



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2008

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

1. EXERCICE.

Notations et rappels utilisés dans tout l'exercice. On note $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ la colonne des

coordonnées de u dans $\mathcal{B}$. La base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique, donc pour tous vecteurs v, w de colonnes de coordonnées V, W , on a $\langle v, w \rangle = {}^t V W$. Pour tout sous-espace F de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, et le projecteur orthogonal sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Question 1.

Il s'agit d'identifier l'endomorphisme $p + q$. On utilise la décomposition associée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$.

Comme $u \neq \vec{0}$ (il est unitaire), $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$ est de dimension 1 et $\mathcal{D}^\perp$ est de dimension $3 - 1 = 2$.

On a $\mathcal{D} \subset (\mathcal{D}^\perp)^\perp$: tout vecteur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{D}^\perp$. De plus $\dim(\mathcal{D}^\perp)^\perp = 3 - \dim \mathcal{D}^\perp = 1 = \dim \mathcal{D}$. Donc $(\mathcal{D}^\perp)^\perp = \mathcal{D}$, et q est le projecteur sur $\mathcal{D}^\perp$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Il existe un unique couple $(d, \vec{d}') \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$ tel que $v = d + \vec{d}'$. Par définition, $p(v) = d$ et, d'après ce qui précède, $q(v) = \vec{d}'$. Donc $p(v) + q(v) = v$.

Conclusion

$$p + q = Id.$$

Question 2.

Il faut exprimer $p(v)$, puis calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ et en déduire P et Q .

Méthode 1 — Formule de la projection orthogonale dans une base orthonormale.

Comme $\|u\| = 1$, la famille (u) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$. D'après l'expression du projecteur orthogonal sur un sous-espace dans une base orthonormale de ce sous-espace :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad p(v) = \langle v, u \rangle u.$$

Méthode 2 — Retour à la définition.

Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Comme $p(v) \in \mathcal{D}$, il existe un réel λ tel que $p(v) = \lambda u$. Comme $v - p(v) = q(v) \in \mathcal{D}^\perp$ (question 1), on a $\langle v - \lambda u, u \rangle = 0$, soit $\langle v, u \rangle - \lambda \|u\|^2 = 0$. Comme $\|u\|^2 = 1$, on obtient $\lambda = \langle v, u \rangle$, d'où la même formule.

La méthode 1 applique directement le cours ; la méthode 2 redémontre la formule à partir de la seule définition, ce qui est utile lorsque le vecteur directeur n'est pas unitaire (on obtient alors $\lambda = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}$).

Calcul des images. On a $\langle i, u \rangle = a$, $\langle j, u \rangle = b$, $\langle k, u \rangle = c$. Donc :

$$p(i) = au = a^2i + abj + ack, \quad p(j) = bu = abi + b^2j + bck, \quad p(k) = cu = aci + bcj + c^2k.$$

Les colonnes de P sont les coordonnées de ces trois vecteurs :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = U^t U.$$

D'après la question 1, $q = Id - p$, donc $Q = I_3 - P$. En utilisant $1 - a^2 = b^2 + c^2$, $1 - b^2 = a^2 + c^2$ et $1 - c^2 = a^2 + b^2$:

$$Q = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

$p(v) = \langle v, u \rangle u$, et P, Q sont les matrices ci-dessus.

Question 3.a.

On calcule M^2 coefficient par coefficient et on compare avec Q .

Les lignes de M sont $(0, -c, b)$, $(c, 0, -a)$, $(-b, a, 0)$ et ses colonnes sont $(0, c, -b)$, $(-c, 0, a)$, $(b, -a, 0)$.

Première ligne de M^2 : $0 \cdot 0 + (-c)c + b(-b) = -(b^2 + c^2)$; $0 \cdot (-c) + (-c) \cdot 0 + b \cdot a = ab$;
 $0 \cdot b + (-c)(-a) + b \cdot 0 = ac$.

Deuxième ligne : $c \cdot 0 + 0 \cdot c + (-a)(-b) = ab$; $c(-c) + 0 \cdot 0 + (-a)a = -(a^2 + c^2)$;
 $c \cdot b + 0 \cdot (-a) + (-a) \cdot 0 = bc$.

Troisième ligne : $(-b) \cdot 0 + a \cdot c + 0 \cdot (-b) = ac$; $(-b)(-c) + a \cdot 0 + 0 \cdot a = bc$;
 $(-b)b + a(-a) + 0 \cdot 0 = -(a^2 + b^2)$.

Ainsi :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(b^2 + c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2 + c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2 + b^2) \end{pmatrix}.$$

Conclusion

en comparant avec l'expression de Q obtenue à la question 2, $M^2 = -Q$.

Question 3.b.

On calcule MU , puis on utilise le théorème du rang ; on détermine ensuite le rang exact de f grâce à la question 3.a.

Calcul de $f(u)$:

$$MU = \begin{pmatrix} 0 \cdot a - cb + bc \\ ca + 0 \cdot b - ac \\ -ba + ab + 0 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(u) = \vec{0}$.

Majoration du rang. Comme $u \neq \vec{0}$, on a $\mathcal{D} = \text{Vect}(u) \subset \text{Ker } f$ et $\dim \text{Ker } f \geq 1$. Le théorème du rang donne $\text{rg}(f) = 3 - \dim \text{Ker } f \leq 2$.

Rang exact. La matrice de $f \circ f$ dans $\mathcal{B}$ est $M^2 = -Q$, donc $f \circ f = -q$. Or

$\text{Im}(-q) = \text{Im}(q) = \mathcal{D}^\perp$: en effet q est à valeurs dans $\mathcal{D}^\perp$ et $q(w) = w$ pour tout $w \in \mathcal{D}^\perp$.

Par ailleurs, pour tout v , $f(f(v)) \in \text{Im } f$, donc $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im } f$. Ainsi $\mathcal{D}^\perp \subset \text{Im } f$, d'où $\text{rg}(f) \geq \dim \mathcal{D}^\perp = 2$. Finalement $\text{rg}(f) = 2$.

Noyau. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$. Comme $\mathcal{D} \subset \text{Ker } f$ et $\dim \mathcal{D} = 1$, on obtient $\text{Ker } f = \mathcal{D}$.

Image.

Méthode 1 — Inclusion et dimension. On a montré $\mathcal{D}^\perp \subset \text{Im } f$ et $\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathcal{D}^\perp$, donc $\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp$.

Méthode 2 — Antisymétrie de M . Soit $v \in \mathbb{R}^3$ de colonne V . Comme ${}^tM = -M$ et $MU = 0$:

$$\langle f(v), u \rangle = {}^t(MV)U = {}^tV {}^tMU = -{}^tV MU = 0.$$

Donc $\text{Im } f \subset \mathcal{D}^\perp$, et l'égalité des dimensions (2 et 2) donne $\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp$.

La méthode 1 exploite la relation $M^2 = -Q$; la méthode 2 n'utilise que la structure antisymétrique de M et le vecteur u du noyau : c'est un réflexe utile pour toute matrice antisymétrique.

Conclusion

$$f(u) = \vec{0}, \text{rg}(f) = 2 \leq 2, \text{Ker } f = \mathcal{D} \text{ et } \text{Im } f = \mathcal{D}^\perp.$$

Question 3.c.

Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) \in \mathcal{D} = \text{Ker } f$, donc $f(p(v)) = \vec{0}$. Ainsi $f \circ p = 0$.

Comme f est linéaire et $p + q = \text{Id}$ (question 1) :

$$f = f \circ \text{Id} = f \circ (p + q) = f \circ p + f \circ q = f \circ q.$$

D'après la question 3.b, $q = -f \circ f = -f^2$. Donc $f = f \circ (-f^2) = -f^3$, c'est-à-dire $f + f^3 = 0$.

Conclusion

$$f \circ p = 0 \text{ et le polynôme } X + X^3 \text{ est annulateur de } f.$$

Question 3.d.

On utilise que toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f .

Soit λ une valeur propre réelle de f . Alors $\lambda + \lambda^3 = \lambda(1 + \lambda^2) = 0$. Comme $1 + \lambda^2 \geq 1 > 0$, on a $\lambda = 0$. Réciproquement 0 est valeur propre car $\text{Ker } f = \mathcal{D} \neq \{\vec{0}\}$. Donc le spectre de f est $\{0\}$ et le sous-espace propre associé est $E_0(f) = \text{Ker } f = \mathcal{D}$, de dimension 1.

Méthode 1 — Critère par les dimensions. f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3. Ici cette somme vaut $\dim E_0(f) = 1 \neq 3$: f n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Raisonnement par l'absurde. Si f était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de f serait diagonale, à coefficients diagonaux valeurs propres de f , donc tous nuls : on aurait $f = 0$, ce qui contredit $\text{rg}(f) = 2$.

La méthode 1 est la plus systématique ; la méthode 2 met en évidence le fait général qu'un endomorphisme diagonalisable n'ayant qu'une seule valeur propre λ est égal à λId .

Conclusion

l'unique valeur propre de f est 0 et f n'est pas diagonalisable.

Question 4.a.

On développe le produit de composition, puis on réduit grâce à $f^3 = -f$ et aux formules d'addition.

La composition des endomorphismes est linéaire par rapport à chacun de ses deux arguments (car les endomorphismes considérés sont linéaires), et les puissances de f commutent entre elles. Notons $s = \sin \theta$, $C = 1 - \cos \theta$, $s' = \sin \theta'$, $C' = 1 - \cos \theta'$. Alors :

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = Id + (s + s')f + (C + C' + ss')f^2 + (sC' + s'C)f^3 + CC'f^4.$$

D'après la question 3.c, $f^3 = -f$, d'où $f^4 = f \circ f^3 = -f^2$. Donc :

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = Id + (s + s' - sC' - s'C)f + (C + C' + ss' - CC')f^2.$$

Coefficient de f :

$$s + s' - s(1 - \cos \theta') - s'(1 - \cos \theta) = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' = \sin(\theta + \theta').$$

Coefficient de f^2 : $C + C' - CC' = 1 - (1 - C)(1 - C') = 1 - \cos \theta \cos \theta'$, donc le coefficient vaut $1 - \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = 1 - \cos(\theta + \theta')$.

On a utilisé les formules d'addition $\sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$ et $\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$.

Conclusion

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = Id + \sin(\theta + \theta')f + (1 - \cos(\theta + \theta'))f^2 = g_{\theta + \theta'},$$

soit la forme $g_{\theta''}$ avec $\theta'' = \theta + \theta'$.

Question 4.b.

On a $g_0 = Id + 0 \cdot f + (1 - 1)f^2 = Id$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la question 4.a :

$$g_\theta \circ g_{-\theta} = g_0 = Id \quad \text{et} \quad g_{-\theta} \circ g_\theta = g_0 = Id.$$

Donc g_θ est bijectif, d'inverse $g_{-\theta}$. Comme $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire :

Conclusion

pour tout réel θ , g_θ est inversible et $g_\theta^{-1} = g_{-\theta} = Id - (\sin \theta)f + (1 - \cos \theta)f^2$.

2. EXERCICE.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n(x) = \frac{(n+x) - n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)} \geq 0$.

Question 1.a.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il s'agit d'une série à termes positifs : on la compare à une série de Riemann.

Méthode 1 — Majoration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+x \geq n > 0$, donc

$0 \leq f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{x}{n^2}$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann

convergente ($2 > 1$), donc celle de terme général $\frac{x}{n^2}$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $f_n(x)$ converge.

Méthode 2 — Équivalent. Si $x = 0$, tous les termes sont nuls et la série converge. Si

$x > 0$, $\frac{n+x}{n} \rightarrow 1$, donc $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$; les deux termes généraux sont positifs et la série de Riemann de terme général $\frac{x}{n^2}$ converge, donc la série de terme général $f_n(x)$ converge par équivalence.

La majoration traite tous les x d'un coup ; l'équivalent est plus rapide à trouver mais impose de traiter à part le cas où le terme équivalent est nul.

Conclusion

pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f_n(x)$ converge, et $F(x)$ est bien défini.

Question 1.b.

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$ pour tout n , donc $F(0) = 0$.

Pour $x = 1$: $f_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ est un terme télescopique. Pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N f_n(1) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$$F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1.$$

Question 2.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$. On a

$0 < f'_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ car $n+x \geq n > 0$. La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $f'_n(x)$ converge.

Conclusion

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

est bien défini pour tout $x \geq 0$.

Question 3.a.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à φ entre x_0 et x .

La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$.

Soit $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$. Le segment d'extrémités x_0 et x est inclus dans $[n, +\infty[$, sur lequel $|\varphi''(t)| = \frac{2}{t^3} \leq \frac{2}{n^3}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (fonction de classe C^2 sur un intervalle contenant x_0 et x , avec $|\varphi''| \leq M_2$ sur ce segment) donne :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{M_2 (x - x_0)^2}{2!} \quad \text{avec} \quad M_2 = \frac{2}{n^3}.$$

Conclusion

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

Question 3.b.

On exprime le terme général à l'aide de φ pour appliquer la question 3.a.

Soit $x \geq 0$ et $h \neq 0$ tels que $x + h \geq 0$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(t) = \frac{1}{n} - \varphi(n + t)$ et $f'_n(x) = \frac{1}{(n + x)^2} = -\varphi'(n + x)$. Donc :

$$f_n(x + h) - f_n(x) - hf'_n(x) = -[\varphi(n + x + h) - \varphi(n + x) - h\varphi'(n + x)].$$

Les réels $X = n + x + h$ et $X_0 = n + x$ appartiennent à $[n, +\infty[$ et $X - X_0 = h$. La question 3.a donne :

$$0 \leq |f_n(x + h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}.$$

La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge ($3 > 1$), donc celle de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ aussi.

Conclusion

par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$ converge.

Question 3.c.

Les séries de termes généraux $f_n(x + h)$, $f_n(x)$ et $f'_n(x)$ convergent (questions 1.a et 2, avec $x + h \geq 0$). Par linéarité de la somme des séries convergentes :

$$F(x+h) - F(x) - hG(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \quad \text{où} \quad w_n = f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x).$$

La série de terme général w_n est absolument convergente (question 3.b). Pour tout N , l'inégalité triangulaire donne

$$\left| \sum_{n=1}^N w_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |w_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |w_n|;$$

par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$:

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |w_n| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Posons

$$K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},$$

réel qui ne dépend ni de x ni de h . En divisant par $|h| > 0$:

Conclusion

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h| \text{ pour tous } x \geq 0, h \neq 0 \text{ avec } x+h \geq 0.$$

Question 3.d.

Soit $x \geq 0$. Lorsque h tend vers 0 (avec $h \neq 0$ et $x+h \geq 0$, c'est-à-dire $h > 0$ si $x = 0$), on a $K|h| \rightarrow 0$, donc, par encadrement, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \rightarrow G(x)$.

Conclusion

F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable à droite en 0, c'est-à-dire dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et $F' = G$.

Question 4.a.

On compare l'intégrande à ses valeurs aux bornes en étudiant sa monotonie.

Soit $x \geq 0$. Posons, pour $t > 0$, $\psi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leq 0 \quad \text{car} \quad t+x \geq t > 0.$$

Donc ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$: $\psi(k+1) \leq \psi(t) \leq \psi(k)$.

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[k, k+1]$, de longueur 1 :

$$\psi(k+1) \leq \int_k^{k+1} \psi(t) dt \leq \psi(k).$$

Conclusion

comme $\psi(k) = f_k(x)$ et $\psi(k+1) = f_{k+1}(x)$, on obtient l'encadrement demandé.

Question 4.b.

Soit $n \geq 2$. On somme les deux inégalités de la question 4.a et on utilise la relation de Chasles.

Minoration : en sommant l'inégalité de droite pour k de 1 à n :

$$\int_1^{n+1} \psi(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \psi(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Majoration : en sommant l'inégalité de gauche pour k de 1 à $n-1$ (somme non vide car $n \geq 2$) :

$$\sum_{k=2}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leq \int_1^n \psi(t) dt.$$

On ajoute $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}.$

Conclusion

$$\int_1^{n+1} \psi(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \psi(t) dt.$$

Question 4.c.

On calcule explicitement les intégrales, puis on passe à la limite dans l'encadrement de la question 4.b.

Pour $A \geq 1$:

$$\int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \left[\ln t - \ln(t+x) \right]_1^A = \ln \left(\frac{A}{A+x} \right) + \ln(1+x).$$

Comme $\frac{A}{A+x} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$ et que $\ln$ est continue en 1, cette intégrale tend vers $\ln(1+x)$. En particulier les intégrales de 1 à $n+1$ et de 1 à n tendent vers $\ln(1+x)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par ailleurs

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow F(x)$$

(question 1.a). Le passage à la limite dans les inégalités larges de la question 4.b donne :

Conclusion

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

Question 4.d.

On encadre $\frac{F(x)}{\ln(1+x)}$ puis on compare $\ln(1+x)$ à $\ln x$.

Pour $x > 0$, $\ln(1+x) > 0$; en divisant l'encadrement de la question 4.c :

$$1 \leq \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leq 1 + \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x}{x+1} \rightarrow 1$ et $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$, donc le majorant tend vers 1. Par encadrement, $\frac{F(x)}{\ln(1+x)} \rightarrow 1$, soit $F(x) \sim \ln(1+x)$.

De plus, pour $x > 1$, $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, donc

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \rightarrow 1, \text{ soit } \ln(1+x) \sim \ln x. \text{ Par produit,}$$

$$\frac{F(x)}{\ln x} = \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \rightarrow 1.$$

Conclusion

$$F(x) \sim \ln x \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

3. PROBLÈME.

Remarques préliminaires. La fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée : il existe $m_g \geq 0$ tel que $|g(t)| \leq m_g$ pour tout $t \in [0, 1]$. Toutes les variables considérées dans le problème sont à valeurs dans $[0, 1]$ (quitte à négliger un événement de probabilité nulle), donc toute variable de la forme $g(X)$ avec X à valeurs dans $[0, 1]$ est bornée par m_g et admet une espérance et une variance. Pour appliquer le résultat admis sur l'indépendance, on prolonge au besoin g en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (par exemple $g(t) = g(0)$ si $t < 0$ et $g(t) = g(1)$ si $t > 1$), ce qui ne change aucune des variables étudiées.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

Question 3.1.1.a.

La loi uniforme sur $[0, 1]$ admet pour densité la fonction f_U définie par $f_U(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$ et $f_U(t) = 0$ sinon.

Question 3.1.1.b.

On applique le théorème de transfert pour une variable à densité.

$g(U)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| f_U(t) dt = \int_0^1 |g(t)| dt$ converge. C'est le cas car $|g|$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Le théorème de transfert donne alors :

$$E(g(U)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_U(t) dt = \int_0^1 g(t) dt = J.$$

Conclusion

$g(U)$ admet une espérance et $E(g(U)) = J$.

Question 3.1.2.a.

Les variables $g(U_1), \dots, g(U_n)$ sont mutuellement indépendantes pour tout n (résultat admis en préambule, appliqué aux variables à densité $U_1, \dots, U_n$ et aux fonctions $f_i = g$). Elles ont toutes la loi de $g(U)$, puisque U_i a la loi de U . Elles admettent une espérance J et une variance σ^2 (remarques préliminaires et question 3.1.1.b).

Méthode 1 — Loi faible des grands nombres. Pour une suite de variables indépendantes de même loi admettant une variance, la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance commune. Donc $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers J .

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par linéarité, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = J$. Par indépendance,

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(g(U_i)) = n\sigma^2,$$

donc $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La méthode 1 cite le théorème ; la méthode 2 le redémontre dans ce cas et fournit en plus une majoration explicite de la probabilité d'erreur, utile pour choisir n .

Conclusion

$\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers J .

Question 3.1.2.b.i.

On applique le théorème limite central aux variables $g(U_i)$, indépendantes, de même loi, d'espérance J et de variance σ^2 finie et strictement positive (car $\sigma^2 \geq 0$ et $\sigma^2 \neq 0$). Le théorème limite central affirme que $\frac{S_n - nJ}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Or :

$$\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{S_n - nJ}{n} = \frac{S_n - nJ}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Conclusion

la suite étudiée converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite. Ici σ est une constante fixée : aucune constante n'est remplacée par un estimateur.

Question 3.1.2.b.ii.

Notons

$$Z_n = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Avec l'approximation $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et la parité de la densité de la loi normale centrée réduite, qui donne $\Phi(-1,96) = 1 - \Phi(1,96)$:

$$P(-1,96 \leq Z_n \leq 1,96) = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) = 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95.$$

Or, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ étant strictement positif :

$$-1,96 \leq Z_n \leq 1,96 \iff \frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Conclusion

un intervalle de confiance pour J au niveau 95 % est :

$$\left[\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \quad \text{de longueur } \ell_n = 3,92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Remarques. Sans l'approximation, la convergence en loi de la question précédente donne, aux points $\pm 1,96$ où Φ est continue, $P(-1,96 \leq Z_n \leq 1,96) \rightarrow 0,95$: il s'agit d'un intervalle de confiance asymptotique. L'intervalle fait intervenir σ , supposé connu. Si l'on ne connaît qu'un majorant $\sigma_0 \geq \sigma$, l'intervalle obtenu en remplaçant σ par σ_0 contient le précédent et a donc un niveau au moins égal (approximativement) à 95 %.

Question 3.1.3.a.

On effectue le changement de variable indiqué, puis on calcule l'intégrale de $\cos^2$.

La fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\sin 0 = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. La fonction $t \mapsto 4\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Le changement de variable $t = \sin u$, $dt = \cos u \, du$, donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 4\sqrt{1-t^2} \, dt &= \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{1-\sin^2 u} \cos u \, du = \int_0^{\pi/2} 4|\cos u| \cos u \, du \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du, \end{aligned}$$

car $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\cos u \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Notons $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du$.

Méthode 1 — Linéarisation. La formule d'addition donne

$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1$, donc $\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$ et :

$$I = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 2 — Symétrie. Posons $K = \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du$. **On a** $I + K = \int_0^{\pi/2} 1 \, du = \frac{\pi}{2}$.

Le changement de variable affine $v = \frac{\pi}{2} - u$ **et la relation** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$

(formule d'addition) donnent $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 v \, dv = K$. **Donc** $I = \frac{\pi}{4}$.

La méthode 1 donne une primitive et s'adapte à d'autres bornes ; la méthode 2 évite tout calcul de primitive mais ne fonctionne que grâce à la symétrie de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conclusion

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Question 3.1.3.b.i.

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel (langage Pascal remplacé par Python).

Python

```
import numpy as np

def G(t):
    return 4 * np.sqrt(1 - t**2)
```

La fonction G reçoit un réel t de $[0, 1]$ et renvoie $4\sqrt{1-t^2}$. Elle fonctionne aussi lorsque t est un tableau numpy : le calcul est alors fait coefficient par coefficient.

Question 3.1.3.b.ii.

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel (langage Pascal remplacé par Python).

Principe. On choisit $g(t) = 4\sqrt{1-t^2}$, continue sur $[0, 1]$, de sorte que $J = \pi$ (question 3.1.3.a). D'après la question 3.1.2.a,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(U_i)$$

converge en probabilité vers π : pour n grand, une réalisation de $\frac{S_n}{n}$ est une valeur approchée de π . Dans le programme, chaque appel `rd.random()` fournit une réalisation de U_i ; la variable J accumule la somme des $G(U_i)$, puis on divise par n .

Programme complété :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def G(t):
    return 4 * np.sqrt(1 - t**2)

n = 100000
J = 0
for i in range(1, n + 1):
    J = J + G(rd.random())
J = J / n
print('une valeur approchée de pi est', J)
```

La boucle `for i in range(1, n + 1)` effectue exactement n passages (i prend les valeurs $1, \dots, n$, la borne $n+1$ étant exclue). Les lignes complétées sont `J = J + G(rd.random())` dans la boucle et `J = J / n` après la boucle. La ligne `n = 100000` ne sert qu'à l'exécution du test : dans le sujet, n est supposé déjà défini.

Code exécuté : avec $n = 100000$, une exécution a affiché une valeur approchée de π égale à 3,1426 environ. Ce résultat numérique illustre la convergence mais ne constitue pas une preuve ; l'écart avec π est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, conformément à la question 3.1.2.b.

Variante vectorisée, également exécutée (résultat obtenu : 3,1411 environ), qui remplace la boucle :

Python

```
J = np.mean(G(rd.random(n)))
```

Ici `rd.random(n)` renvoie un tableau de n réalisations indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$, G est appliquée coefficient par coefficient et `np.mean` calcule la moyenne.

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

Question 3.2.1.

Méthode 1 — Fonction de répartition. Pour tout réel x ,

$P(1 - U \leq x) = P(U \geq 1 - x) = 1 - P(U < 1 - x) = 1 - F_U(1 - x)$, car U est à densité, donc $P(U = 1 - x) = 0$. On en déduit : si $x < 0$, $1 - x > 1$ et $F_U(1 - x) = 1$, d'où $P(1 - U \leq x) = 0$; si $0 \leq x \leq 1$, $F_U(1 - x) = 1 - x$, d'où $P(1 - U \leq x) = x$; si $x > 1$, $1 - x < 0$ et $P(1 - U \leq x) = 1$. C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Méthode 2 — Transformation affine. Si X a pour densité f_X et $\alpha \neq 0$, alors $\alpha X + \beta$ a pour densité $x \mapsto \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$. Avec $\alpha = -1$, $\beta = 1$: $1 - U$ a pour densité $x \mapsto f_U(1 - x)$, qui vaut 1 si $0 \leq 1 - x \leq 1$, c'est-à-dire si $x \in [0, 1]$, et 0 sinon.

La méthode 1 est la méthode générale de calcul de loi d'une transformée ; la méthode 2 est un raccourci propre aux transformations affines.

Conclusion

$1 - U$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Espérance de Y . Comme $1 - U$ a la même loi que U , $g(1 - U)$ a la même loi que $g(U)$, donc admet une espérance égale à J (question 3.1.1.b). Par linéarité :

$$E(Y) = \frac{1}{2} [E(g(U)) + E(g(1 - U))] = \frac{1}{2} (J + J) = J.$$

Conclusion

$E(Y) = J$.

Question 3.2.2.a.

Soit $(u, w) \in [0, 1]^2$; alors $1 - u$ et $1 - w$ appartiennent aussi à $[0, 1]$. On distingue deux cas, g étant strictement croissante.

Si $u \geq w : g(u) - g(w) \geq 0$; et $1 - u \leq 1 - w$ donne $g(1 - u) - g(1 - w) \leq 0$.

Si $u < w : g(u) - g(w) < 0$; et $1 - u > 1 - w$ donne $g(1 - u) - g(1 - w) > 0$.

Dans les deux cas, les deux facteurs sont de signes contraires (au sens large).

Conclusion

$$(g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.$$

Question 3.2.2.b.

Signe. La variable $D = (g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))$ est négative d'après la question 3.2.2.a, puisque (U, W) prend ses valeurs dans $[0, 1]^2$. Elle est bornée, donc admet une espérance, et par positivité de l'espérance :

$$E(D) \leq 0.$$

Développement. Par linéarité :

$$E(D) = E[g(U)g(1 - U)] - E[g(U)g(1 - W)] - E[g(W)g(1 - U)] + E[g(W)g(1 - W)].$$

Les variables U et W sont à densité et indépendantes; d'après le résultat admis en préambule, $g(U)$ et $g(1 - W)$ sont indépendantes (fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto g(1 - t)$), de même que $g(W)$ et $g(1 - U)$. Ces variables admettent une espérance, donc l'espérance du produit est le produit des espérances. Comme $1 - W$ et $1 - U$ suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ (question 3.2.1) et W a la loi de U , chacune de ces quatre variables a pour espérance J :

$$E[g(U)g(1 - W)] = J^2 \quad \text{et} \quad E[g(W)g(1 - U)] = J^2.$$

Par ailleurs, $g(W)g(1 - W) = h(W)$ et $g(U)g(1 - U) = h(U)$ avec $h(t) = g(t)g(1 - t)$;

comme W et U ont même loi, ces deux variables ont même loi et donc même espérance. Ainsi :

$$E(D) = 2E[g(U)g(1-U)] - 2J^2 \leq 0.$$

Conclusion

$$E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))] \leq 0, \text{ puis } E[g(U)g(1-U)] \leq J^2 = (E[g(U)])^2.$$

Remarque sur le résultat admis : si g est strictement décroissante, le raisonnement de la question 3.2.2.a s'applique à l'identique (les deux facteurs restent de signes contraires), donc la même conclusion vaut.

Question 3.2.2.c.

On suppose g strictement monotone, de sorte que $E[g(U)g(1-U)] \leq J^2$ (question 3.2.2.b et résultat admis). On note $\sigma^2 = V(g(U))$. Toutes les variables sont bornées, donc admettent une variance.

Méthode 1 — Variance d'une somme et covariance.

$$V(Y) = \frac{1}{4}V(g(U) + g(1-U)) = \frac{1}{4}[V(g(U)) + V(g(1-U)) + 2 \text{Cov}(g(U), g(1-U))].$$

Comme $g(1-U)$ a la loi de $g(U)$, $V(g(1-U)) = \sigma^2$. Par la formule de Huygens pour la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(g(U), g(1-U)) &= E[g(U)g(1-U)] - E[g(U)]E[g(1-U)] = E[g(U)g(1-U)] \\ &\quad - J^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $V(Y) \leq \frac{1}{4} \cdot 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}.$

Méthode 2 — Formule de Koenig-Huygens directe.

$$Y^2 = \frac{1}{4} [g(U)^2 + g(1-U)^2 + 2g(U)g(1-U)].$$

Comme $g(1-U)^2$ a la loi de $g(U)^2$,

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}E(g(U)^2) + \frac{1}{2}E[g(U)g(1-U)] \leq \frac{1}{2}E(g(U)^2) + \frac{1}{2}J^2.$$

Avec $E(Y) = J$:

$$V(Y) = E(Y^2) - J^2 \leq \frac{1}{2}(E(g(U)^2) - J^2) = \frac{1}{2}V(g(U)).$$

La méthode 1 met en évidence le mécanisme de réduction : la covariance négative entre $g(U)$ et $g(1-U)$; la méthode 2 est un calcul direct qui n'utilise que la formule de Koenig-Huygens.

Conclusion

lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \frac{1}{2}V(g(U)).$

Question 3.2.3.

On suppose g strictement monotone et on reprend l'hypothèse $\sigma^2 \neq 0$ de la partie 3.1.

On note $\tau^2 = V(Y)$, de sorte que $0 \leq \tau^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}.$

Construction. On effectue N tirages : $U_1, \dots, U_N$ indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$,

et on pose, pour $k \in \{1, \dots, N\}$, $Y_k = \frac{1}{2} [g(U_k) + g(1 - U_k)]$ et

$$T_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k.$$

D'après le résultat admis en préambule (fonction $t \mapsto \frac{1}{2} [g(t) + g(1 - t)]$), les Y_k sont indépendantes; elles ont la loi de Y , donc pour espérance J et pour variance τ^2 .

Cas $\tau^2 > 0$. Le théorème limite central s'applique aux Y_k : $\frac{T_N - J}{\tau/\sqrt{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Avec la même approximation qu'en 3.1.2.b.ii, $\left[T_N - 1,96 \frac{\tau}{\sqrt{N}} ; T_N + 1,96 \frac{\tau}{\sqrt{N}} \right]$ est un intervalle de confiance de niveau 95 %. Comme τ est en général inconnu, on utilise le majorant $\tau \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$: l'intervalle

$$I'_N = \left[T_N - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} ; T_N + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \right]$$

contient le précédent, donc $P(J \in I'_N) \geq P\left(J \in \left[T_N \pm 1,96 \frac{\tau}{\sqrt{N}} \right]\right) \approx 0,95$. C'est un intervalle de confiance de niveau au moins 95 % (approximativement), exprimé, comme dans la partie 3.1, à l'aide de σ .

Cas $\tau^2 = 0$ (par exemple $g(t) = t$, pour laquelle $Y = \frac{1}{2}$). Pour tout entier $m \geq 1$,

l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P\left(|Y - J| \geq \frac{1}{m}\right) \leq m^2 \tau^2 = 0$. Les

événements $\left[|Y - J| \geq \frac{1}{m}\right]$ croissent et leur réunion est $[Y \neq J]$; par continuité monotone, $P(Y \neq J) = 0$. Ainsi chaque Y_k vaut J presque sûrement, donc $T_N = J$ presque sûrement et $P(J \in I'_N) = 1 \geq 0,95$.

Conclusion sur l'intervalle : dans tous les cas, I'_N est un intervalle de confiance pour J au niveau 95 % basé sur la méthode antithétique.

Nombre de tirages. La longueur de I'_N est $3,92 \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$, et celle de l'intervalle de la partie

3.1 est $\ell_n = 3,92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. On a :

$$3,92 \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \leq \ell_n \iff 2N \geq n \iff N \geq \frac{n}{2}.$$

Conclusion

$N = \frac{n}{2}$ tirages de la variable uniforme suffisent (si n est impair, $N = \frac{n+1}{2}$ donne une longueur au plus égale à ℓ_n). Chaque tirage U_k est utilisé deux fois, via U_k et $1 - U_k$: la méthode divise par deux le nombre de tirages aléatoires pour la même précision. Si τ était connu exactement, il suffirait même de $N = \frac{n\tau^2}{\sigma^2} \leq \frac{n}{2}$ tirages.

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Étude d'une fonction de plusieurs variables.

Question 3.3.1.1.

L'ensemble $\Omega_0 =]0, +\infty[^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Chacune des fonctions $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{4x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{9x_3}$ est l'inverse d'une fonction polynomiale ne s'annulant pas sur Ω_0 , donc de classe C^2 sur Ω_0 . Par somme, f est de classe C^2 sur Ω_0 .

Dérivées partielles d'ordre 1 : pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0$,

$$\partial_1 f(x) = -\frac{1}{4x_1^2}, \quad \partial_2 f(x) = -\frac{1}{x_2^2}, \quad \partial_3 f(x) = -\frac{1}{9x_3^2}.$$

Dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\partial_{1,1}^2 f(x) = \frac{1}{2x_1^3}, \quad \partial_{2,2}^2 f(x) = \frac{2}{x_2^3}, \quad \partial_{3,3}^2 f(x) = \frac{2}{9x_3^3},$$

et toutes les dérivées mixtes sont nulles : $\partial_{i,j}^2 f(x) = 0$ pour $i \neq j$, car $\partial_i f$ ne dépend que de x_i .

Question 3.3.1.2.

D'après la question précédente, la hessienne en $A = (a_1, a_2, a_3) \in \Omega_0$ est diagonale :

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}.$$

Pour $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ non nulle :

$${}^t H \nabla^2 f(A) H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3}.$$

Chaque terme est positif car $a_1, a_2, a_3 > 0$, et au moins un h_i est non nul, donc au moins un terme est strictement positif.

Conclusion

${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0$. De manière équivalente, les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$, qui sont ses coefficients diagonaux, sont toutes strictement positives.

Question 3.3.1.3.

Méthode 1 — Condition nécessaire du premier ordre. Ω_0 est un ouvert et f y est de classe C^1 . Si f admettait un extremum (local ou global) en un point x de Ω_0 , ce point serait critique : $\nabla f(x) = 0$. Or $\partial_1 f(x) = -\frac{1}{4x_1^2} < 0$ pour tout $x \in \Omega_0$. Il n'y a donc aucun point critique.

Méthode 2 — Étude directe. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Les points $x^+ = ((1 + \varepsilon)x_1, x_2, x_3)$ et $x^- = ((1 - \varepsilon)x_1, x_2, x_3)$ appartiennent à Ω_0 , sont aussi proches de x que l'on veut lorsque ε est petit, et vérifient $f(x^+) < f(x) < f(x^-)$ car $t \mapsto \frac{1}{4t}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi f n'admet en x ni maximum ni minimum, même local.

La méthode 1 est la démarche standard sur un ouvert; la méthode 2 la confirme en exhibant explicitement des points de valeur plus grande et plus petite.

Conclusion

f n'admet aucun extremum sur $]0, +\infty[^3$. La positivité de la hessienne établie en 3.3.1.2 ne change rien, faute de point critique.

Question 3.3.1.4.

Question adaptée au programme actuel : l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables est remplacée par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la restriction ϕ de f au segment $[A, X]$.

Recherche du point critique sous contrainte. La contrainte est linéaire :

$c(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 110$, avec $\nabla c(x) = (1, 1, 1)$. Un point critique de f sous cette contrainte est un point $x \in \Omega_0$ vérifiant la contrainte et tel que $\nabla f(x) \in \text{Vect}((1, 1, 1))$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\partial_1 f(x) = \partial_2 f(x) = \partial_3 f(x) = \lambda$. Cela s'écrit :

$$\frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{9x_3^2} \iff 4x_1^2 = x_2^2 = 9x_3^2 \iff 2x_1 = x_2 = 3x_3,$$

la dernière équivalence venant de la positivité de x_1, x_2, x_3 . En posant $x_2 = t > 0$, on obtient $x_1 = \frac{t}{2}$, $x_3 = \frac{t}{3}$, et la contrainte donne $t \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{11t}{6} = 110$, soit $t = 60$. Réciproquement, $(30, 60, 20)$ appartient à Ω_0 , vérifie la contrainte, et $\nabla f(30, 60, 20) = \left(-\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600} \right)$ est colinéaire à $(1, 1, 1)$.

Conclusion partielle : l'unique point critique sous contrainte est $A = (30, 60, 20)$, et $f(A) = \frac{1}{120} + \frac{1}{60} + \frac{1}{180} = \frac{3+6+2}{360} = \frac{11}{360}$.

Minimum global sous contrainte.

Méthode 1 — Formule de Taylor avec reste intégral (méthode demandée). Soit

$X = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0$ vérifiant la contrainte, et $K = X - A = (k_1, k_2, k_3)$, de sorte que $k_1 + k_2 + k_3 = 110 - 110 = 0$. Pour $t \in [0, 1]$, chaque coordonnée $a_i + tk_i = (1 - t)a_i + tx_i$ est strictement positive : $A + tK \in \Omega_0$ (convexité de Ω_0). La fonction $\phi : t \mapsto f(A + tK)$ s'écrit explicitement :

$$\phi(t) = \frac{1}{4(30 + tk_1)} + \frac{1}{60 + tk_2} + \frac{1}{9(20 + tk_3)}.$$

Elle est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et :

$$\phi'(t) = -\frac{k_1}{4(30 + tk_1)^2} - \frac{k_2}{(60 + tk_2)^2} - \frac{k_3}{9(20 + tk_3)^2} = \sum_{i=1}^3 \partial_i f(A + tK) k_i,$$

$$\phi''(t) = \frac{k_1^2}{2(30 + tk_1)^3} + \frac{2k_2^2}{(60 + tk_2)^3} + \frac{2k_3^2}{9(20 + tk_3)^3} = {}^tK \nabla^2 f(A + tK) K.$$

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 sur $[0, 1]$ donne :

$$f(X) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \int_0^1 (1 - t)\phi''(t) dt.$$

On a $\phi(0) = f(A)$ et $\phi'(0) = -\frac{1}{3600}(k_1 + k_2 + k_3) = 0$. Si $X \neq A$, alors $K \neq 0$ et, d'après la question 3.3.1.2, $\phi''(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; la fonction $t \mapsto (1 - t)\phi''(t)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$ (elle est strictement positive sur $[0, 1[$), donc son intégrale est strictement positive. Ainsi $f(X) > f(A)$.

Méthode 2 — Inégalité des tangentes pour des fonctions convexes d'une variable.

Pour $\alpha > 0$, la fonction $\chi : t \mapsto \frac{\alpha}{t}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ (car $\chi''(t) = \frac{2\alpha}{t^3} > 0$), donc son graphe est au-dessus de ses tangentes : pour tous $s, t > 0$,

$\chi(s) \geq \chi(t) + \chi'(t)(s - t)$. En appliquant cette inégalité à chacun des trois termes de f en $a_1 = 30, a_2 = 60, a_3 = 20$, puis en sommant :

$$f(X) \geq f(A) + \sum_{i=1}^3 \partial_i f(A)(x_i - a_i) = f(A) - \frac{1}{3600} \sum_{i=1}^3 (x_i - a_i) = f(A).$$

La méthode 1 suit l'approche générale du programme de deuxième année (restriction à un segment et signe de la hessienne) ; la méthode 2 exploite la forme séparée de f et n'utilise que la convexité en une variable de première année.

Conclusion

f admet en $A = (30, 60, 20)$ un minimum global sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ (strict d'après la méthode 1), égal à $\frac{11}{360}$.

3.3.2. Méthode de stratification.

Question 3.3.2.1.

Formule des probabilités totales. La variable T est à valeurs dans $[0, 1] = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ (réunion disjointe), donc $([T \in I_1], [T \in I_2], [T \in I_3])$ est un système complet d'événements, de probabilités $a, b - a$ et $1 - b$, toutes non nulles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Sur l'événement $[T \in I_k]$, on a $\tilde{U} = U_k$, donc $[g(\tilde{U}) \leq x] \cap [T \in I_k] = [g(U_k) \leq x] \cap [T \in I_k]$. Les variables U_k et T sont à densité et indépendantes, donc, d'après le résultat admis en préambule, $g(U_k)$ et $\mathbf{1}_{I_k}(T)$ sont indépendantes ; les événements $[g(U_k) \leq x]$ et $[T \in I_k] = [\mathbf{1}_{I_k}(T) = 1]$ sont donc indépendants. Ainsi :

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = \sum_{k=1}^3 P([g(U_k) \leq x] \cap [T \in I_k]) = \sum_{k=1}^3 P(T \in I_k) P(g(U_k) \leq x),$$

ce qui est la formule demandée.

Densité. Notons F_k la fonction de répartition de $g(U_k)$ et $f_{g(U_k)}$ une densité. Par hypothèse, chaque F_k est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, avec $F'_k = f_{g(U_k)}$ là où F_k est de classe C^1 . La fonction de répartition $F = aF_1 + (b-a)F_2 + (1-b)F_3$ de $g(\widetilde{U})$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points (la réunion des trois ensembles finis d'exceptions). Ainsi $g(\widetilde{U})$ est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant F là où c'est possible :

$$f_{g(\widetilde{U})} = a f_{g(U_1)} + (b-a) f_{g(U_2)} + (1-b) f_{g(U_3)}.$$

Vérification avec $g = Id$. Alors $g(U_k) = U_k$ a pour densité $\frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a[}$, $\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b[}$ et $\frac{1}{1-b}\mathbf{1}_{[b,1]}$ pour $k = 1, 2, 3$. Donc :

$$f_{\widetilde{U}} = a \cdot \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a[} + (b-a) \cdot \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b[} + (1-b) \cdot \frac{1}{1-b}\mathbf{1}_{[b,1]} = \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

Conclusion

$\widetilde{U}$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Cette loi ne dépend pas de g ; il en découle, d'après la question 3.1.1.b, que $E(g(\widetilde{U})) = J$ pour toute fonction g continue sur $[0, 1]$.

Question 3.3.2.2.

Les variables $g(\widetilde{U})$, $g(U_1)$, $g(U_2)$, $g(U_3)$ sont bornées par m_g : elles admettent une espérance.

Méthode 1 — Par la densité. D'après le théorème du cours sur l'espérance d'une variable à densité, $E(g(U_k)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_k)}(t) dt$, intégrale absolument convergente. Par linéarité des intégrales convergentes et d'après la question 3.3.2.1 :

$$E(g(\tilde{U})) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t) dt = a E(g(U_1)) + (b - a) E(g(U_2)) + (1 - b) E(g(U_3)).$$

Méthode 2 — Par les indicatrices. On a

$$g(\tilde{U}) = \sum_{k=1}^3 g(U_k) \mathbf{1}_{[T \in I_k]},$$

car pour chaque ω exactement une des trois indicatrices vaut 1. Pour chaque k , $g(U_k)$ et $\mathbf{1}_{I_k}(T)$ sont indépendantes (résultat admis) et admettent une espérance, donc $E(g(U_k) \mathbf{1}_{[T \in I_k]}) = E(g(U_k)) P(T \in I_k)$. Par linéarité, on retrouve la même formule.

La méthode 1 exploite le résultat de la question précédente, comme le demande l'énoncé; la méthode 2 n'a pas besoin de l'existence de densités et s'applique donc à toute fonction g continue.

Conclusion

$$E(g(\tilde{U})) = a E(g(U_1)) + (b - a) E(g(U_2)) + (1 - b) E(g(U_3)).$$

Question 3.3.2.3.

Les $n_1 + n_2 + n_3$ variables $U_{\ell,i}$ sont à densité et mutuellement indépendantes, donc, d'après le résultat admis, les variables $g(U_{\ell,i})$ sont mutuellement indépendantes. Elles sont bornées, donc admettent une variance, et $g(U_{\ell,i})$ a la loi de $g(U_\ell)$. La variance d'une somme de variables mutuellement indépendantes est la somme des variances, et $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$. Donc :

$$V(Z) = \frac{a^2}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + \frac{(b-a)^2}{n_2^2} \sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + \frac{(1-b)^2}{n_3^2} \sum_{k=1}^{n_3} V(g(U_{3,k})).$$

Chaque somme compte n_ℓ termes égaux à $V(g(U_\ell))$.

Conclusion

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).$$

Remarque utile pour la suite : par linéarité,

$$E(Z) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)) = E(g(\tilde{U})) = J$$

(questions 3.3.2.1 et 3.3.2.2) : Z est un estimateur sans biais de J .

Question 3.3.2.4.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original demandait que « $E(Z)$ » fournisse une estimation de J ; or $E(Z) = J$ est une constante, et c'est Z qui estime J . L'énoncé est rectifié en ce sens et précise que le risque d'erreur est mesuré par $V(Z)$.

Avec les données, la question 3.3.2.3 donne :

$$V(Z) = \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3} = f(n_1, n_2, n_3).$$

Il s'agit de minimiser $f(n_1, n_2, n_3)$ sur les triplets d'entiers naturels non nuls vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 110$. Ces triplets appartiennent à $]0, +\infty[^3$ et vérifient la contrainte de la question 3.3.1.4 ; d'après cette question, $f(n_1, n_2, n_3) \geq f(30, 60, 20)$, avec égalité seulement pour $(30, 60, 20)$. Ce triplet est formé d'entiers non nuls de somme 110 : il est admissible, donc c'est l'unique minimiseur parmi les triplets d'entiers.

Interprétation. Z est sans biais ($E(Z) = J$) et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

donne, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Z - J| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z)}{\varepsilon^2}$: minimiser $V(Z)$ minimise cette majoration du risque d'erreur.

Conclusion

il faut choisir $n_1 = 30, n_2 = 60, n_3 = 20$, ce qui donne $V(Z) = \frac{11}{360} \approx 0,0306$.

Relevé des adaptations

- Problème, questions 3.1.3.b.i et 3.1.3.b.ii : Code adapté en Python. Le langage Pascal est remplacé par Python ; la fonction random de Pascal est remplacée par `rd.random()` de `numpy.random`, dont la syntaxe et le rôle sont rappelés dans le sujet ; les instructions `randomize` et `readln(n)` sont supprimées, l'entier `n` étant supposé déjà défini ; le squelette à compléter est conservé avec ses blancs.
Justification : seul Python est autorisé.
- Problème, question 3.3.1.4 : « En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 » est remplacé par l'application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à la fonction $\phi : t \mapsto f(A + t(X - A))$; le point critique est nommé A . Justification : l'égalité de Taylor-Lagrange, en une ou plusieurs variables, ne figure pas au référentiel, contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral et à la dérivation le long d'un segment.
- Problème, question 3.3.2.4 : rectification de l'énoncé, « pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J » devient « pour que Z , dont l'espérance vaut J , fournisse une estimation de J », avec la précision que le risque d'erreur est mesuré par $V(Z)$.
Justification : $E(Z)$ est une constante égale à J ; l'objectif de la question (minimiser $V(Z)$) est conservé.
- Problème, question 3.1.2.b.ii : énoncé conservé ; le corrigé précise que l'intervalle obtenu est asymptotique et fait intervenir σ , supposé connu, sans remplacement de σ par un estimateur.

- Problème, question 3.2.3 : énoncé conservé ; le corrigé traite à part le cas $V(Y) = 0$ (par exemple $g(t) = t$), dans lequel le théorème limite central ne s'applique pas, et utilise le majorant $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ de l'écart-type de Y .
- Éléments supprimés du sujet car sans utilité pour la résolution : logos, en-têtes et numéros de page.