en utilisant $\frac{y^x}{y} = y^{x-1}$,

$$\frac{x^y}{x} = x^{y-1}) :$$

$$(x, y) \text{ critique} \iff (x^{y-1} = y^{x-1} \ln(y) \quad (1) \quad \text{et} \quad x^{y-1} \ln(x) = y^{x-1} \quad (2)).$$

Sens direct. Supposons (1) et (2). Dans (1), $x^{y-1} > 0$ et $y^{x-1} > 0$, donc $\ln(y) > 0$, c'est-à-dire $y > 1$. Dans (2), de même, $\ln(x) > 0$, donc $x > 1$. En reportant (1) dans (2) : $y^{x-1} \ln(y) \ln(x) = y^{x-1}$, puis, comme $y^{x-1} \neq 0$, $\ln(x) \ln(y) = 1$. Enfin (2) s'écrit $y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x)$.

Sens réciproque. Supposons $x > 1$, $y > 1$, $\ln(x) \ln(y) = 1$ et $y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x)$. Cette dernière égalité est (2). En la multipliant par $\ln(y)$: $y^{x-1} \ln(y) = x^{y-1} \ln(x) \ln(y) = x^{y-1}$, ce qui est (1).

Conclusion

(x, y) est un point critique de f si et seulement si $x > 1, y > 1, \ln(x) \ln(y) = 1$ et $y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x)$.

6. Il s'agit de poser $t = \ln(x)$ et de traduire la dernière condition de la question 5.

Soit (x, y) un point critique. D'après la question 5, $x > 1$, donc $t = \ln(x) > 0$ et $x = \exp(t)$. Comme $\ln(x) \ln(y) = 1$, on a $\ln(y) = \frac{1}{t}$, donc $y = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$.

La relation $y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x)$ relie deux réels strictement positifs; elle équivaut, en appliquant $\ln$, à :

$$(x-1) \ln(y) = (y-1) \ln(x) + \ln(\ln(x)).$$

En remplaçant : $\frac{e^t - 1}{t} = t(e^{1/t} - 1) + \ln(t)$, c'est-à-dire $\varphi(t) = \ln(t)$.

Conclusion

il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x = \exp(t)$, $y = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\varphi(t) = \ln(t)$.

7. Il s'agit de montrer qu'un point critique est nécessairement (e, e) , puis que (e, e) est bien critique.

Unicité. Si (x, y) est critique, la question 6 fournit $t > 0$ tel que $\varphi(t) = \ln(t)$. D'après la question 4, ceci est impossible si $t \in]0, 1[$ et si $t > 1$. Donc $t = 1$, puis $x = e$ et $y = e$.

Existence. Pour $(x, y) = (e, e) : x > 1, y > 1, \ln(e) \ln(e) = 1$ et $e^{e-1} = e^{e-1} \ln(e)$. D'après la question 5, (e, e) est un point critique. (On peut aussi vérifier directement :

$$\partial_1 f(e, e) = e \cdot e^{e-1} - e^e = 0 \text{ et } \partial_2 f(e, e) = e^e - e \cdot e^{e-1} = 0.)$$

Conclusion

(e, e) est l'unique point critique de f sur U .

8. Il s'agit de montrer que (e, e) n'est pas un extremum local, puis de conclure sur tout U .

Rappel utilisé : si une fonction de classe C^1 sur un ouvert admet un extremum local en un point, ce point est critique. Un extremum global sur U est en particulier un extremum local. D'après la question 7, il suffit donc d'étudier (e, e) , où $f(e, e) = e^e - e^e = 0$.

Méthode 1 — comparaison des signes (méthode imposée par l'énoncé). Pour $t > -e$, les points $(e, e + t)$ et $(e + t, e)$ sont dans U et :

$$f(e, e + t) = e^{e+t} - (e + t)^e, \quad f(e + t, e) = (e + t)^e - e^{e+t} = -f(e, e + t).$$

Étudions le signe de $e^u - u^e$ pour $u > 0$. Comme $\exp$ et $\ln$ sont strictement croissantes, $e^u > u^e \iff u > e \ln(u)$. Posons $g(u) = u - e \ln(u)$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $g'(u) = 1 - \frac{e}{u}$ est strictement négatif sur $]0, e[$ et strictement positif sur $]e, +\infty[$, donc g admet en e un minimum strict, $g(e) = e - e = 0$. Ainsi $g(u) > 0$ pour $u \neq e$, c'est-à-dire $e^u > u^e$ pour tout $u > 0, u \neq e$.

Avec $u = e + t$: pour tout $t \in]-e, +\infty[\setminus \{0\}$, $f(e, e + t) > 0$ et $f(e + t, e) < 0$.

Par conséquent, dans toute boule ouverte centrée en (e, e) , il existe des points (de la forme $(e, e + t)$ et $(e + t, e)$ avec $t \neq 0$ petit) où f prend des valeurs strictement supérieures et strictement inférieures à $f(e, e) = 0$. Le point (e, e) n'est donc ni un maximum local, ni un minimum local.

Méthode 2 — hessienne et signes de ses valeurs propres. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert U et (e, e) en est un point critique. Calculons les dérivées partielles secondes à partir de la question 5 :

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = y(y-1)x^{y-2} - y^x(\ln y)^2, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = xy(\ln x)^2 - x(x-1)y^{x-2},$$

$$\partial_{2,1}^2 f(x, y) = xy^{y-1} + yx^{y-1} \ln(x) - xy^{x-1} \ln(y) - y^{x-1}.$$

En (e, e) : $\partial_{1,1}^2 f(e, e) = (e-1)e^{e-1} - e \cdot e^{e-1} = -e^{e-1}$,
 $\partial_{2,2}^2 f(e, e) = e \cdot e^{e-1} - (e-1)e^{e-1} = e^{e-1}$ et $\partial_{2,1}^2 f(e, e) = e^{e-1} + e^e - e^e - e^{e-1} = 0$. Par le théorème de Schwarz, $\partial_{1,2}^2 f(e, e) = 0$ également. La hessienne est donc :

$$\nabla^2 f(e, e) = \begin{pmatrix} -e^{e-1} & 0 \\ 0 & e^{e-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, $-e^{e-1} < 0$ et $e^{e-1} > 0$. Elle possède une valeur propre strictement positive et une strictement négative : (e, e) est un point selle, et f n'admet pas d'extremum local en (e, e) .

La première méthode est élémentaire et n'utilise que des fonctions d'une variable ; elle est imposée par l'énoncé et fonctionne bien ici grâce à l'antisymétrie $f(y, x) = -f(x, y)$. La seconde est la méthode générale du programme pour classer un point critique d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert ; elle est concluante ici parce que les valeurs propres de la hessienne sont non nulles et de signes opposés.

Conclusion

f n'admet pas d'extremum local en (e, e) , ni en aucun autre point de U (qui n'est pas critique). Donc f n'admet aucun extremum, local ou global, sur U .

Problème

Partie I. Étude des variables Y_n et Z_n .

1. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le programme Pascal est remplacé par un programme Python ; le tableau est indexé de 0 à 2010 ; on interdit les fonctions `max` de Python et de numpy pour conserver l'objectif algorithmique de la question.

(a) Il s'agit de calculer un maximum par comparaisons successives, en utilisant $\max(a, b, c) = \max(\max(a, b), c)$.

Python

```
# X est le tableau numpy de 2011 réels, déjà rempli
m2 = X[0]
if X[1] > m2:
    m2 = X[1]
print(m2)          # max(X[0], X[1])

m3 = m2
if X[2] > m3:
    m3 = X[2]
print(m3)          # max(X[0], X[1], X[2])
```

Explication : la variable `m2` reçoit `X[0]`, puis est remplacée par `X[1]` si celui-ci est plus grand ; elle contient donc $\max(X[0], X[1])$. La variable `m3` part de cette valeur et est remplacée par `X[2]` si celui-ci est plus grand ; elle contient donc $\max(X[0], X[1], X[2])$.

(b) Il s'agit de généraliser le procédé à l'aide d'une boucle.

Python

```
# X est le tableau numpy de 2011 réels, déjà rempli
m = X[0]

for i in range(1, 2011):    # i prend les valeurs 1, 2, ..., 2010
    if X[i] > m:
        m = X[i]

print(m)                    # max(X[0], ..., X[2010])
```

Explication : la boucle vérifie l'invariant suivant : à la fin du passage d'indice i , m contient $\max(X[0], \dots, X[i])$. C'est vrai avant la boucle (m vaut $X[0]$) et, si c'est vrai à l'indice $i - 1$, la comparaison avec $X[i]$ le rend vrai à l'indice i . Comme `range(1, 2011)` s'arrête à 2010 (borne supérieure exclue), m contient à la fin le maximum des 2011 coefficients.

Ces deux codes ont été exécutés sur un tableau de 2011 réels tirés au hasard ($X = \text{np.random.random}(2011)$, après `import numpy as np`) : les valeurs affichées coïncident avec celles renvoyées par `np.max` sur les sous-tableaux correspondants.

2. (a) Il s'agit d'exprimer l'événement $[Y_n \leq t]$ à l'aide des X_i et d'utiliser l'indépendance.

Le maximum de $X_1, \dots, X_n$ est inférieur ou égal à t si et seulement si chacun des X_i l'est :

$$[Y_n \leq t] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t].$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, les événements $[X_i \leq t]$ le sont aussi, d'où :

$$F_{Y_n}(t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t).$$

Conclusion

pour tout réel t , $F_{Y_n}(t) = F_{X_1}(t) \times \cdots \times F_{X_n}(t)$.

(b) Les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre 1, donc $F_{X_i}(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_{X_i}(t) = 1 - e^{-t}$ si $t \geq 0$.

Conclusion

$$F_{Y_n}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F_{Y_n}(t) = (1 - e^{-t})^n \text{ si } t \geq 0.$$

(c) Il s'agit de montrer que Y_n est à densité et que f_n en est une densité.

Méthode 1 — régularité de la fonction de répartition. La fonction F_{Y_n} est continue sur $] -\infty, 0[$ (constante) et sur $]0, +\infty[$ (composée de fonctions continues); en 0, la limite à gauche vaut 0 et $F_{Y_n}(0) = (1 - 1)^n = 0$, donc F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec :

$$F'_{Y_n}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F'_{Y_n}(t) = ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} \text{ si } t > 0.$$

Une variable dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points est à densité, et toute fonction positive égale à F'_{Y_n} sauf en un nombre fini de points en est une densité. Or f_n est positive et coïncide avec F'_{Y_n} sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Méthode 2 — calcul de $\int_{-\infty}^t f_n$. La fonction f_n est positive et continue sauf éventuellement en 0. Pour $t < 0$, $\int_{-\infty}^t f_n(u) du = 0 = F_{Y_n}(t)$. Pour $t \geq 0$, comme

$u \mapsto (1 - e^{-u})^n$ a pour dérivée $u \mapsto ne^{-u} (1 - e^{-u})^{n-1}$:

$$\int_{-\infty}^t f_n(u) du = \int_0^t ne^{-u} (1 - e^{-u})^{n-1} du = [(1 - e^{-u})^n]_0^t = (1 - e^{-t})^n = F_{Y_n}(t).$$

Ainsi $F_{Y_n}(t) = \int_{-\infty}^t f_n(u) du$ pour tout réel t , ce qui signifie exactement que f_n est une densité de Y_n (en particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(t) = 1$).

La première méthode est la plus rapide quand on dispose déjà de la fonction de répartition; la seconde vérifie directement la définition d'une densité et est utile quand on veut contrôler un candidat proposé par l'énoncé. Pour $n = 1$, on utilise la convention $(1 - e^{-t})^0 = 1$, et f_1 est la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre 1.

Conclusion

Y_n est une variable à densité et f_n en est une densité.

3. (a) Il s'agit de calculer $P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leq t\right)$.

Comme $n+1 > 0$, pour tout réel t : $\left[\frac{X_{n+1}}{n+1} \leq t\right] = [X_{n+1} \leq (n+1)t]$, donc :

$$F_{\frac{X_{n+1}}{n+1}}(t) = F_{X_{n+1}}((n+1)t).$$

Comme $(n+1)t < 0 \iff t < 0$, on obtient :

$$F_{\frac{X_{n+1}}{n+1}}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F_{\frac{X_{n+1}}{n+1}}(t) = 1 - e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geq 0.$$

Conclusion

d'après la caractérisation rappelée par l'énoncé, $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

(b) Comme en 2.(c), cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ (en $0 : 1 - e^0 = 0$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, de dérivée nulle sur $] -\infty, 0[$ et égale à $(n+1)e^{-(n+1)t}$ sur $]0, +\infty[$.

Conclusion

$\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable à densité, et une densité est donnée par :

$$d_{n+1}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad d_{n+1}(t) = (n+1)e^{-(n+1)t} \text{ si } t \geq 0.$$

4. Il s'agit de reconnaître une dérivée.

Pour tout réel t :

$$e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} = e^t (e^t (1 - e^{-t}))^{n-1} = e^t (e^t - 1)^{n-1}.$$

Ainsi l'intégrande vaut $ne^t (e^t - 1)^{n-1}$, qui est la dérivée de la fonction $t \mapsto (e^t - 1)^n$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (pour $n = 1$, avec la convention $(\cdot)^0 = 1$, l'intégrande vaut e^t). Par le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout réel x (positif ou négatif) :

$$\int_0^x ne^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} dt = \left[(e^t - 1)^n \right]_0^x = (e^x - 1)^n - 0.$$

Conclusion

pour tout réel x ,

$$\int_0^x n \exp(nt) (1 - \exp(-t))^{n-1} dt = (\exp(x) - 1)^n.$$

5. Il s'agit de démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: « Z_n est une variable à densité et f_n en est une densité », en utilisant le produit de convolution.

Résultat du programme utilisé : si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, de densités respectives p et q , l'une des deux étant bornée, alors $U + V$ est une variable à densité, et la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) q(x-t) dt$ (intégrale convergente pour tout x) en est une densité.

Initialisation. $Z_1 = X_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1 : elle est à densité, de densité $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$, qui est exactement f_1 . Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. On a $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$.

Indépendance : Z_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$ et $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ une fonction de X_{n+1} ; par mutuelle indépendance des X_i et lemme des coalitions, Z_n et $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes.

Hypothèses : Z_n admet la densité f_n (hypothèse de récurrence) et $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ la densité d_{n+1} (question 3.(b)), qui est bornée par $n+1$.

Donc Z_{n+1} est à densité, de densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt$. Calculons h .

Pour $t < 0$, $f_n(t) = 0$; pour $t > x$, $x-t < 0$ donc $d_{n+1}(x-t) = 0$. L'intégrande est donc nul en dehors de $[0, x]$.

Si $x < 0$: l'intervalle $[0, x]$ est vide, l'intégrande est nul partout et $h(x) = 0 = f_{n+1}(x)$.

Si $x \geq 0$: pour $t \in [0, x]$,

$$\begin{aligned} f_n(t) d_{n+1}(x-t) &= n e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} (n+1) e^{-(n+1)(x-t)} \\ &= (n+1) e^{-(n+1)x} n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1}, \end{aligned}$$

car $e^{-t} e^{(n+1)t} = e^{nt}$. D'après la question 4 :

$$h(x) = (n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} dt = (n+1) e^{-(n+1)x} (e^x - 1)^n.$$

Comme

$$e^{-(n+1)x} (e^x - 1)^n = e^{-x} (e^{-x} (e^x - 1))^n = e^{-x} (1 - e^{-x})^n,$$

on obtient :

$$h(x) = (n+1) e^{-x} (1 - e^{-x})^n = f_{n+1}(x).$$

Ainsi $h = f_{n+1}$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable à densité de densité f_n . Avec 2.(c), Y_n et Z_n ont une même densité, donc la même fonction de répartition $t \mapsto \int_{-\infty}^t f_n$: elles ont la même loi, ce qui est l'objectif de la partie I.

Partie II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

1. (a) Il s'agit de montrer que $h' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \geq 0$:

$$h'(x) = [(\varphi' - \psi')(x) - (\varphi - \psi)(x)] e^{-x}.$$

Comme $\varphi - \varphi' = f$ et $\psi - \psi' = f$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $(\varphi - \psi) - (\varphi - \psi)' = f - f = 0$, donc $h'(x) = 0$.

Une fonction dérivable sur un intervalle, de dérivée nulle, y est constante (égalité des accroissements finis).

Conclusion

h est constante sur $\mathbb{R}_+$; il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) - \psi(x) = Ce^x$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Il s'agit d'exploiter la convergence de $\int_0^{+\infty} |\varphi - \psi|$.

Comme E est un espace vectoriel, $\varphi - \psi \in E$, donc $\int_0^{+\infty} |C|e^x dx$ converge. Si $C \neq 0$, pour $A > 0$, $\int_0^A |C|e^x dx = |C|(e^A - 1) \rightarrow +\infty$ quand $A \rightarrow +\infty$: l'intégrale diverge. Donc $C = 0$.

Conclusion

$\varphi - \psi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \psi$.

2. Il s'agit d'établir la convergence absolue par comparaison de fonctions positives.

Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$. Pour $t \geq x \geq 0$, $0 \leq |e^{-t}f(t)| \leq |f(t)|$. Comme $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge et que $\int_0^x |f(t)| dt$ est une intégrale sur un segment, l'intégrale $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ converge (relation de Chasles). Par comparaison de fonctions positives, $\int_x^{+\infty} |e^{-t}f(t)| dt$ converge.

Conclusion

l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Il s'agit d'écrire k_f à l'aide d'une primitive.

Notons $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ (convergente d'après la question 2 avec $x = 0$) et

$G(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ pour $x \geq 0$. Par la relation de Chasles :

$$\forall x \geq 0, \quad \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = I - G(x), \quad \text{donc} \quad k_f(x) = e^x (I - G(x)).$$

Comme $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental du calcul intégral assure que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (et même de classe C^1), avec $G'(x) = e^{-x} f(x)$. Par produit, k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$k'_f(x) = e^x (I - G(x)) - e^x e^{-x} f(x) = k_f(x) - f(x).$$

Conclusion

k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $k_f(x) - k'_f(x) = f(x)$ pour tout $x \geq 0$.

4. (a) Relation (α) . Soit $x \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale convergente (multiplication par la constante e^x) :

$$k_f(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt.$$

Pour $t \geq x$: $0 < e^{x-t} \leq 1$ et $f(t) \geq 0$, donc $0 \leq e^{x-t} f(t) \leq f(t)$. Les intégrales

$\int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt$ et $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ convergent (la première par la question 2, la seconde

par l'argument de Chasles de la question 2, puisque $f = |f|$ ici) ; par positivité et croissance de l'intégrale (avec des bornes dans le bon ordre) :

$$0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

Relation (β) . D'après la question 3, $k_f = k'_f + f$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $k'_f = k_f - f$ est continue (car k_f , dérivable, est continue, et f est continue), donc k_f est de classe C^1 et, pour $A \geq 0$:

$$\int_0^A k_f(x) dx = \int_0^A k'_f(x) dx + \int_0^A f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.$$

Conclusion

les relations (α) et (β) sont vérifiées.

(b) Il s'agit de passer à la limite quand $A \rightarrow +\infty$ dans (β) .

Limite de $k_f(A)$: comme $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\int_A^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f - \int_0^A f \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$. Par (α) et le théorème d'encadrement, $k_f(A) \rightarrow 0$.

Limite de $\int_0^A f$: elle vaut $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Donc, d'après (β) , $\int_0^A k_f(x) dx$ admet une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$: l'intégrale

$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ converge (k_f étant continue sur $\mathbb{R}_+$) et :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx.$$

Les deux intégrales du membre de droite convergent, la linéarité donne :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) f(x) dx.$$

Conclusion

l'intégrale converge et vaut $\int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x) dx$.

5. Il s'agit de se ramener au cas positif traité à la question 4.

Méthode 1 — majoration par $k_{|f|}$. La fonction $|f|$ est continue, positive, et $\int_0^{+\infty} ||f||$ converge : $|f| \in E$ et la question 4 s'applique à $|f|$. Pour $x \geq 0$ et $B > x$, l'inégalité triangulaire sur le segment $[x, B]$ donne $\left| \int_x^B e^{x-t} f(t) dt \right| \leq \int_x^B e^{x-t} |f(t)| dt$; les deux intégrales convergent quand $B \rightarrow +\infty$, on obtient par passage à la limite :

$$|k_f(x)| = \left| \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} e^{x-t} |f(t)| dt = k_{|f|}(x).$$

D'après 4.(b), $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(x) dx$ converge. La fonction $|k_f|$ est continue et positive; par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge.

Méthode 2 — décomposition en parties positive et négative. Posons $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$. Ces fonctions sont continues, positives (car $-|f| \leq f \leq |f|$), et majorées par $|f|$; elles appartiennent donc à E , et $f = f^+ - f^-$. Par linéarité de l'intégrale convergente, $k_f = k_{f^+} - k_{f^-}$. D'après la question 4 appliquée à f^+ et à f^- , les fonctions k_{f^+} et k_{f^-} sont positives et d'intégrales convergentes sur $\mathbb{R}_+$. Alors $0 \leq |k_f| \leq k_{f^+} + k_{f^-}$,

et par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge.

La première méthode compare directement k_f à $k_{|f|}$; la seconde illustre une technique générale : écrire une fonction de signe quelconque comme différence de deux fonctions positives afin d'utiliser un résultat établi dans le cas positif.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge. En particulier, $k_f \in E$ pour tout $f \in E$.

6. Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demandait une densité g « dérivable sur $\mathbb{R}^*$ » tout en imposant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui fait intervenir $g'(0)$; l'hypothèse est rectifiée en « dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ », au sens de l'équation $(\mathcal{D}_f)$ de la partie II.

Il s'agit de raisonner par l'absurde en utilisant l'unicité (question 1) et le calcul de l'intégrale (question 4).

Données. Comme f est une densité, $f \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$; comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, positive, d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+ : f \in E$.

Supposons qu'il existe une densité g , nulle sur $\mathbb{R}_-$, dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ (encore notée g) est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Étape 1 : $g \in E$. La restriction de g à $\mathbb{R}_+$ est dérivable, donc continue sur $[0, +\infty[$. De plus $g \geq 0$ et, comme g est nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\int_0^{+\infty} |g(t)| dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$ converge.

Étape 2 : $g = k_f$ sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions g et k_f appartiennent à E (question 5 pour k_f), sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifient $(\mathcal{D}_f)$ (question 3 pour k_f). D'après la question 1, $g = k_f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Étape 3 : contradiction. D'après 4.(b), f étant positive :

$$1 = \int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx.$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = 0$. La fonction $x \mapsto e^{-x} f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Si elle prenait une valeur $c > 0$ en un point $x_0 \geq 0$, par continuité elle serait supérieure à $\frac{c}{2}$ sur un segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ avec $\alpha < \beta$, et l'on aurait

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta e^{-x} f(x) dx \geq \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0. \text{ Donc } e^{-x} f(x) = 0, \text{ puis } f(x) = 0$$

pour tout $x \geq 0$. Alors $\int_0^{+\infty} f = 0 \neq 1$: contradiction.

Conclusion

il n'existe aucune densité g nulle sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (au sens de sa restriction), vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, la seule solution de $(\mathcal{D}_f)$ dans E , à savoir k_f , est d'intégrale $1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx < 1$ et ne peut jamais être une densité.

Partie III. Étude de l'application $f \mapsto k_f$.

1. Il s'agit de vérifier que φ est bien définie de E dans E et linéaire.

Image dans E . Pour $f \in E$, k_f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$ (partie II, question 3)

et $\int_0^{+\infty} |k_f|$ converge (partie II, question 5). Donc $\varphi(f) = k_f \in E$.

Linéarité. Soient $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour $x \geq 0$, les intégrales $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ et

$\int_x^{+\infty} e^{-t} g(t) dt$ convergent, donc, par linéarité des intégrales convergentes :

$$k_{\alpha f + \beta g}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha k_f(x) + \beta k_g(x).$$

Conclusion

φ est un endomorphisme de E .

2. Il s'agit de calculer k_{f_a} et de le comparer à f_a .

Appartenance à E . La fonction f_a est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et pour $A > 0$,

$\int_0^A e^{-ax} dx = \frac{1 - e^{-aA}}{a} \rightarrow \frac{1}{a}$ car $a > 0$. Donc $f_a \in E$. De plus f_a n'est pas identiquement nulle ($f_a(0) = 1$).

Méthode 1 — calcul direct. Pour $x \geq 0$ et $B > x$: $\int_x^B e^{-t} e^{-at} dt = \frac{e^{-(1+a)x} - e^{-(1+a)B}}{1+a},$

qui tend vers $\frac{e^{-(1+a)x}}{1+a}$ quand $B \rightarrow +\infty$ car $1+a > 0$. Donc :

$$k_{f_a}(x) = e^x \frac{e^{-(1+a)x}}{1+a} = \frac{1}{1+a} e^{-ax} = \frac{1}{1+a} f_a(x).$$

Méthode 2 — unicité de la solution de $(\mathcal{D}_{f_a})$. La fonction $y = \frac{1}{1+a} f_a$ appartient à E , est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $y - y' = \frac{1}{1+a} (e^{-ax} + a e^{-ax}) = e^{-ax} = f_a(x)$. Comme k_{f_a} est aussi solution dans E de $(\mathcal{D}_{f_a})$, la question 1 de la partie II donne $k_{f_a} = \frac{1}{1+a} f_a$.

La première méthode est un calcul d'intégrale impropre ; la seconde évite tout calcul d'intégrale en exploitant l'unicité établie à la partie II, ce qui est souvent le plus efficace quand on peut deviner une solution.

Conclusion

$\varphi(f_a) = \frac{1}{1+a} f_a$ avec $f_a \neq 0$: f_a est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\frac{1}{1+a}$.

3. (a) Il s'agit de raisonner par l'absurde.

Si $\lambda = 0$, alors $k_f = \varphi(f) = 0$, donc $k'_f = 0$ et $f = k_f - k'_f = 0$, ce qui contredit le fait que f n'est pas identiquement nulle.

Conclusion

$\lambda \neq 0$.

(b) Comme $\lambda \neq 0$, $f = \frac{1}{\lambda} k_f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (partie II, question 3), et :

$$f' = \frac{1}{\lambda} k'_f = \frac{1}{\lambda} (k_f - f) = \frac{1}{\lambda} (\lambda f - f) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f.$$

Conclusion

f est dérivable et $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.

(c) Il s'agit de résoudre l'équation $f' = cf$ avec $c = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Posons $w(x) = f(x)e^{-cx}$ pour $x \geq 0$. La fonction w est dérivable et $w'(x) = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0$. Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, w est donc constante, égale à $w(0) = f(0)$.

Conclusion

il existe une constante K (à savoir $K = f(0)$) telle que, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = K \exp \left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x \right).$$

(d) Il s'agit d'exploiter l'appartenance de f à E .

Comme f n'est pas identiquement nulle, $K \neq 0$. Posons $c = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Si $c \geq 0$, alors

$|f(x)| = |K|e^{cx} \geq |K| > 0$ pour tout $x \geq 0$, donc $\int_0^A |f| \geq |K|A \rightarrow +\infty$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f|$ diverge, ce qui contredit $f \in E$. Donc $c < 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda} > 1$.

Si $\lambda < 0$, alors $\frac{1}{\lambda} < 0 < 1$: impossible. Donc $\lambda > 0$ et $\frac{1}{\lambda} > 1 \iff \lambda < 1$.

Conclusion

$\lambda \in]0, 1[$.

4. Il s'agit de rassembler les questions 2 et 3.

Inclusion $\text{Sp}(\varphi) \subset]0, 1[$: c'est la question 3.(d).

Inclusion réciproque : soit $\lambda \in]0, 1[$. Posons $a = \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$. D'après la question 2, f_a est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\frac{1}{1+a} = \lambda$. Donc $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$.

Ainsi $\text{Sp}(\varphi) =]0, 1[$.

Espaces propres : soit $\lambda \in]0, 1[$ et $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, de sorte que $1 - \frac{1}{\lambda} = -a$. D'après 3.(c), tout vecteur propre associé à λ est de la forme $x \mapsto Ke^{-ax} = Kf_a(x)$; la fonction nulle est aussi de cette forme ($K = 0$). Donc $E_\lambda(\varphi) \subset \text{Vect}(f_a)$. Réciproquement, $f_a \in E_\lambda(\varphi)$ (question 2) et $E_\lambda(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel, donc $\text{Vect}(f_a) \subset E_\lambda(\varphi)$.

Conclusion

$\text{Sp}(\varphi) =]0, 1[$ et, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(f_a)$ avec $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$; la famille formée de la seule fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right)$, non nulle, en est une base. Chaque espace propre est de dimension 1.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 1.(c) : rectification de l'indice de sommation de la dernière relation (

$$\sum_{l=0}^n$$

remplacé par

$$\sum_{k=0}^n$$

), coquille typographique de l'énoncé original.

Problème, partie I, question 1.(a) et 1.(b) : Code adapté en Python. Les programmes Pascal demandés sont remplacés par des programmes Python; le tableau «array[1..2011] of real» devient un tableau numpy indexé de 0 à 2010, et les quantités à calculer sont réécrites avec ces indices. L'interdiction d'utiliser les fonctions max de Python ou de numpy est ajoutée, afin de conserver l'objectif algorithmique de la question (le langage Pascal ne disposait pas d'une telle fonction).

Problème, présentation générale et partie II, question 6 : l'hypothèse «densité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$ » est rectifiée en «densité g dont la restriction à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ », car la relation $g - g' = f$ est demandée sur $\mathbb{R}_+$, point 0 compris, au sens de l'équation $(\mathcal{D}_f)$; c'est sous cette forme que l'unicité de la question 1 de la partie II s'applique.

Exercice 2, question 8 : énoncé conservé; une seconde méthode conforme au programme (hessienne et signes de ses valeurs propres) est ajoutée dans le corrigé, sans recours à un critère hors programme.