



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

Notation. Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_n(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j.$$

Pour $t \geq 0$, $S_n(t) \geq 1 > 0$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{S_n(t)}$ est continue sur $[0, 1]$ et u_n est une intégrale sur un segment d'une fonction continue : elle est bien définie.

On utilisera l'identité polynomiale, valable pour tout réel t (somme télescopique) :

$$(1-t)S_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j - \sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} = 1 - t^n.$$

1. (a) Il s'agit d'une vérification algébrique, puis d'un encadrement d'intégrale par positivité et croissance de l'intégrale.

Soit $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$. Comme $t \neq 1$, on a $1-t \neq 0$ et $1-t^n \neq 0$ (car $0 \leq t^n < 1$), donc $S_n(t) = \frac{1-t^n}{1-t}$ et :

$$\frac{1}{S_n(t)} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) = (1-t) \frac{1-(1-t^n)}{1-t^n} = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

C'est l'égalité demandée.

On remarque de plus, en utilisant l'identité $(1-t)S_n(t) = 1-t^n$, que pour tout $t \in [0, 1]$ (y compris $t = 1$) :

$$g_n(t) := \frac{1}{S_n(t)} - (1-t) = \frac{1-(1-t)S_n(t)}{S_n(t)} = \frac{t^n}{S_n(t)}.$$

La fonction g_n est continue sur $[0, 1]$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $t^n \geq 0$ et $S_n(t) \geq 1$, donc :

$$0 \leq g_n(t) \leq t^n.$$

Par ailleurs $\int_0^1 (1-t) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$. Par linéarité de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$:

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{S_n(t)} - (1-t) \right) dt = \int_0^1 g_n(t) dt.$$

Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne $u_n - \frac{1}{2} \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

(b) Il faut d'abord justifier l'existence de v_n (l'intégrande n'est pas défini en $u = 1$), puis effectuer le changement de variable sur un segment $[0, x]$ avec $x < 1$ et passer à la limite.

Posons, pour $u \in [0, 1[$, $h_n(u) = \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}$. La fonction $u \mapsto u^{1/n}$ est continue sur $[0, 1]$ (elle vaut 0 en 0 et $\exp(\frac{1}{n} \ln u)$ sinon), donc h_n est continue sur $[0, 1[$.

Changement de variable sur un segment. Soit $x \in [0, 1[$. La fonction $\varphi : t \mapsto t^n$ est de classe C^1 sur $[0, x]$, à valeurs dans $[0, x^n] \subset [0, 1[$, où h_n est continue. La formule de changement de variable donne :

$$\int_0^x h_n(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} h_n(u) du = \int_0^{x^n} h_n(u) du.$$

Or, pour $t \in [0, x]$, $\varphi(t)^{1/n} = t$ et $\varphi(t)^{2/n} = t^2$, donc :

$$h_n(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{t - t^2}{1 - t^n} n t^{n-1} = n \frac{(1 - t)t^n}{1 - t^n} = n g_n(t)$$

d'après la question 1.(a). Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \int_0^{x^n} h_n(u) du = n \int_0^x g_n(t) dt.$$

Passage à la limite. Soit $y \in [0, 1[$ et $x = y^{1/n} \in [0, 1[$, de sorte que $x^n = y$:

$$\int_0^y h_n(u) du = n \int_0^{y^{1/n}} g_n(t) dt.$$

Lorsque $y \rightarrow 1^-$, on a $y^{1/n} \rightarrow 1$ par continuité de $y \mapsto y^{1/n}$ en 1. Comme g_n est continue sur $[0, 1]$, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x g_n(t) dt$ est continue sur $[0, 1]$ (c'est une primitive de g_n), donc $G(y^{1/n}) \rightarrow G(1) = u_n - \frac{1}{2}$.

Par conséquent $\int_0^y h_n(u) du$ admet une limite finie quand $y \rightarrow 1^-$: l'intégrale v_n converge et

$$v_n = n \left(u_n - \frac{1}{2} \right).$$

Remarque : on peut aussi voir directement que l'intégrale v_n est faussement impropre en 1. Pour $a > 0$, $\frac{u^a - 1}{u - 1} \rightarrow a$ quand $u \rightarrow 1$ (taux d'accroissement de $u \mapsto u^a$, dérivable en 1), donc

$$h_n(u) = -\frac{(u^{1/n} - 1) - (u^{2/n} - 1)}{u - 1} \rightarrow -\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

quand $u \rightarrow 1^-$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1, u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. (a) Il s'agit de reconnaître un taux d'accroissement.

La fonction $\ln$ est dérivable en 1, de dérivée 1, et $\ln(1) = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = 1.$$

Pour $k \geq 1$ et $x > 0, x \neq 1$:

$$\frac{(\ln(x))^k}{x - 1} = \frac{\ln(x)}{x - 1} (\ln(x))^{k-1}.$$

Si $k = 1$, la limite vaut 1. Si $k \geq 2$, $(\ln(x))^{k-1} \rightarrow 0$ par continuité de $\ln$ en 1, donc la limite vaut $1 \times 0 = 0$.

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1 \text{ et, pour } k \geq 2, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(x))^k}{x - 1} = 0.$$

(b) La fonction $\psi_k : x \mapsto \frac{(\ln(x))^k}{x - 1}$ est continue sur $]0, 1[$; l'intégrale est impropre en 0 et en 1. On étudie séparément $\int_0^{1/2}$ et $\int_{1/2}^1$.

En 1 : d'après 2.(a), ψ_k admet une limite finie en 1. Elle se prolonge donc en une fonction continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$: l'intégrale $\int_{1/2}^1 \psi_k(x) dx$ est faussement impropre, donc convergente.

En 0 : pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $1 - x \geq \frac{1}{2}$, donc :

$$|\psi_k(x)| = \frac{|\ln(x)|^k}{1-x} \leq 2|\ln(x)|^k.$$

Par croissances comparées, $\sqrt{x} |\ln(x)|^k \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc $|\ln(x)|^k = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

en 0^+ . L'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann en 0 avec exposant

$\frac{1}{2} < 1$). Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{1/2} |\ln(x)|^k dx$ converge, puis

$\int_0^{1/2} |\psi_k(x)| dx$ converge.

L'intégrale $\int_0^{1/2} \psi_k(x) dx$ est donc absolument convergente, donc convergente.

Conclusion

pour tout $k \geq 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$ converge.

(c) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $x \leq 0$; le point clé est une majoration fine de $|f''|$ sur $] -\infty, 0]$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = e^x - 2e^{2x}, \quad f'(0) = -1, \quad f''(x) = e^x - 4e^{2x}.$$

Majoration de $|f''|$ sur $] -\infty, 0]$. Pour $x \leq 0$, posons $s = e^x \in]0, 1]$. Alors $f''(x) = s - 4s^2$.

D'une part, $s - 4s^2 + 3 = -(4s^2 - s - 3) = -(s-1)(4s+3) \geq 0$ car $s-1 \leq 0$ et $4s+3 > 0$; donc $f''(x) \geq -3$.

D'autre part, $s - 4s^2 \leq s \leq 1 \leq 3$.

Ainsi $\forall x \leq 0, |f''(x)| \leq 3$.

Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $x \leq 0$. La fonction f est de classe C^2 sur le segment $[x, 0]$ et $|f''| \leq 3$ sur ce segment, donc :

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq \frac{3|x-0|^2}{2!} = \frac{3x^2}{2}.$$

Or $f(x) - f(0) - f'(0)x = e^x - e^{2x} + x$.

Conclusion

$$\forall x \in]-\infty, 0], |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. (a) On applique 2.(c) avec $x = \frac{\ln(u)}{n}$, on divise par $1 - u$, puis on intègre ; la question 2.(b) assure la convergence des intégrales.

Existence des intégrales. D'après 2.(b) avec $k = 1$ et $k = 2$, les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du$ et $\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{u-1} du$ convergent, donc aussi leurs opposées :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du.$$

L'intégrale v_n converge d'après 1.(b).

Inégalité ponctuelle. Soit $u \in]0, 1[$ et $x = \frac{\ln(u)}{n} \leq 0$. On a $e^x = u^{1/n}$ et $e^{2x} = u^{2/n}$, donc d'après 2.(c) :

$$\left| u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln(u)}{n} \right| \leq \frac{3(\ln(u))^2}{2n^2}.$$

En divisant par $1 - u > 0$:

$$|\varphi_n(u)| \leq \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln(u))^2}{1-u}, \quad \text{où} \quad \varphi_n(u) = \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n} \frac{\ln(u)}{1-u}.$$

Intégration. La fonction φ_n est continue sur $]0, 1[$ et, par linéarité (les deux intégrales convergent), $\int_0^1 \varphi_n(u) du = v_n + \frac{I}{n}$. Le majorant de $|\varphi_n|$ est d'intégrale convergente, donc $\int_0^1 \varphi_n$ est absolument convergente, et l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale donnent :

$$\left| v_n + \frac{I}{n} \right| = \left| \int_0^1 \varphi_n(u) du \right| \leq \int_0^1 |\varphi_n(u)| du \leq \frac{3}{2n^2} J.$$

Conclusion

$$\forall n \geq 1, \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du.$$

(b) On multiplie l'inégalité précédente par n ; pour obtenir un équivalent, il faut vérifier que $I \neq 0$.

Signe de I . Pour $u \in]0, 1[$, $\ln(u) < 0$ et $1-u > 0$, donc $\frac{\ln(u)}{1-u} < 0$. La fonction est continue et strictement négative sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, donc $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\ln(u)}{1-u} du < 0$, et les intégrales sur $]0, \frac{1}{4}]$ et $[\frac{1}{2}, 1[$ sont négatives ou nulles. Par la relation de Chasles, $I < 0$, en particulier $I \neq 0$.

Équivalent de v_n . En multipliant l'inégalité de 3.(a) par $n > 0$:

$$|nv_n + I| \leq \frac{3J}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $nv_n \rightarrow -I$. Comme $-I \neq 0$, $\frac{nv_n}{-I} \rightarrow 1$, c'est-à-dire :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{I}{n}.$$

Équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$. D'après 1.(b), $u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$, et un équivalent est compatible avec le produit par $\frac{1}{n}$:

$$u_n - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{I}{n^2}.$$

Conclusion

$v_n \sim -\frac{I}{n}$ et $u_n - \frac{1}{2} \sim -\frac{I}{n^2}$, avec $-I > 0$, ce qui est cohérent avec $u_n - \frac{1}{2} \geq 0$ (question 1.(a)).

EXERCICE 2

1. (a) Il faut montrer que f est linéaire et que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la dérivation étant linéaire :

$$\begin{aligned} f(aP + bQ) &= (aP + bQ)'' - 4X(aP + bQ)' = a(P'' - 4XP') + b(Q'' - 4XQ') \\ &= af(P) + bf(Q). \end{aligned}$$

Stabilité. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P'' \leq n$ et $\deg(XP') \leq 1 + (n-1) = n$ (avec la convention $\deg 0 = -\infty$, et ces inégalités restent vraies si P' ou P'' est nul). Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On calcule les images des vecteurs de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

$$f(1) = 0 - 4X \cdot 0 = 0 \text{ et } f(X) = 0 - 4X \cdot 1 = -4X.$$

Pour $k \in \{2, \dots, n\} : (X^k)' = kX^{k-1}$ et $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$, donc :

$$f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4kX^k.$$

Cette formule reste vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ (les deux termes s'annulent pour $k = 0$, le premier pour $k = 1$).

Ainsi, la colonne d'indice k (indices de 0 à n) de A_n a pour seuls coefficients éventuellement non nuls $-4k$ sur la diagonale (ligne k) et $k(k-1)$ en ligne $k-2$ (lorsque $k \geq 2$). Tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.

Conclusion

A_n est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $0, -4, -8, \dots, -4n$.

(c) On utilise les valeurs propres d'une matrice triangulaire.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Donc le spectre de f est $\{-4k, k \in \{0, \dots, n\}\}$, qui contient $n+1$ réels deux à deux distincts.

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et f possède $n+1$ valeurs propres distinctes, donc f est diagonalisable.

Chaque espace propre E_{-4k} est de dimension au moins 1. Comme f est diagonalisable, $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n E_{-4k}$ donc

$$\sum_{k=0}^n \dim E_{-4k} = n+1.$$

Une somme de $n + 1$ entiers tous supérieurs ou égaux à 1 valant $n + 1$, chacun vaut exactement 1.

Conclusion

f est diagonalisable et ses $n + 1$ espaces propres sont des droites.

(d) On compare les coefficients de degré $\deg(P)$ dans l'égalité $f(P) = \lambda P$.

Soit P un vecteur propre : $P \neq 0$ et $f(P) = \lambda P$. Notons $d = \deg P \geq 0$ et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant.

Si $d = 0$, P est une constante non nulle, $f(P) = 0 = \lambda P$, donc $\lambda = 0 = -4d$.

Si $d \geq 1$, $\deg P'' \leq d - 2$ et XP' a pour terme dominant $da_d X^d$. Le coefficient de X^d dans $f(P)$ vaut donc $-4da_d$, et dans λP il vaut λa_d . Ainsi $-4da_d = \lambda a_d$ et, comme $a_d \neq 0$, $\lambda = -4d$.

Conclusion

$\lambda = -4 \deg(P)$.

Existence et unicité de H_n . Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après 1.(c), $-4n$ est valeur propre de f et $E_{-4n} = \text{Vect}(P_0)$ avec $P_0 \neq 0$. D'après ce qui précède, $-4n = -4 \deg P_0$, donc $\deg P_0 = n$. En notant $c \neq 0$ son coefficient dominant, $H_n = \frac{1}{c} P_0$ est unitaire de degré n et vérifie $f(H_n) = -4nH_n$.

Si H est un autre polynôme unitaire de degré n vérifiant $f(H) = -4nH$, alors $H \in \mathbb{R}_n[X]$ et $H \in E_{-4n}$, donc $H = aH_n$ pour un réel a (car $\dim E_{-4n} = 1$). La comparaison des coefficients dominants donne $a = 1$, donc $H = H_n$.

Remarque : l'expression $P'' - 4XP'$ ne dépend pas de n ; si $P \in \mathbb{R}_m[X]$ avec $m \leq n$, $f(P)$ est le même polynôme que l'on considère f sur $\mathbb{R}_m[X]$ ou sur $\mathbb{R}_n[X]$. On utilise ce fait librement dans la suite.

Conclusion

il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que $f(H_n) = -4nH_n$.

2. (a) On dérive $(\mathcal{E}_n)$, puis on utilise l'unicité de 1.(d) au rang $n - 1$.

Soit $n \geq 1$. La relation $(\mathcal{E}_n)$ s'écrit $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$. En dérivant (dérivée de XH_n' égale à $H_n' + XH_n''$) :

$$H_n''' - 4H_n' - 4XH_n'' = -4nH_n',$$

d'où :

$$(H_n')'' - 4X(H_n')' = -4nH_n' + 4H_n' = -4(n-1)H_n',$$

c'est-à-dire $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

Le polynôme H_n est unitaire de degré $n \geq 1$, donc H_n' est de degré $n - 1$ et de coefficient dominant $n \neq 0$. Le polynôme $\frac{1}{n}H_n'$ est unitaire de degré $n - 1$ et vérifie

$$f\left(\frac{1}{n}H_n'\right) = -4(n-1)\frac{1}{n}H_n' \text{ par linéarité. Par unicité dans 1.(d) (au rang } n-1), \\ \frac{1}{n}H_n' = H_{n-1}.$$

Donc $\forall n \geq 1, H_n' = nH_{n-1}$.

Soit $n \geq 2$. En appliquant ce résultat aux rangs n et $n - 1$: $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$.
En reportant dans $(\mathcal{E}_n)$:

$$n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n-1} = -4nH_n.$$

En divisant par $4n \neq 0$:

$$H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

Conclusion

$$\forall n \geq 1, H'_n = nH_{n-1} \text{ et } \forall n \geq 2, H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

(b) On utilise la caractérisation de 1.(d), puis la relation de récurrence de 2.(a).

H_0 : le seul polynôme unitaire de degré 0 est 1, et $f(1) = 0 = -4 \times 0 \times 1$. Donc $H_0 = 1$.

H_1 : un polynôme unitaire de degré 1 s'écrit $X + c$; $f(X + c) = -4X$ et $-4(X + c) = -4X - 4c$, donc $(\mathcal{E}_1)$ équivaut à $c = 0$. Donc $H_1 = X$. (On a aussi $f(X) = -4X$ d'après 1.(b).)

Méthode 1 — Par la relation de récurrence.

Pour $n = 2$: $H_2 = XH_1 - \frac{1}{4}H_0 = X^2 - \frac{1}{4}.$

Pour $n = 3$: $H_3 = XH_2 - \frac{2}{4}H_1 = X^3 - \frac{X}{4} - \frac{X}{2} = X^3 - \frac{3}{4}X.$

Méthode 2 — Par résolution directe de $(\mathcal{E}_n)$.

Pour $n = 2$, on cherche $P = X^2 + aX + b$ avec $f(P) = -8P$. On a $f(P) = 2 - 4X(2X + a) = -8X^2 - 4aX + 2$ et $-8P = -8X^2 - 8aX - 8b$. L'identification donne $-4a = -8a$ et $2 = -8b$, soit $a = 0$, $b = -\frac{1}{4}$.

Pour $n = 3$, on cherche $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $f(P) = -12P$. On a $P' = 3X^2 + 2aX + b$, $P'' = 6X + 2a$, donc $f(P) = -12X^3 - 8aX^2 + (6 - 4b)X + 2a$. L'identification avec $-12P = -12X^3 - 12aX^2 - 12bX - 12c$ donne $a = 0$, $6 - 4b = -12b$ soit $b = -\frac{3}{4}$, et $2a = -12c$ soit $c = 0$.

La méthode 1 exploite la structure de la suite (H_n) et se généralise à tout rang ; la méthode 2 ne repose que sur la définition et sert de vérification indépendante.

Conclusion

$$H_2 = X^2 - \frac{1}{4} \text{ et } H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X.$$

(c) Code adapté en Python.

La relation de récurrence s'obtient en évaluant en 1 la relation de 2.(a) : pour $n \geq 2$,

$$H_n(1) = H_{n-1}(1) - \frac{(n-1)H_{n-2}(1)}{4}, \text{ avec } H_0(1) = H_1(1) = 1.$$

Le programme conserve en mémoire les deux derniers termes calculés.

Python

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 1
    a = 1 # contient u_{k-2}
    b = 1 # contient u_{k-1}
    for k in range(2, n + 1):
        c = b - (k - 1) * a / 4 # c = u_k
        a = b
        b = c
    return b # u_n

print(u(2010))
```

Explications : au début de l'itération d'indice k , $a = u_{k-2}$ et $b = u_{k-1}$; à la fin, $a = u_{k-1}$ et $b = u_k$. La boucle `range(2, n + 1)` parcourt $k = 2, \dots, n$ ($n + 1$ est exclu), donc la fonction renvoie u_n ; pour $n = 1$ la boucle est vide et la fonction renvoie $u_1 = 1$.

Code exécuté : on obtient bien $u_0, \dots, u_5 = 1, 1, 0.75, 0.25, -0.3125, -0.5625$, en accord avec $H_2(1) = \frac{3}{4}$ et $H_3(1) = \frac{1}{4}$.

Remarque numérique. Pour $n = 2010$, ce programme affiche nan : la valeur $|u_k|$ dépasse

le plus grand flottant représentable (environ $1,8 \times 10^{308}$) dès $k = 395$, puis le calcul produit des opérations du type $\infty - \infty$. L'algorithme est correct, mais le type flottant est insuffisant. On peut contourner le problème en calculant en entiers $w_n = 2^n u_n$: en multipliant la récurrence par 2^n , on obtient $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et $w_n = 2w_{n-1} - (n-1)w_{n-2}$ pour $n \geq 2$, qui ne fait intervenir que des entiers (exacts et non bornés en Python).

Python

```
import math

def w(n):
    if n == 0:
        return 1
    a = 1 # w_{k-2}
    b = 2 # w_{k-1}
    for k in range(2, n + 1):
        c = 2 * b - (k - 1) * a
        a = b
        b = c
    return b

W = w(2010) # u_2010 = W / 2**2010 exactement
print(math.log10(abs(W)) - 2010 * math.log10(2)) # log10 de |u_2010|
```

Code exécuté : on obtient $W > 0$ et $\frac{\ln(u_{2010})}{\ln(10)} \approx 2277,888$, soit $u_{2010} \approx 7,72 \times 10^{2277}$. Il s'agit d'une valeur numérique, pas d'un résultat démontré.

3. (a) V est de classe C^1 sur l'ouvert U (sommes de fonctions polynomiales et de composées de $\ln$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $|x - y|$, $|y - z|$, $|z - x|$ strictement positives et de classe C^1 au voisinage de chaque point de U). Un point critique est un point où le gradient s'annule.

Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de $s \mapsto \ln |s|$ vaut $s \mapsto \frac{1}{s}$. On en déduit, pour $(x, y, z) \in U$:

$$\partial_1 V(x, y, z) = 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z},$$

$$\partial_2 V(x, y, z) = 2y - \frac{1}{y-x} - \frac{1}{y-z},$$

$$\partial_3 V(x, y, z) = 2z - \frac{1}{z-y} - \frac{1}{z-x}.$$

(Par exemple, $\frac{\partial}{\partial x} \ln |z-x| = \frac{-1}{z-x} = \frac{1}{x-z}$.)

Comme $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \neq 0$:

$$\partial_1 V(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \iff 2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = (\alpha - \gamma) + (\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma.$$

De même, en multipliant par $(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \neq 0$ puis par $(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \neq 0$:

$$\partial_2 V(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \iff 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma,$$

$$\partial_3 V(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \iff 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta.$$

Conclusion

(α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S})$.

(b) On calcule Q' et Q'' et on les évalue en α, β, γ .

$$Q' = (X - \beta)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \beta)$$

et

$$Q'' = 2[(X - \alpha) + (X - \beta) + (X - \gamma)] = 2(3X - \alpha - \beta - \gamma).$$

En α : $Q'(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$ et $Q''(\alpha) = 2(2\alpha - \beta - \gamma)$, donc :

$$Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 2[(2\alpha - \beta - \gamma) - 2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)].$$

Ainsi α est racine de $Q'' - 4XQ'$ si et seulement si la première équation de $(\mathcal{S})$ est vérifiée. Le polynôme Q étant symétrique en α, β, γ , le même calcul en β et en γ donne l'équivalence avec la deuxième et la troisième équation.

Conclusion

(α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si α, β, γ sont racines de $Q'' - 4XQ'$.

(c) On utilise la factorisation par des racines distinctes, puis l'unicité de H_3 .

Supposons (α, β, γ) point critique. D'après 3.(a) et 3.(b), $R = Q'' - 4XQ' = f(Q)$ admet les trois racines distinctes α, β, γ . Donc R est divisible par $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = Q$: il existe un polynôme S tel que $R = QS$.

Or Q est unitaire de degré 3, donc Q'' est de degré 1 et XQ' a pour terme dominant $3X^3$: R est de degré 3, de coefficient dominant -12 . Ainsi $\deg S = 0$ et $S = -12$, c'est-à-dire :

$$Q'' - 4XQ' = -12Q.$$

Donc Q est un polynôme unitaire de degré 3 vérifiant $f(Q) = -4 \times 3Q$: par unicité (question 1.(d) avec $n = 3$), $Q = H_3$.

Recherche des points critiques. D'après 2.(b),

$$H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X = X \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \text{ Si } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est critique, alors}$$

$$(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = H_3, \text{ donc } \{\alpha, \beta, \gamma\} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Réciproquement, si (α, β, γ) est une permutation de $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, il appartient à U (coordonnées distinctes), $Q = H_3$, donc $Q'' - 4XQ' = -12H_3$ s'annule en α, β, γ ; par 3.(b) puis 3.(a), c'est un point critique.

Vérification sur un exemple : en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$,

$$\partial_1 V = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Conclusion

V possède exactement six points critiques, les six permutations de $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \\ & , \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

PROBLÈME

Notations communes. On note D_j le numéro obtenu à la j -ième pioche. Les tirages se faisant avec remise et de façon équiprobable, les variables $D_1, D_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $\{1, \dots, r\}$.

PARTIE I : Résultats préliminaires.

1. (a) Code adapté en Python.

On calcule la somme partielle

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

par une boucle, puis on retranche $\ln(n)$.

Python

```
import numpy as np

def u(n):
    s = 0
    for i in range(1, n + 1): # i = 1, ..., n
        s = s + 1 / i
    return s - np.log(n)

print(u(1), u(10), u(1000))
```

La variable s contient, après l'itération d'indice i , la somme

$$\sum_{j=1}^i \frac{1}{j};$$

la fonction renvoie u_n .

Code exécuté : on obtient $u_1 = 1$, $u_{10} \approx 0,6264$, $u_{1000} \approx 0,5777$, valeurs décroissantes, ce qui est cohérent avec la suite de la question (la limite est la constante d'Euler, environ 0,5772, qui n'est pas demandée).

(b) On écrit $u_n - u_{n+1}$ à l'aide d'un logarithme et d'une fraction, puis on développe en $\frac{1}{n}$.

Pour $n \geq 1$:

$$u_n - u_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Développement limité usuel : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand

$x \rightarrow 0$. Avec $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par ailleurs, de façon exacte :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc :

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{soit} \quad u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Nature de la série. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge ($2 > 1$), donc

$$\sum \frac{1}{2n^2}$$

aussi. Le terme $\frac{1}{2n^2}$ est positif et $u_n - u_{n+1}$ lui est équivalent : par comparaison de séries à termes positifs (à partir d'un certain rang, $u_n - u_{n+1} > 0$), la série

$$\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$$

converge.

Convergence de (u_n) . Pour $N \geq 2$, par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_N, \quad \text{donc} \quad u_N = u_1 - \sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_{n+1}).$$

Le membre de droite converge quand $N \rightarrow +\infty$ vers

$$u_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}).$$

Conclusion

$u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$, la série

$$\sum (u_n - u_{n+1})$$

converge et la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge ; on note ℓ sa limite.

(c) Méthode 1 — Série de Riemann.

La suite

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)_{n \geq 1}$$

est la suite des sommes partielles de la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{i^2},$$

d'exposant $2 > 1$, qui converge. Donc cette suite converge.

Méthode 2 — Suite croissante majorée.

Posons

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

On a $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite est croissante. Pour $i \geq 2$,

$\frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$, donc par télescopage :

$$s_n \leq 1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Croissante et majorée, la suite converge par le théorème de la limite monotone.

La méthode 1 utilise directement un résultat du cours ; la méthode 2 est élémentaire, fournit une majoration explicite ($s_n \leq 2$) et se transpose à d'autres séries comparables à des séries télescopiques.

Conclusion

la suite

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)_{n \geq 1}$$

converge ; on note σ sa limite. On a $\sigma \geq s_1 = 1 > 0$.

2. (a) On vérifie les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition (croissance, continuité à droite, limites 0 et 1), puis la régularité permettant d'obtenir une densité.

Régularité. $t \mapsto -t$, $\exp$ et $s \mapsto -s$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par composition F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en particulier continue (donc continue à droite).

Croissance. $t \mapsto \exp(-t)$ est décroissante, donc $t \mapsto -\exp(-t)$ est croissante, et $\exp$ est croissante : F_Z est croissante. On peut aussi dériver :

$$F'_Z(t) = \exp(-t) \exp(-\exp(-t)) > 0.$$

Limites. Quand $t \rightarrow -\infty$, $\exp(-t) \rightarrow +\infty$, donc $F_Z(t) \rightarrow \lim_{s \rightarrow -\infty} e^s = 0$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $\exp(-t) \rightarrow 0$, donc $F_Z(t) \rightarrow e^0 = 1$.

Donc F_Z est bien une fonction de répartition.

Densité. F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc Z est une variable à densité, et une densité est $f_Z = F'_Z$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \exp(-t - \exp(-t)).$$

Conclusion

F_Z est une fonction de répartition et Z admet la densité $f_Z : t \mapsto e^{-t} \exp(-e^{-t})$.

(b) On calcule $P(W \leq w)$ en distinguant le signe de w .

La variable $W = \exp(-Z)$ est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Si $w \leq 0$: $(W \leq w) = \emptyset$, donc $F_W(w) = 0$.

Si $w > 0$: comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

$$(W \leq w) = (-Z \leq \ln w) = (Z \geq -\ln w).$$

Donc, Z étant à densité (ce qui donne $P(Z = -\ln w) = 0$) :

$$F_W(w) = 1 - F_Z(-\ln w) = 1 - \exp(-\exp(\ln w)) = 1 - e^{-w}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, et la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion

$F_W(w) = 0$ si $w \leq 0$, $F_W(w) = 1 - e^{-w}$ si $w > 0$; W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto |\ln(x)|^k e^{-x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$; on étudie la convergence en 0 et en $+\infty$.

Sur $]0, 1]$: $|\ln(x)|^k e^{-x} \leq |\ln(x)|^k$, et on a vu en Exercice 1, question 2.(b), que $|\ln(x)|^k = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0^+ (pour $k = 0$, la fonction est bornée). Comme $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, $\int_0^1 |\ln(x)|^k e^{-x} dx$ converge par comparaison de fonctions positives.

Sur $[1, +\infty[$: $0 \leq \ln(x) \leq x$, donc $x^2 |\ln(x)|^k e^{-x} \leq x^{k+2} e^{-x} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Ainsi $|\ln(x)|^k e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge : $\int_1^{+\infty} |\ln(x)|^k e^{-x} dx$ converge.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx$ est absolument convergente.

(d) Il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Z(t) dt$ converge absolument et calculer sa valeur.

Méthode 1 — Changement de variable $x = \exp(-t)$, imposé par l'énoncé.

Posons $g(t) = t^k f_Z(t) = t^k e^{-t} \exp(-e^{-t})$, continue sur $\mathbb{R}$. Soit $a < b$ réels. La fonction $\phi : x \mapsto -\ln(x)$ est de classe C^1 sur le segment $[e^{-b}, e^{-a}]$, avec $\phi(e^{-b}) = b$, $\phi(e^{-a}) = a$ et $\phi'(x) = -\frac{1}{x}$. La formule de changement de variable donne :

$$\int_{e^{-a}}^{e^{-b}} g(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_a^b g(t) dt.$$

Or

$$g(\phi(x)) \phi'(x) = (-\ln x)^k x e^{-x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -(-\ln x)^k e^{-x},$$

donc :

$$\int_a^b g(t) dt = \int_{e^{-b}}^{e^{-a}} (-\ln x)^k e^{-x} dx.$$

Le même calcul avec $|g|$ (on a $|g(\phi(x)) \phi'(x)| = |\ln x|^k e^{-x}$) donne :

$$\int_a^b |g(t)| dt = \int_{e^{-b}}^{e^{-a}} |\ln x|^k e^{-x} dx \leq K := \int_0^{+\infty} |\ln x|^k e^{-x} dx,$$

où K est fini d'après 2.(c).

Convergence absolue. Les fonctions $b \mapsto \int_0^b |g|$ (pour $b \rightarrow +\infty$) et $a \mapsto \int_a^0 |g|$ (pour $a \rightarrow -\infty$) sont monotones et majorées par K , donc admettent des limites finies :

$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$ converge. Ainsi Z admet un moment d'ordre k , égal à $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$.

Valeur. Quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$, on a $e^{-b} \rightarrow 0^+$ et $e^{-a} \rightarrow +\infty$. La convergence de $\int_0^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x} dx$ (question 2.(c)) permet de passer à la limite dans l'égalité ci-dessus (séparément en a avec $b = 0$, et en b avec $a = 0$, puis Chasles) :

$$\begin{aligned} E(Z^k) &= \int_{-\infty}^0 g + \int_0^{+\infty} g = \int_1^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x} dx + \int_0^1 (-\ln x)^k e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Méthode 2 — Théorème de transfert avec la question 2.(b).

On a $Z = -\ln(W)$ avec $W \sim \mathcal{E}(1)$, de densité $w \mapsto e^{-w}$ sur $]0, +\infty[$ (et nulle ailleurs). La fonction $w \mapsto (-\ln w)^k$ est continue sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de transfert,

$E((- \ln W)^k)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} |\ln w|^k e^{-w} dw$ converge, ce qui est le cas d'après 2.(c), et alors :

$$E(Z^k) = E((- \ln W)^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln w)^k e^{-w} dw.$$

La méthode 1 travaille directement sur la densité de Z et illustre le changement de variable dans une intégrale impropre (fait sur un segment puis passage à la limite) ; la méthode 2 est plus rapide, mais repose sur l'identification préalable de la loi de W et sur le théorème de transfert.

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$, Z admet un moment d'ordre k et $E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx$.

PARTIE II : Étude de la variable X_r

1. (a) Ici $r = 3$. On traduit l'événement $(Y_2 > n)$ en termes des n premières pioches.

Comparaison. $(Y_2 > n)$ signifie qu'après n pioches, on n'a pas encore obtenu deux numéros distincts, c'est-à-dire que les n premières pioches donnent toutes le même numéro. Donc $(Y_2 > n) = C_n$.

Calcul. $C_n = \bigcup_{a=1}^3 (D_1 = a) \cap \dots \cap (D_n = a)$, union de trois événements deux à deux incompatibles. Par indépendance des pioches :

$$P(C_n) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad \text{donc} \quad P(Y_2 > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Remarque. L'événement « toutes les pioches donnent le même numéro » est $\bigcap_{n \geq 1} C_n$, intersection décroissante ; par continuité monotone, sa probabilité vaut

$\lim_n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$. Cet événement, sur lequel Y_2 ne serait pas défini, est négligeable, et on le néglige dans toute la suite.

Loi de Y_2 . On a $Y_2 \geq 2$, donc $Y_2(\Omega) \subset \{2, 3, \dots\}$. Pour $n \geq 2$,

$(Y_2 > n-1) = (Y_2 = n) \cup (Y_2 > n)$ (union disjointe), et $n-1 \geq 1$:

$$P(Y_2 = n) = P(Y_2 > n-1) - P(Y_2 > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} > 0.$$

Conclusion

$$(Y_2 > n) = C_n, \quad P(C_n) = P(Y_2 > n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad P(Y_2 = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2};$$

autrement dit $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

(b) Formule des probabilités totales, puis description de l'événement par les pioches.

Première égalité. D'après 1.(a), la famille $((Y_2 = k))_{k \geq 2}$ est un système quasi-complet

d'événements (deux à deux incompatibles, de probabilités de somme 1). Par la formule des probabilités totales, pour $n \geq 1$:

$$P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]).$$

Deuxième égalité. Soit $n \geq 1$ et $k \geq 2$. L'événement $[Y_2 = k] \cap [Y_3 = n + k]$ est réalisé si et seulement s'il existe deux numéros distincts a, b tels que :

- les $k - 1$ premières pioches donnent a ;
- la k -ième pioche donne b ;
- les pioches $k + 1, \dots, k + n - 1$ (au nombre de $n - 1$) donnent a ou b ;
- la pioche $k + n$ donne le troisième numéro $c \notin \{a, b\}$.

Ces événements, pour les $3 \times 2 = 6$ couples (a, b) , sont deux à deux incompatibles. Par indépendance des pioches, chacun a pour probabilité :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$P([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]) = 6 \times \frac{1}{3^{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Loi de $Y_3 - Y_2$. Par la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$:

$$P(Y_3 - Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Comme $Y_3 > Y_2$, $Y_3 - Y_2$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Conclusion

$Y_3 - Y_2$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

2. (a) Rectification de l'énoncé : le PDF affirme $Y_i(\Omega) = \{i, i+1, \dots\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$, ce qui est faux pour $i = 1$ puisque $Y_1 = 1$. L'énoncé rectifié traite séparément Y_1 .

Remarque préliminaire (événements négligeables). Soit $i \in \{2, \dots, r\}$. Notons N_i l'événement « on n'obtient jamais i numéros distincts » et E_m l'événement « les m premières pioches fournissent au plus $i-1$ numéros distincts ». La suite (E_m) est décroissante et $N_i = \bigcap_m E_m$. De plus E_m est l'union, sur les parties S de $\{1, \dots, r\}$ à $i-1$ éléments, des événements « $D_1, \dots, D_m \in S$ », de probabilité $\left(\frac{i-1}{r}\right)^m$. Par sous-additivité (question III.2.(a), dont la preuve n'utilise rien de cette partie) :

$$P(E_m) \leq \binom{r}{i-1} \left(\frac{i-1}{r}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

car $0 \leq \frac{i-1}{r} < 1$. Par continuité monotone, $P(N_i) = 0$. On néglige ces événements : Y_i est fini presque sûrement.

Y_1 . Par convention $Y_1 = 1$, donc $Y_1(\Omega) = \{1\}$.

Y_i pour $i \geq 2$. Chaque pioche apporte au plus un nouveau numéro, donc il faut au moins i pioches pour obtenir i numéros distincts : $Y_i \geq i$. Réciproquement, soit $m \geq i$: la suite de pioches $1, 2, \dots, i-1$, puis $m-i$ fois le numéro 1, puis le numéro i (soit m pioches) réalise $Y_i = m$, et cet événement est de probabilité $\left(\frac{1}{r}\right)^m > 0$. Donc $Y_i(\Omega) = \{i, i+1, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, i-1\}$.

$Y_{i+1} - Y_i$. Pour $i \in \{1, \dots, r-1\}$, on a $Y_{i+1} > Y_i$ (la pioche qui fournit le $(i+1)$ -ième numéro est postérieure à celle qui fournit le i -ième), donc $Y_{i+1} - Y_i \geq 1$.

Réciproquement, pour $n \geq 1$, la suite $1, 2, \dots, i$, puis $n-1$ fois le numéro 1, puis le numéro $i+1$ réalise $Y_i = i$ et $Y_{i+1} = i+n$, donc $Y_{i+1} - Y_i = n$.

Conclusion

$Y_1(\Omega) = \{1\}$, $Y_i(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, i-1\}$ pour $i \in \{2, \dots, r\}$, et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

(b) Rectification de l'énoncé : le PDF demande la formule pour tout $k \geq i$; pour $i = 1$ et $k \geq 2$, l'événement $(Y_1 = k)$ est vide et la probabilité conditionnelle n'est pas définie. L'énoncé rectifié porte sur $k \in Y_i(\Omega)$, ce qui garantit $P(Y_i = k) > 0$.

On décompose $(Y_i = k)$ selon l'ensemble des numéros obtenus, puis on utilise l'indépendance des pioches.

Soit $n \geq 1$ et $k \in Y_i(\Omega)$. Pour toute partie S de $\{1, \dots, r\}$ à i éléments, posons :

$$B_S = (Y_i = k) \cap (\{D_1, \dots, D_k\} = S).$$

Les événements B_S sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $(Y_i = k)$ (au rang $Y_i = k$, exactement i numéros distincts ont été obtenus). Chaque B_S ne dépend que de $D_1, \dots, D_k$.

Sur B_S , l'événement $(Y_{i+1} - Y_i = n) = (Y_{i+1} = k + n)$ est réalisé si et seulement si les pioches $k + 1, \dots, k + n - 1$ donnent des numéros de S et la pioche $k + n$ un numéro hors de S :

$$B_S \cap (Y_{i+1} - Y_i = n) = B_S \cap \bigcap_{j=k+1}^{k+n-1} (D_j \in S) \cap (D_{k+n} \notin S).$$

Par le lemme des coalitions, B_S (qui dépend de $D_1, \dots, D_k$) est indépendant de l'événement qui dépend de $D_{k+1}, \dots, D_{k+n}$, et ces dernières variables sont mutuellement indépendantes. Comme $P(D_j \in S) = \frac{i}{r}$:

$$P(B_S \cap (Y_{i+1} - Y_i = n)) = P(B_S) \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

En sommant sur les parties S (incompatibilité) :

$$P((Y_i = k) \cap (Y_{i+1} - Y_i = n)) = P(Y_i = k) \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right),$$

puis on divise par $P(Y_i = k) > 0$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1, \forall k \in Y_i(\Omega), P_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

(c) Formule des probabilités totales avec le système quasi-complet $((Y_i = k))_{k \in Y_i(\Omega)}$ (justifié en 2.(a)).

Pour $n \geq 1$:

$$P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \sum_{k \in Y_i(\Omega)} P(Y_i = k) \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right),$$

car

$$\sum_{k \in Y_i(\Omega)} P(Y_i = k) = 1.$$

Posons $p_i = 1 - \frac{i}{r} = \frac{r-i}{r} \in]0, 1[$ (car $1 \leq i \leq r-1$). Alors

$P(Y_{i+1} - Y_i = n) = (1 - p_i)^{n-1} p_i$ pour $n \geq 1$: $Y_{i+1} - Y_i$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p_i)$.

Une variable de loi $\mathcal{G}(p)$ admet une espérance $\frac{1}{p}$ et une variance $\frac{1-p}{p^2}$. D'où :

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{i/r}{(r-i)^2/r^2} = \frac{r i}{(r-i)^2}.$$

Remarque : la question précédente montre de plus que $Y_{i+1} - Y_i$ est indépendante de Y_i .

Conclusion

$$Y_{i+1} - Y_i \sim \mathcal{G}\left(\frac{r-i}{r}\right), \text{ d'espérance } \frac{r}{r-i} \text{ et de variance } \frac{ri}{(r-i)^2}.$$

3. (a) Télescopage, puis linéarité de l'espérance et variance d'une somme de variables indépendantes.

Égalité. Par télescopage,

$$Y_r = Y_1 + \sum_{j=1}^{r-1} (Y_{j+1} - Y_j).$$

Avec $Y_1 = 1$, $X_r = Y_r$ et le changement d'indice $j = r - i$ (i décrit $\{1, \dots, r-1\}$ quand j le décrit) :

$$X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i}).$$

Espérance. Chaque $Y_{r-i+1} - Y_{r-i}$ admet une espérance ; d'après 2.(c) appliquée à l'indice $r-i$:

$$E(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}) = \frac{r}{r - (r-i)} = \frac{r}{i}.$$

Par linéarité :

$$E(X_r) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} = r \cdot \frac{1}{r} + r \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i} = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}.$$

Variance. Les variables $Y_{j+1} - Y_j$ admettent une variance et sont indépendantes (admis), donc leurs covariances deux à deux sont nulles et la variance de la somme est la somme des variances (la constante 1 ne modifie pas la variance). D'après 2.(c) à l'indice $r-i$:

$$V(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}) = \frac{r(r-i)}{i^2} = \frac{r^2}{i^2} - \frac{r}{i}.$$

Donc :

$$V(X_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{i^2} - \frac{r}{i} \right) = r^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i},$$

car le terme d'indice $i = r$ ajouté vaut $\frac{r^2}{r^2} - \frac{r}{r} = 0$.

Conclusion

$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}$$

et

$$V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}.$$

(b) On exprime $E(X_r)$ et $V(X_r)$ à l'aide de u_r et de

$$s_r = \sum_{i=1}^r \frac{1}{i^2},$$

dont les limites ℓ et σ existent d'après I.1.

Espérance.

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{i} = \ln(r) + u_r,$$

donc :

$$E(X_r) = r \ln(r) + ru_r = r \ln(r) + \ell r + r(u_r - \ell).$$

Comme $u_r - \ell \rightarrow 0$, on a $r(u_r - \ell) = o(r)$. On prend $\alpha = \ell$.

Variance. $V(X_r) = r^2 s_r - r \ln(r) - ru_r$, donc :

$$\frac{V(X_r)}{r^2} = s_r - \frac{\ln(r)}{r} - \frac{u_r}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \sigma,$$

car $\frac{\ln r}{r} \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $\frac{u_r}{r} \rightarrow 0$ (u_r converge). Comme $\sigma \geq 1 > 0$, on en déduit $\frac{V(X_r)}{\sigma r^2} \rightarrow 1$. On prend $\beta = \sigma$.

Conclusion

avec $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et

$$\beta = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} > 0,$$

on a $E(X_r) = r \ln(r) + \alpha r + o(r)$ et $V(X_r) \sim \beta r^2$. (On sait par ailleurs que $\beta = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui n'est pas demandé.)

PARTIE III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

- (a) Question adaptée au programme actuel : dans le PDF, la lettre k désigne à la fois un numéro et un nombre de numéros, et l'événement « k numéros n'ont pas été piochés » est ambigu ; l'énoncé précise qu'il s'agit de k numéros donnés, c'est-à-dire de l'intersection $A_{\ell_1, m} \cap \dots \cap A_{\ell_k, m}$, seule quantité utile pour la formule du crible.

On utilise l'indépendance des pioches.

$A_{k,m} = \bigcap_{j=1}^m (D_j \neq k)$ et $P(D_j \neq k) = \frac{r-1}{r}$. Par indépendance :

$$P(A_{k,m}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m.$$

Soit $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ une partie à k éléments, notée L . On a $A_{\ell_1,m} \cap \dots \cap A_{\ell_k,m} = \bigcap_{j=1}^m (D_j \notin L)$

et $P(D_j \notin L) = \frac{r-k}{r}$. Par indépendance :

$$P(A_{\ell_1,m} \cap \dots \cap A_{\ell_k,m}) = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.$$

Cette probabilité ne dépend que de k , pas de la partie choisie. Pour $k = r$ elle vaut 0 (car $m \geq 1$).

Conclusion

$P(A_{k,m}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m$ et la probabilité que k numéros donnés ne soient pas piochés lors des m premières pioches vaut $\left(1 - \frac{k}{r}\right)^m$.

(b) Question adaptée au programme actuel : le programme ne contient la formule du crible que pour deux ou trois événements ; l'énoncé adapté rappelle la formule générale et indique comment l'établir avec des outils du programme (variables indicatrices et linéarité de l'espérance). On la démontre ci-dessous.

Égalité d'événements. $(X_r > m)$ signifie qu'à l'issue de m pioches, au moins un numéro n'a pas encore été obtenu, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $A_{k,m}$ soit réalisé :

$$(X_r > m) = A_{1,m} \cup \dots \cup A_{r,m}, \quad \text{donc} \quad P(X_r > m) = P(A_{1,m} \cup \dots \cup A_{r,m}).$$

Preuve de la formule du crible. Soit $D_1, \dots, D_p$ des événements et $\mathbb{1}_{D_j}$ leurs indicatrices (variables de Bernoulli, donc finies, avec $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$). L'événement contraire de

$\bigcup_j D_j$ est $\bigcap_j \overline{D_j}$, d'indicatrice

$$\prod_{j=1}^p (1 - \mathbb{1}_{D_j}),$$

donc :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_j D_j} = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - \mathbb{1}_{D_j}).$$

Pour des réels $x_1, \dots, x_p$, on a

$$\prod_{j=1}^p (1 - x_j) = \sum_{J \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{|J|} \prod_{j \in J} x_j$$

(récurrence sur p : en multipliant par $1 - x_{p+1}$, on obtient les parties ne contenant pas $p + 1$ et celles le contenant, avec un signe supplémentaire). Comme

$$\prod_{j \in J} \mathbb{1}_{D_j} = \mathbb{1}_{\bigcap_{j \in J} D_j},$$

et en isolant le terme $J = \emptyset$ égal à 1 :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_j D_j} = \sum_{\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{|J|-1} \mathbb{1}_{\bigcap_{j \in J} D_j}.$$

Par linéarité de l'espérance (somme finie), on obtient la formule du crible en regroupant les parties J selon leur cardinal k .

Application. Avec $p = r$ et $D_j = A_{j,m}$, d'après 1.(a), chaque intersection de k événements distincts a pour probabilité $\left(1 - \frac{k}{r}\right)^m$, et il y a $\binom{r}{k}$ parties à k éléments. Donc :

$$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.$$

Loi de X_r . D'après II.2.(a) (avec $i = r \geq 2$), $X_r(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$. Pour $m \geq r$, on a $m-1 \geq 1$ et $(X_r > m-1) = (X_r = m) \cup (X_r > m)$ (union disjointe), donc :

$$\begin{aligned} P(X_r = m) &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m-1} \left[1 - \left(1 - \frac{k}{r}\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \frac{k}{r} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

Avec $\frac{k}{r} \binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1}$ et le terme $k = r$ nul (car $m-1 \geq 1$), on obtient la forme simplifiée :

$$\forall m \geq r, \quad P(X_r = m) = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r-1}{k-1} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m-1}.$$

Contrôle numérique (exécuté, $r = 5$) : la formule donne $P(X_5 > 8) \approx 0,6774$ et une simulation de 10^5 expériences donne une fréquence de $0,6773$; la somme des $P(X_5 = m)$ pour $5 \leq m < 400$ vaut 1 à 10^{-15} près. Ces observations ne constituent pas une preuve.

Conclusion

$$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m$$

pour $m \geq 1$, et la loi de X_r est donnée par $X_r(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$ et la formule ci-dessus.

2. (a) Récurrence sur $m \geq 1$; l'hérédité utilise la formule du crible pour deux événements.

Pour $m \geq 1$, soit $\mathcal{P}(m)$: « pour toute famille $(D_1, \dots, D_m)$ d'événements,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^m D_j\right) \leq \sum_{j=1}^m P(D_j)$$

».

Initialisation : pour $m = 1$, il y a égalité.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(m)$ et soit $D_1, \dots, D_{m+1}$ des événements. Posons $U = \bigcup_{j=1}^m D_j$.

Alors :

$$P(U \cup D_{m+1}) = P(U) + P(D_{m+1}) - P(U \cap D_{m+1}) \leq P(U) + P(D_{m+1}) \leq \sum_{j=1}^{m+1} P(D_j),$$

par positivité de $P(U \cap D_{m+1})$ puis par $\mathcal{P}(m)$.

Conclusion

pour tout $m \geq 1$ et toute famille $(D_1, \dots, D_m)$, $P(D_1 \cup \dots \cup D_m) \leq P(D_1) + \dots + P(D_m)$.

(b) Méthode 1 — Étude de fonction.

Soit $\theta(x) = e^x - 1 - x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\theta'(x) = e^x - 1$, négative sur $] -\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc θ est décroissante puis croissante et admet un minimum global en 0, égal à $\theta(0) = 0$. Ainsi $\theta \geq 0$.

Méthode 2 — Convexité.

La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ($\exp'' = \exp > 0$), donc son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de la tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$.

La méthode 1 est un calcul autonome ; la méthode 2 reconnaît une inégalité de convexité, réutilisable par exemple pour $\ln(1+x) \leq x$ (concavité).

Conséquence. Avec $x = -\frac{1}{r} : 0 \leq 1 - \frac{1}{r} \leq \exp\left(-\frac{1}{r}\right)$. La fonction $s \mapsto s^m$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, et d'après 1.(a) :

$$P(A_{k,m}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m \leq \exp\left(-\frac{1}{r}\right)^m = \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x, \text{ et } \forall m \geq 1, \forall k \in \{1, \dots, r\}, P(A_{k,m}) \leq \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

(c) On remplace le seuil réel par sa partie entière (car X_r est à valeurs entières), puis on combine 1.(b), 2.(a) et 2.(b).

Comparaison. Comme X_r est à valeurs entières :

- si $X_r > M_r$, alors $X_r \geq M_r + 1 > (1 + \varepsilon)r \ln(r)$;
- si $X_r > (1 + \varepsilon)r \ln(r)$, alors $X_r > M_r$ car $(1 + \varepsilon)r \ln(r) \geq M_r$.

Donc $(X_r > M_r) = (X_r > (1 + \varepsilon)r \ln(r))$.

On a $M_r \geq 1$: en effet $(1 + \varepsilon)r \ln(r) \geq 2 \ln 2 > 1$ pour $r \geq 2$, et M_r est le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel. On peut donc utiliser les événements A_{k,M_r} .

Majoration. D'après 1.(b), 2.(a) puis 2.(b) :

$$P(X_r > M_r) = P\left(\bigcup_{k=1}^r A_{k,M_r}\right) \leq \sum_{k=1}^r P(A_{k,M_r}) \leq r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right).$$

Or $M_r > (1 + \varepsilon)r \ln(r) - 1$, donc $-\frac{M_r}{r} < -(1 + \varepsilon) \ln(r) + \frac{1}{r} \leq -(1 + \varepsilon) \ln(r) + 1$, et par croissance de $\exp$:

$$r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \leq r \cdot e \cdot r^{-(1+\varepsilon)} = \frac{e}{r^\varepsilon}.$$

Conclusion

$(X_r > M_r) = (X_r > (1 + \varepsilon)r \ln(r))$ et $P(X_r > (1 + \varepsilon)r \ln(r)) \leq \frac{e}{r^\varepsilon}$, qui tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$ puisque $\varepsilon > 0$.

3. (a) Il s'agit d'une propriété de limite, puis du même argument de partie entière qu'en 2.(c).

Existence de $r_0(t)$. Comme $\ln(r) + t \rightarrow +\infty$, il existe un entier $r_0(t) \geq 2$ tel que $\ln(r) + t \geq 1$ pour $r \geq r_0(t)$ (par exemple $r_0(t) = \max(2, \lceil e^{1-t} \rceil)$). Pour un tel r , $r \ln(r) + rt = r(\ln(r) + t) \geq r \geq 1$, donc sa partie entière vérifie $m_r \geq 1$.

Égalité. $Z_r > t \iff X_r - r \ln(r) > rt \iff X_r > r \ln(r) + rt$. Comme X_r est à valeurs entières et $m_r \leq r \ln(r) + rt < m_r + 1$, on montre comme en 2.(c) que $(X_r > r \ln(r) + rt) = (X_r > m_r)$.

Conclusion

pour $r \geq r_0(t)$, $m_r \geq 1$ et $P(Z_r > t) = P(X_r > m_r)$.

- (b) On utilise le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 et l'encadrement de m_r .

Si $k = 0$, les deux membres sont nuls. Soit $k \geq 1$ et $r > k$, de sorte que $1 - \frac{k}{r} > 0$.

Développement. Avec $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0 et $x = -\frac{k}{r} \rightarrow 0$:

$$\ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r} + \eta_r, \quad \text{où} \quad \eta_r = -\frac{k^2}{2r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{donc} \quad r^2 \eta_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} -\frac{k^2}{2}.$$

Encadrement de m_r . Posons $\theta_r = r \ln(r) + rt - m_r \in [0, 1[$. Pour $r \geq r_0(t)$, $1 \leq m_r \leq r \ln(r) + r|t|$.

Calcul.

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k m_r}{r} + m_r \eta_r = -k \ln(r) - kt + \frac{k \theta_r}{r} + m_r \eta_r.$$

D'une part $0 \leq \frac{k\theta_r}{r} \leq \frac{k}{r} \rightarrow 0$. D'autre part :

$$|m_r \eta_r| \leq (r \ln(r) + r|t|)|\eta_r| = \frac{\ln(r) + |t|}{r} \cdot r^2 |\eta_r| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \times \frac{k^2}{2} = 0,$$

car $\frac{\ln r}{r} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

Conclusion

$$m_r \ln \left(1 - \frac{k}{r} \right) = -k \ln(r) - kt + o(1) \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

(c) On écrit le coefficient binomial comme produit de k facteurs, puis on passe à l'exponentielle.

Équivalent. Pour $k = 0$, $\binom{r}{0} = 1 = \frac{r^0}{0!}$. Pour $k \geq 1$ et $r \geq k$:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!}, \quad \text{donc} \quad \frac{\binom{r}{k}}{r^k/k!} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{r} \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 1,$$

produit d'un nombre fixe k de facteurs tendant chacun vers 1. Donc $\binom{r}{k} \sim \frac{r^k}{k!}$.

Limite. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $r > k$, $1 - \frac{k}{r} > 0$ et :

$$\binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r} \right)^{m_r} = \binom{r}{k} \exp \left(m_r \ln \left(1 - \frac{k}{r} \right) \right) = \frac{\binom{r}{k}}{r^k} \cdot r^k \exp \left(-k \ln(r) - kt + \delta_r \right),$$

où $\delta_r \rightarrow 0$ d'après 3.(b). Comme $r^k \exp(-k \ln r) = 1$:

$$\binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\binom{r}{k}}{r^k} \exp(-kt) \exp(\delta_r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \exp(-kt) \times e^0,$$

par continuité de $\exp$ en 0.

Conclusion

$$\binom{r}{k} \sim \frac{r^k}{k!} \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

(d) On combine 3.(a), 1.(b) et le résultat admis, puis on reconnaît la série exponentielle.

Pour $r \geq r_0(t)$, $m_r \geq 1$, donc d'après 3.(a) et 1.(b) :

$$P(Z_r > t) = P(X_r > m_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r},$$

le terme $k = r$ étant nul car $m_r \geq 1$.

D'après le résultat admis,

$$P(Z_r > t) \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!}.$$

Avec la série exponentielle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

(convergente pour tout réel x), appliquée à $x = -\exp(-t)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\exp(-t))^k}{k!} = -(\exp(-\exp(-t)) - 1) = 1 - F_Z(t).$$

Donc $P(Z_r \leq t) = 1 - P(Z_r > t) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} F_Z(t).$

Interprétation. Ceci vaut pour tout réel t , et F_Z est continue sur $\mathbb{R}$: la fonction de répartition de Z_r converge vers F_Z en tout point de continuité de F_Z .

Conclusion

$\lim_{r \rightarrow +\infty} P(Z_r \leq t) = F_Z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; la suite $(Z_r)_{r \geq 2}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Gumbel. Autrement dit, X_r s'écarte de $r \ln(r)$ d'un ordre de grandeur r , avec une fluctuation asymptotiquement de loi de Gumbel.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 2.(c) : code adapté en Python (le PDF demandait un programme en Pascal). Le corrigé signale en outre le dépassement de capacité des flottants pour $n = 2010$ et propose un calcul exact en entiers.
- Problème, question I.1.(a) : code adapté en Python (le PDF demandait un programme en Pascal).
- Problème, question I.2.(c) : « pour tout entier k » précisé en « pour tout entier naturel k ». Rectification : pour $k < 0$, l'intégrale diverge au voisinage de $x = 1$ (car $|\ln x|^k \sim |x - 1|^k$), et seuls les moments d'ordre $k \in \mathbb{N}$ interviennent.
- Problème, question II.2.(a) : rectification. Le PDF affirme $Y_i(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, i - 1\}$ pour $i \in \{1, \dots, r - 1\}$, ce qui est faux pour $i = 1$ ($Y_1 = 1$). L'énoncé rectifié donne $Y_1(\Omega) = \{1\}$ et la formule pour $i \in \{2, \dots, r\}$; l'assertion sur $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega)$ est inchangée.

- Problème, question II.2.(b) : rectification. « $\forall k \geq i$ » remplacé par « $\forall k \in Y_i(\Omega)$ », car pour $i = 1$ et $k \geq 2$ la probabilité conditionnelle n'est pas définie.
- Problème, question III.1.(a) : question adaptée pour lever l'ambiguïté de l'événement « k numéros n'ont pas été piochés » (il s'agit de k numéros donnés, soit une intersection de k événements $A_{\ell,m}$) et l'usage double de la lettre k .
- Problème, question III.1.(b) : question adaptée au programme actuel. La formule du crible n'est au programme que pour deux ou trois événements; l'énoncé adapté rappelle la formule générale et indique la méthode par indicatrices, et le corrigé la démontre avec la linéarité de l'espérance.