



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2007

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — Exercice 1, Exercice 2 et Problème

1. EXERCICE.

Question 1

Question adaptée au programme actuel : la composition des développements limités étant hors programme, l'énoncé demande d'utiliser la formule de Taylor-Young appliquée directement à f . Une seconde méthode, utilisant les développements limités usuels avec une substitution entièrement justifiée à la main, est également proposée.

Il s'agit d'obtenir un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \ln(2 - e^x)$.

Méthode 1 — Formule de Taylor-Young

Régularité. On a $2 - e^x > 0 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2$. La fonction $x \mapsto 2 - e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $] -\infty, \ln 2[$, et $\ln$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Par composition, f est de classe C^∞ , donc en particulier C^2 , sur l'intervalle ouvert $] -\infty, \ln 2[$, qui contient 0 puisque $\ln 2 > 0$.

Dérivées. Pour $x < \ln 2$:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{2 - e^x}.$$

En dérivant ce quotient :

$$f''(x) = -\frac{e^x(2 - e^x) - e^x \cdot (-e^x)}{(2 - e^x)^2} = -\frac{2e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(2 - e^x)^2} = -\frac{2e^x}{(2 - e^x)^2}.$$

Valeurs en 0 : $f(0) = \ln 1 = 0$, $f'(0) = \frac{-1}{1} = -1$, $f''(0) = -\frac{2}{1} = -2$.

Formule de Taylor-Young. Comme f est de classe C^2 au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

Méthode 2 — Développements limités usuels et substitution justifiée

On rappelle les développements limités usuels en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_2(t) \text{ pour } t > -1, \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_2(t) = 0; \text{ on pose } \varepsilon_2(0) = 0.$$

Pour $x < \ln 2$, posons $u(x) = 1 - e^x$. Alors $u(x) > -1$, $2 - e^x = 1 + u(x)$ et

$$u(x) = -x - \frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon_1(x), \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0.$$

On a donc, pour $x < \ln 2$:

$$\ln(2 - e^x) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + u(x)^2\varepsilon_2(u(x)).$$

Étudions chaque terme, sans invoquer de théorème de composition des développements limités.

Pour $x \neq 0$, $\frac{u(x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - x\varepsilon_1(x) \rightarrow -1$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $\frac{u(x)^2}{x^2} \rightarrow 1$, ce qui s'écrit $u(x)^2 = x^2 + o(x^2)$.

Ensuite $\frac{u(x)^2\varepsilon_2(u(x))}{x^2} = \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 \varepsilon_2(u(x))$. Comme $u(x) \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, par composition des limites $\varepsilon_2(u(x)) \rightarrow 0$; le produit tend donc vers $1 \times 0 = 0$. Ainsi $u(x)^2\varepsilon_2(u(x)) = o(x^2)$.

En regroupant :

$$\ln(2 - e^x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

Comparaison des méthodes. La méthode 1 est la plus directe : elle ne demande que deux dérivations et l'application d'un théorème du programme. La méthode 2 montre comment exploiter les développements usuels lorsqu'on doit remplacer la variable par une expression qui tend vers 0 : il faut alors contrôler à la main chaque reste, ce qui est utile dès que les dérivées successives deviennent lourdes à calculer.

Conclusion

au voisinage de 0, $\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$.

Question 2.a

Soit $k \geq 2$. Alors $0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$1 = e^0 < e^{1/k} \leq e^{1/2}.$$

Or $e < 4$, donc $e^{1/2} < 2$ (la fonction racine carrée est strictement croissante). Ainsi $1 < e^{1/k} < 2$, d'où :

$$0 < 2 - e^{1/k} < 1.$$

Conclusion

pour tout entier $k \geq 2$, $2 - e^{1/k} \in]0, 1[$.

Question 2.b

La fonction $\ln$ est strictement négative sur $]0, 1[$. D'après 2.a :

Conclusion

pour tout entier $k \geq 2$, $\ln(2 - e^{1/k}) < 0$.

Question 2.c

Notons $w_k = -\ln(2 - e^{1/k})$ pour $k \geq 2$: d'après 2.b, $w_k > 0$. La série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$ a même nature que la série de terme général w_k .

Méthode 1 — Équivalent

D'après la question 1, pour x au voisinage de 0, $x \neq 0$, $x < \ln 2$:

$$\frac{\ln(2 - e^x)}{-x} = 1 + x + \frac{o(x^2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

La suite $\left(\frac{1}{k}\right)$ tend vers 0, ne prend pas la valeur 0 et vérifie $\frac{1}{k} < \ln 2$ pour $k \geq 2$. Par passage à la limite dans l'image d'une suite :

$$\frac{w_k}{1/k} = \frac{\ln(2 - e^{1/k})}{-1/k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, \text{ donc } w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}.$$

Les séries de termes généraux w_k et $\frac{1}{k}$ sont à termes strictement positifs, et la série harmonique (série de Riemann d'exposant 1) diverge. Par le critère de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, la série de terme général w_k diverge.

Méthode 2 — Inégalités de convexité

La fonction exponentielle est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

La fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ est concave sur $] -1, +\infty[$ (dérivée seconde $-\frac{1}{(1+t)^2} < 0$), donc en dessous de sa tangente en 0 : $\forall t > -1$, $\ln(1 + t) \leq t$.

Avec $t = 1 - e^{1/k}$, qui vérifie $t > -1$ d'après 2.a :

$$\ln(2 - e^{1/k}) \leq 1 - e^{1/k} \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k}.$$

Ainsi $w_k \geq \frac{1}{k} > 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme la série harmonique diverge, le critère de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général w_k diverge.

Comparaison des méthodes. La méthode 1 réutilise le développement limité de la question 1 et donne le comportement précis du terme général. La méthode 2 n'utilise que des inégalités de tangentes : elle fournit une minoration valable pour tout $k \geq 2$, ce qui sera directement utile pour la question suivante.

Conclusion

la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$ diverge.

Question 2.d

Limite de V_n . Pour $n \geq 2$,

$$-V_n = \sum_{k=2}^n w_k$$

est la somme partielle d'ordre n d'une série à termes strictement positifs, donc $(-V_n)$ est strictement croissante. D'après 2.c, cette série diverge : la suite croissante $(-V_n)$ n'est pas convergente, donc, par le théorème de la limite monotone, elle n'est pas majorée et tend vers $+\infty$. (On peut aussi utiliser la minoration de la méthode 2 :

$$-V_n \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

.)

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$.

Limite de u_n . Comme $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ et $V_n \rightarrow -\infty$, par composition des limites $u_n = e^{V_n} \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Question 3.a

Pour $n \geq 2$, $u_n = e^{V_n} > 0$, donc $nu_n > 0$ et $\ln(nu_n) = \ln n + \ln(u_n) = \ln n + V_n$.

Pour $k \geq 2$, $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} > 0$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln k$. Par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) = \ln 1 - \ln n = -\ln n.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right] = V_n - (-\ln n) = V_n + \ln n = \ln(nu_n).$$

Conclusion

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

Question 3.b

On pose, pour $x \in]-1, \ln 2[$, $\psi(x) = \ln(2 - e^x) - \ln(1 - x)$.

Développement de $\ln(1 - x)$. Du développement usuel $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon_2(t)$ avec $\varepsilon_2(t) \rightarrow 0$, on déduit par le changement de variable affine $t = -x$:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(-x), \text{ avec } \varepsilon_2(-x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Avec la question 1 :

$$\psi(x) = (-x - x^2) - \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc, pour $x \neq 0$ au voisinage de 0, $\frac{\psi(x)}{-x^2/2} = 1 + \frac{o(x^2)}{-x^2/2} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.

Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \in]0, \frac{1}{2}] \subset]-1, \ln 2[$, et $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ sans s'annuler. Par passage à la limite dans l'image d'une suite :

$$\frac{\psi(1/k)}{-\frac{1}{2k^2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$$\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.$$

Question 3.c

Notons $\delta_k = \ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ pour $k \geq 2$.

Convergence de la série de terme général δ_k . D'après 3.b, $-\delta_k \sim \frac{1}{2k^2}$. Comme

$\frac{1}{2k^2} > 0$, $-\delta_k$ est strictement positif à partir d'un certain rang. La série de terme général $\frac{1}{2k^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$). Par comparaison par équivalents de séries à termes positifs à partir d'un certain rang, la série de terme général $-\delta_k$ converge, donc aussi celle de terme général δ_k . Notons

$$\ell = \sum_{k=2}^{+\infty} \delta_k \in \mathbb{R}.$$

Limite de nu_n . D'après 3.a,

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \delta_k \rightarrow \ell.$$

La fonction exponentielle étant continue en ℓ :

$$nu_n = e^{\ln(nu_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell.$$

Posons $K = e^\ell : K > 0$. Alors $\frac{u_n}{K/n} = \frac{nu_n}{K} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{K}{n}$.

Nature de la série. Les termes u_n et $\frac{K}{n}$ sont strictement positifs et équivalents ; la série de terme général $\frac{K}{n}$ diverge (série harmonique multipliée par $K \neq 0$). Par comparaison par équivalents, la série de terme général u_n diverge.

Remarque (observation numérique, non démontrée) : une évaluation numérique de nu_n pour de grandes valeurs de n donne $K \approx 0,534$.

Conclusion

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$ avec $K = e^\ell > 0$, et la série de terme général u_n diverge.

Question 4.a

Pour $n \geq 2$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{V_{n+1}-V_n} = e^{\ln(2-e^{1/(n+1)})} = 2 - e^{1/(n+1)}.$$

D'après 2.a (avec $k = n + 1 \geq 3$), ce quotient appartient à $]0, 1[$. Comme $u_n > 0$, on obtient $0 < u_{n+1} < u_n$.

On peut aussi le voir ainsi : $V_{n+1} - V_n = \ln(2 - e^{1/(n+1)}) < 0$ d'après 2.b, donc (V_n) est strictement décroissante et, l'exponentielle étant strictement croissante, (u_n) aussi.

Conclusion

la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante (et à termes strictement positifs).

Question 4.b

Pour $n \geq 1$, les termes S_{2n} et S_{2n+1} sont bien définis puisque $2n \geq 2$.

Monotonie de (S_{2n}) . Pour $n \geq 1$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$$

d'après 4.a. La suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

Monotonie de (S_{2n+1}) . Pour $n \geq 1$:

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+3}u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0.$$

La suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

Différence. Pour $n \geq 1$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1}$, qui tend vers 0 d'après 2.d.

Conclusion

les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Question 4.c

D'après le théorème des suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite réelle σ . Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de $(S_n)_{n \geq 2}$ convergeant vers la même limite σ , la suite (S_n) converge vers σ .

Or (S_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Remarque : cette série n'est pas absolument convergente, puisque $|(-1)^n u_n| = u_n$ et que la série de terme général u_n diverge (question 3.c). De plus, σ est encadrée par $S_3 = u_2 - u_3$ et $S_2 = u_2$.

Conclusion

la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente (sans être absolument convergente).

2. EXERCICE.

Question 1

Expression de φ . Le coefficient d'indice (j, i) de ${}^t A$ est a_{ij} . Le coefficient diagonal d'indice (j, j) de ${}^t AB$ vaut donc

$$({}^t AB)_{jj} = \sum_{i=1}^n ({}^t A)_{ji} b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

En sommant sur j :

$$\varphi(A, B) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}.$$

Produit scalaire. On vérifie les quatre propriétés.

Symétrie : l'expression précédente est symétrique en A et B , donc $\varphi(B, A) = \varphi(A, B)$.

Linéarité à droite : pour $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(A, \beta B + \gamma C) = \sum_{i,j} a_{ij} (\beta b_{ij} + \gamma c_{ij}) = \beta \varphi(A, B) + \gamma \varphi(A, C).$$

Par symétrie, φ est aussi linéaire à gauche : elle est bilinéaire.

Positivité :

$$\varphi(A, A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\varphi(A, A) = 0$, une somme de réels positifs étant nulle, chaque a_{ij}^2 est nul, donc $A = 0$.

Conclusion

$$\varphi(A, B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$$

et φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; la norme associée est

$$N(A) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

Question 2.a

La matrice ${}^tAA$ est réelle et symétrique : ${}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA$.

D'après le théorème spectral (admis au programme), toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale : il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est-à-dire inversible avec $P^{-1} = {}^tP$, et D diagonale telles que $P^{-1}({}^tAA)P = D$.

Conclusion

il existe P orthogonale et D diagonale telles que ${}^tP({}^tAA)P = D$.

Question 2.b

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tAAX = \lambda X$.

Premier calcul : ${}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$.

Second calcul : ${}^tX ({}^tAAX) = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$.

Comme $X \neq 0$, $\|X\|^2 > 0$, et donc $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

Application aux λ_i . Comme $P {}^tP = I_n$, l'égalité ${}^tP({}^tAA)P = D$ donne $({}^tAA)P = PD$.

En appliquant cette égalité au vecteur E_i de la base canonique (voir question 2.e) :

$({}^tAA)(PE_i) = PDE_i = \lambda_i PE_i$, et $PE_i \neq 0$ car P est inversible. Donc chaque λ_i est valeur propre de ${}^tAA$, et par ce qui précède $\lambda_i \geq 0$.

Conclusion

toute valeur propre de ${}^tAA$ est positive ; en particulier $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Question 2.c

On utilise $P {}^tP = {}^tPP = I_n$, la propriété $\text{Tr}(MM') = \text{Tr}(M'M)$ et

$$N(M)^2 = \varphi(M, M) = \text{Tr}({}^tMM).$$

Premier point. ${}^tAA = PD {}^tP$, donc

$$[N(A)]^2 = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}((PD) {}^tP) = \text{Tr}({}^tP(PD)) = \text{Tr}(D).$$

Deuxième point. $[N(B)]^2 = \text{Tr}({}^tBB) = \text{Tr}(B {}^tB)$, et

$$\text{Tr}(S) = \text{Tr}({}^tP(B {}^tBP)) = \text{Tr}((B {}^tBP) {}^tP) = \text{Tr}(B {}^tB).$$

Donc $[N(B)]^2 = \text{Tr}(S)$.

Troisième point. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$, donc

$$[N(AB)]^2 = \text{Tr}({}^tB {}^tAAB) = \text{Tr}(({}^tAA)(B {}^tB)) = \text{Tr}(PD {}^tPB {}^tB).$$

En faisant passer P à la fin :

$$\text{Tr}(PD^tPB^tB) = \text{Tr}(D^tPB^tBP) = \text{Tr}(DS) = \text{Tr}(SD).$$

Conclusion

$$[N(A)]^2 = \text{Tr}(D), [N(B)]^2 = \text{Tr}(S) \text{ et } [N(AB)]^2 = \text{Tr}(SD).$$

Question 2.d

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, comme D est diagonale ($d_{ki} = 0$ si $k \neq i$) :

$$(SD)_{ii} = \sum_{k=1}^n s_{ik}d_{ki} = s_{ii}d_{ii} = \lambda_i s_{ii}.$$

Conclusion

$$\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

Question 2.e

Égalité demandée. Comme ${}^t({}^tBPE_i) = {}^tE_i {}^tPB$:

$${}^tE_i SE_i = {}^tE_i {}^tPB {}^tBPE_i = {}^t({}^tBPE_i)({}^tBPE_i) = \|{}^tBPE_i\|^2.$$

Calcul. SE_i est la i -ème colonne de S , et ${}^tE_i(SE_i)$ en est la i -ème composante :

$${}^tE_i SE_i = s_{ii}.$$

Conclusion

$${}^tE_iSE_i = \|{}^tBPE_i\|^2 = s_{ii}, \text{ donc } s_{ii} \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Question 2.f

Inégalité sur les sommes. On développe le produit :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i s_{jj} = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} + \sum_{i \neq j} \lambda_i s_{jj}.$$

D'après 2.b et 2.e, $\lambda_i \geq 0$ et $s_{jj} \geq 0$, donc la dernière somme est positive, d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii}\right).$$

Conclusion sur les normes.

Méthode 1 — Par la diagonalisation (démarche de l'énoncé)

D'après 2.c et 2.d :

$$[N(AB)]^2 = \text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \text{Tr}(D) \text{Tr}(S) = [N(A)]^2 [N(B)]^2.$$

Les normes étant positives et la fonction racine carrée croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Méthode 2 — Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les coefficients

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ entre la i -ème ligne $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ de A et la j -ème colonne $(b_{1j}, \dots, b_{nj})$ de B . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(AB)_{ij}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{lj}^2 \right).$$

En sommant sur i et j :

$$[N(AB)]^2 = \sum_{i,j} (AB)_{ij}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lj}^2 \right) = [N(A)]^2 [N(B)]^2,$$

puis on conclut comme dans la méthode 1.

Comparaison des méthodes. La méthode 1, imposée par la progression de l'énoncé, mobilise le théorème spectral et la trace : elle illustre comment une diagonalisation en base orthonormale ramène une inégalité matricielle à une inégalité entre réels positifs. La méthode 2 est plus élémentaire et plus courte : elle est à privilégier lorsqu'on demande seulement l'inégalité finale, sans imposer de démarche.

Conclusion

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3. PROBLEME.

3.1. Préliminaire

Remarque d'existence. X et Y admettent une variance, donc un moment d'ordre 2.

Comme $|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$, la variable XY admet une espérance ; pour tout réel λ , $(\lambda X + Y)^2 \leq 2\lambda^2 X^2 + 2Y^2$, donc $\lambda X + Y$ admet un moment d'ordre 2, donc une variance.

Question 1

Par linéarité, $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$, donc

$\lambda X + Y - E(\lambda X + Y) = \lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y))$. En développant le carré et en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} V(\lambda X + Y) &= E\left[(\lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2\right] = \lambda^2 E[(X - E(X))^2] \\ &\quad + 2\lambda E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[(Y - E(Y))^2]. \end{aligned}$$

Conclusion

pour tout réel λ , $V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y)$.

Question 2.a

Notons $T(\lambda) = V(X)\lambda^2 + 2 \text{Cov}(X, Y)\lambda + V(Y)$.

Méthode 1 — Signe du trinôme

Une variance est positive, donc d'après la question 1, $T(\lambda) \geq 0$ pour tout réel λ . Comme $V(X) > 0$, T est un trinôme du second degré. Si son discriminant était strictement positif, T aurait deux racines distinctes et serait strictement négatif (signe contraire du coefficient dominant) entre elles, ce qui est exclu. Donc

$$\Delta = 4 \text{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0.$$

Méthode 2 — Évaluation au point où le trinôme est minimal

Le trinôme T atteint son minimum en $\lambda_0 = -\frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$ (bien défini car $V(X) > 0$).

On calcule :

$$T(\lambda_0) = \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)} - \frac{2 \text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)} + V(Y) = V(Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)}.$$

Comme $T(\lambda_0) = V(\lambda_0 X + Y) \geq 0$, en multipliant par $V(X) > 0$ on obtient

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y).$$

Comparaison des méthodes. La méthode 1 utilise seulement le signe d'un trinôme ; la méthode 2 identifie explicitement la combinaison $\lambda_0 X + Y$ de variance minimale, ce qui prépare directement l'étude du cas d'égalité.

Conclusion

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

Question 2.b

On montre que l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $P(Y = \alpha X + \beta) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si Y est presque sûrement une fonction affine de X .

Condition nécessaire. Supposons $\text{Cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y)$. Avec les notations de 2.a,

$$T(\lambda_0) = V(Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)} = 0, \text{ donc la variable } Z = \lambda_0 X + Y \text{ vérifie } V(Z) = 0.$$

Notons $m = E(Z)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|Z - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Les événements $A_k = \{|Z - m| \geq \frac{1}{k}\}$ ($k \geq 1$) forment une suite croissante dont la réunion est $\{|Z - m| > 0\} = \{Z \neq m\}$. Par continuité monotone des probabilités,

$$P(Z \neq m) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = 0.$$

Donc $P(Y = -\lambda_0 X + m) = 1$: on peut prendre $\alpha = -\lambda_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $\beta = m = E(Y) - \alpha E(X)$.

Condition suffisante. Supposons $P(Y = \alpha X + \beta) = 1$. La variable $W = -\alpha X + Y$ est égale à β sauf sur un événement négligeable ; elle a donc la même fonction de répartition, donc la même loi, que la variable certaine égale à β , et $V(W) = 0$. Ainsi $T(-\alpha) = V(-\alpha X + Y) = 0$: le trinôme T possède une racine réelle, donc $\Delta \geq 0$. Avec $\Delta \leq 0$ (question 2.a), on obtient $\Delta = 0$, c'est-à-dire $\text{Cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y)$.

Remarque : comme Y est à densité, $P(Y = \beta) = 0$, donc nécessairement $\alpha \neq 0$ dans ce cas d'égalité.

Conclusion

$(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(Y = \alpha X + \beta) = 1$; on a alors $\alpha = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $\beta = E(Y) - \alpha E(X)$.

3.2. Partie I : Étude d'une fonction de deux variables

Dans toute cette partie, on écrit, pour $0 \leq a \leq A$ et $b > 0$, $L_n(a, b) = b^{-n} \exp\left(\frac{na - S}{b}\right)$, quantité strictement positive.

Question 1

Si $A = 0$, l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$ est vide et il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $A > 0$ et on note $U =]0, A[\times]0, +\infty[$.

Régularité. Sur U , $L_n(a, b) = b^{-n} \exp\left(\frac{na - S}{b}\right)$. La fonction $(a, b) \mapsto \frac{na - S}{b}$ est de classe C^1 sur U (quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas), l'exponentielle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \mapsto b^{-n}$ est de classe C^1 sur U . Par composition et produit, L_n est de classe C^1 sur l'ouvert U .

Dérivées partielles. Pour $(a, b) \in U$:

$$\frac{\partial L_n}{\partial a}(a, b) = b^{-n} \cdot \frac{n}{b} \exp\left(\frac{na - S}{b}\right) = \frac{n}{b} L_n(a, b),$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b}(a, b) = \left(-\frac{n}{b} - \frac{na - S}{b^2} \right) L_n(a, b) = \frac{S - na - nb}{b^2} L_n(a, b).$$

Méthode 1 — Condition nécessaire du premier ordre

Comme $n \geq 1$, $b > 0$ et $L_n(a, b) > 0$, on a $\frac{\partial L_n}{\partial a}(a, b) > 0$ en tout point de U : le gradient de L_n ne s'annule jamais sur U . Or, si une fonction de classe C^1 sur un ouvert admet un extremum local en un point de cet ouvert, ce point est un point critique. L_n n'a aucun point critique sur U , donc aucun extremum local, et a fortiori aucun extremum global, sur U .

Méthode 2 — Monotonie partielle

Soit $(a, b) \in U$. Comme $0 < a < A$, il existe $h > 0$ tel que $a - h$ et $a + h$ appartiennent à $]0, A[$. La fonction $t \mapsto L_n(t, b)$ est strictement croissante sur $[0, A]$ (voir question 2), donc $L_n(a - h, b) < L_n(a, b) < L_n(a + h, b)$: dans tout voisinage de (a, b) , L_n prend des valeurs strictement plus petites et strictement plus grandes que $L_n(a, b)$. Le point (a, b) n'est donc ni un maximum ni un minimum local.

Comparaison des méthodes. La méthode 1 applique le résultat général du programme sur les points critiques ; la méthode 2 est élémentaire et montre la raison concrète de l'absence d'extremum : la fonction augmente strictement dans la direction de a .

Conclusion

L_n est de classe C^1 sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ et n'y admet aucun extremum.

Question 2

Fixons $b > 0$. La fonction $a \mapsto \frac{na - S}{b}$ est strictement croissante sur $[0, A]$ (coefficient $\frac{n}{b} > 0$), l'exponentielle est strictement croissante et $b^{-n} > 0$. Donc $a \mapsto L_n(a, b)$ est strictement croissante sur $[0, A]$, et pour $a \in [0, A[$: $L_n(a, b) < L_n(A, b)$.

Pour $a > A$, $L_n(a, b) = 0 < b^{-n} \exp\left(\frac{nA - S}{b}\right) = L_n(A, b)$.

Conclusion

pour tout $b > 0$ et tout $a \in [0, A[\cup]A, +\infty[$, $L_n(a, b) < L_n(A, b)$.

Question 3

Posons $c = S - nA$; par hypothèse $c > 0$. Pour $b > 0$, $g(b) = b^{-n} e^{-c/b}$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(b) = -nb^{-n-1}e^{-c/b} + b^{-n} \cdot \frac{c}{b^2}e^{-c/b} = b^{-n-2}e^{-c/b}(c - nb).$$

Comme $b^{-n-2}e^{-c/b} > 0$, $g'(b)$ a le signe de $c - nb$. Posons $b_0 = \frac{c}{n} = \frac{S}{n} - A > 0$:

$g'(b) > 0$ sur $]0, b_0[$ et $g'(b) < 0$ sur $]b_0, +\infty[$.

Limites aux bornes (pour compléter le tableau). Quand $b \rightarrow 0^+$, en posant $t = \frac{1}{b} \rightarrow +\infty$, $g(b) = t^n e^{-ct} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Quand $b \rightarrow +\infty$, $b^{-n} \rightarrow 0$ et $e^{-c/b} \rightarrow 1$, donc $g(b) \rightarrow 0$.

b	0		b_0		$+\infty$
$g'(b)$		+	0	−	
g	0	croissante	$g(b_0)$	décroissante	0

La fonction g est continue, strictement croissante sur $]0, b_0]$ et strictement décroissante sur $[b_0, +\infty[$. Donc pour tout $b \neq b_0$, $g(b) < g(b_0)$, avec

$$g(b_0) = \left(\frac{n}{S - nA}\right)^n e^{-n}.$$

Conclusion

g admet sur $]0, +\infty[$ un maximum absolu, atteint uniquement en $b_0 = \frac{S}{n} - A = \frac{S - nA}{n}$.

Question 4

Soit $(a, b) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$. D'après les questions 2 et 3 :

$$L_n(a, b) \leq L_n(A, b) = g(b) \leq g(b_0) = L_n(A, b_0).$$

Comme $A \geq 0$ et $b_0 > 0$, le point (A, b_0) appartient bien au domaine : L_n admet un maximum absolu égal à $L_n(A, b_0)$.

Unicité. Si $L_n(a, b) = L_n(A, b_0)$, les deux inégalités précédentes sont des égalités.

L'égalité $L_n(a, b) = L_n(A, b)$ impose $a = A$ (question 2, inégalité stricte pour $a \neq A$), et l'égalité $g(b) = g(b_0)$ impose $b = b_0$ (question 3).

Conclusion

L_n admet sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu atteint en l'unique point $(a_0, b_0) = \left(A, \frac{S}{n} - A\right)$, de valeur $\left(\frac{n}{S - nA}\right)^n e^{-n}$.

3.3. Partie II : Étude d'une loi

Question 1

Positivité : $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$ (nulle ou exponentielle multipliée par $\frac{1}{b} > 0$).

Continuité : $f_{a,b}$ est continue sur $] -\infty, a[$ (nulle) et sur $[a, +\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en a .

Intégrale. $\int_{-\infty}^a f_{a,b}(x) dx = 0$ converge. Pour $M > a$:

$$\int_a^M \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} dx = \left[-e^{-\frac{x-a}{b}} \right]_a^M = 1 - e^{-\frac{M-a}{b}} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) dx$ converge et vaut 1.

Conclusion

$f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

Question 2

Notons F la fonction de répartition de X . Pour $x < a$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b} = 0$. Pour $x \geq a$, le calcul de la question 1 avec $M = x$ donne $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$.

Conclusion

$F(x) = 0$ si $x < a$, et $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$ si $x \geq a$.

Question 3

Pour $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(X - a \leq y) = P(X \leq y + a) = F(y + a)$, donc

$F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, et $F_Y(y) = 1 - e^{-y/b}$ si $y \geq 0$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$. La fonction de répartition caractérisant la loi, Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$ (c'est aussi la loi $\mathcal{E}(0, b)$ de l'énoncé).

Espérance et variance. Pour une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$, l'espérance vaut b et la variance b^2 . Comme $X = Y + a$, par transformation affine :

Conclusion

Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$; $E(X) = a + b$ et $V(X) = b^2$.

Question 4

Existence. Le cas $p = 0$ est immédiat ($E(X^0) = 1$). Soit $p \geq 1$. Par le théorème de transfert, X^p admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p f_{a,b}(x) dx$ converge, c'est-à-dire, $f_{a,b}$ étant nulle sur $] -\infty, a[$ et $x \geq a \geq 0$ sur $[a, +\infty[$, si et seulement si $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$ converge. Deux méthodes permettent de l'établir.

Méthode 1 — Comparaison à une intégrale de Riemann

La fonction $x \mapsto x^p f_{a,b}(x)$ est continue et positive sur $[a, +\infty[$. Par croissances comparées,

$$x^2 \cdot x^p \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} = \frac{e^{a/b}}{b} x^{p+2} e^{-x/b} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $x^p f_{a,b}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, le critère de négligeabilité pour les fonctions positives assure la convergence de $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$.

Relation. Soit $p \geq 1$ et $M > a$. On intègre par parties sur le segment $[a, M]$ avec

$u(x) = x^p$ et $v(x) = -e^{-\frac{x-a}{b}}$, fonctions de classe C^1 , avec $v'(x) = f_{a,b}(x)$:

$$\int_a^M x^p f_{a,b}(x) dx = \left[-x^p e^{-\frac{x-a}{b}} \right]_a^M + \int_a^M p x^{p-1} e^{-\frac{x-a}{b}} dx = a^p - M^p e^{-\frac{M-a}{b}}$$

$$+ pb \int_a^M x^{p-1} f_{a,b}(x) dx.$$

Quand $M \rightarrow +\infty$, $M^p e^{-\frac{M-a}{b}} = e^{a/b} M^p e^{-M/b} \rightarrow 0$ par croissances comparées, et les deux intégrales convergent vers $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$. Donc $E(X^p) = a^p + pb E(X^{p-1})$.

Méthode 2 — Récurrence à partir de l'intégration par parties

On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$ converge. Pour $p = 0$, c'est la question 1. Si c'est vrai au rang $p - 1$ (avec $p \geq 1$), l'égalité obtenue par intégration par parties sur $[a, M]$ montre que le membre de droite admet une limite finie quand $M \rightarrow +\infty$ (le terme $M^p e^{-\frac{M-a}{b}}$ tend vers 0 et l'intégrale converge par hypothèse de récurrence); donc le membre de gauche aussi, ce qui donne la convergence au rang p et, en même temps, la relation.

Comparaison des méthodes. La méthode 1 sépare l'existence (comparaison) du calcul (intégration par parties); la méthode 2 fait d'une pierre deux coups, l'intégration par parties sur un segment fournissant à la fois la convergence et la relation, ce qui est efficace pour les moments de lois définies par des exponentielles.

Vérification : pour $p = 1$, $E(X) = a + b$; pour $p = 2$, $E(X^2) = a^2 + 2b(a + b)$, d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = b^2$, conformément à la question 3.

Conclusion

X admet un moment d'ordre p pour tout $p \in \mathbb{N}$, et pour $p \geq 1$, $E(X^p) = a^p + pb E(X^{p-1})$.

Question 5.a

Notons $T = -b \ln(1 - U) + a$. Comme U prend ses valeurs dans $[0, 1[$, $1 - U \in]0, 1]$, donc $\ln(1 - U)$ est bien défini et négatif : $T \geq a$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < a$, $P(T \leq x) = 0$ car $T \geq a$.

Si $x \geq a$, puisque $b > 0$ et que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont strictement croissantes :

$$T \leq x \iff \ln(1 - U) \geq -\frac{x - a}{b} \iff 1 - U \geq e^{-\frac{x - a}{b}} \iff U \leq 1 - e^{-\frac{x - a}{b}}.$$

Le réel $t = 1 - e^{-\frac{x - a}{b}}$ appartient à $[0, 1[$, et pour une loi uniforme sur $[0, 1[$,
 $P(U \leq t) = t$. Donc $P(T \leq x) = 1 - e^{-\frac{x - a}{b}}$.

La fonction de répartition de T est celle obtenue à la question 2. Comme elle caractérise la loi :

Conclusion

$-b \ln(1 - U) + a$ suit la loi $\mathcal{E}(a, b)$.

Question 5.b

Code adapté en Python.

D'après 5.a, il suffit de simuler U par `rd.random()` puis d'appliquer la transformation $u \mapsto -b \ln(1 - u) + a$.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def tirage(a, b):
    U = rd.random()                # réalisation de U, de loi uniforme sur [0,1[
    return -b * np.log(1 - U) + a   # réalisation de la loi E(a,b)
```

La variable U contient une réalisation de la loi uniforme sur $[0, 1[$; comme U est strictement inférieure à 1, $\ln(1 - U)$ est bien défini. La fonction renvoie un réel, réalisation d'une variable de loi $\mathcal{E}(a, b)$.

Ce code a été exécuté. Remarque : on obtiendrait la même loi avec `rd.exponential(b) + a`, le paramètre de `rd.exponential` étant l'espérance b (paramètre d'échelle) et non le paramètre $\frac{1}{b}$ de la loi exponentielle ; la question impose toutefois la méthode d'inversion.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

Question 1

Code adapté en Python.

On réalise n tirages indépendants : le premier initialise la somme S et le minimum Y , et chacun des $n - 1$ suivants met à jour ces deux valeurs.

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def tirage(a, b):
    U = rd.random()
    return -b * np.log(1 - U) + a

def simulation(a, b, n):
    X = tirage(a, b)
    S = X
    Y = X
    for i in range(2, n + 1):
        X = tirage(a, b)      # nouvelle réalisation X_i
        S = S + X             # S contient X_1 + ... + X_i
        if X < Y:
            Y = X             # Y contient min(X_1, ..., X_i)
    return S, Y
```

La boucle `for i in range(2, n + 1)` parcourt les entiers de 2 à n (borne supérieure exclue dans `range`) : avec le tirage initial, on effectue exactement n tirages. En fin de boucle, S contient une réalisation de S_n et Y une réalisation de Y_n , que la fonction

renvoie.

Ce code a été exécuté. À titre d'observation expérimentale (et non de preuve), 100 000 appels avec $a = 1,5$, $b = 2$ et $n = 10$ donnent des moyennes empiriques d'environ 34,98 pour S_n et 1,701 pour Y_n , cohérentes avec les valeurs théoriques 35 et 1,7 obtenues aux questions 2 et 4.

Question 2

Chaque X_i admet une espérance $a + b$ et une variance b^2 (question II.3). Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = n(a + b)$.

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, elles sont deux à deux indépendantes, donc leurs covariances deux à deux sont nulles, et la variance de la somme est la somme des variances : $V(S_n) = nb^2$.

Conclusion

$$E(S_n) = n(a + b) \text{ et } V(S_n) = nb^2.$$

Question 3

Question adaptée au programme actuel : seule la loi gamma $\gamma(\nu)$ de taux 1 est au programme, la question porte donc sur

$$T_n = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n (X_i - a).$$

Loi de chaque terme. Posons $W_i = \frac{X_i - a}{b}$. Pour $w \in \mathbb{R}$,
 $P(W_i \leq w) = P(X_i \leq a + bw) = F(a + bw)$, qui vaut 0 si $w < 0$ et $1 - e^{-w}$ si $w \geq 0$. Donc W_i suit la loi exponentielle de paramètre 1, qui est la loi $\gamma(1)$ (densités égales sauf en 0, avec $\Gamma(1) = 1$).

Indépendance. Les W_i sont des fonctions respectives des X_i , qui sont mutuellement indépendantes : elles sont mutuellement indépendantes.

Stabilité. Si U_1 et U_2 sont indépendantes de lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $U_1 + U_2$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$ (résultat du cours). Par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$: $W_1 + \dots + W_k$ suit la loi

$\gamma(k)$; pour passer de k à $k + 1$, on remarque que $W_1 + \dots + W_k$ et W_{k+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Donc $T_n = W_1 + \dots + W_n$ suit la loi $\gamma(n)$, de densité

$$f_{T_n}(t) = \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} \text{ si } t > 0, \text{ et } f_{T_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ (car } \Gamma(n) = (n-1)!).$$

Densité de S_n . On a $S_n = na + bT_n$ avec $b > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{S_n}(x) = P\left(T_n \leq \frac{x - na}{b}\right) = F_{T_n}\left(\frac{x - na}{b}\right).$$

Par transformation affine d'une variable à densité, S_n est à densité et une densité est $x \mapsto \frac{1}{b} f_{T_n}\left(\frac{x - na}{b}\right)$, soit :

$$f_{S_n}(x) = \frac{(x - na)^{n-1}}{b^n(n-1)!} e^{-\frac{x - na}{b}} \text{ si } x > na, \text{ et } f_{S_n}(x) = 0 \text{ si } x \leq na.$$

Vérification : $E(S_n) = na + bE(T_n) = na + bn$ et $V(S_n) = b^2V(T_n) = nb^2$, en accord avec la question 2.

Conclusion

T_n suit la loi $\gamma(n)$, et S_n admet la densité f_{S_n} ci-dessus.

Question 4

Fonction de répartition. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\{Y_n > x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}$. Par indépendance mutuelle des X_i , qui ont toutes la fonction de répartition F :

$$P(Y_n > x) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = (1 - F(x))^n.$$

D'où $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$, c'est-à-dire :

$$F_{Y_n}(x) = 0 \text{ si } x < a, \text{ et } F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-\frac{n(x-a)}{b}} = 1 - e^{-\frac{x-a}{b/n}} \text{ si } x \geq a.$$

Loi. On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(a, \frac{b}{n}\right)$ (question II.2). Comme la fonction de répartition caractérise la loi, Y_n suit la loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ avec $a_n = a$ et $b_n = \frac{b}{n}$.

Moments. D'après la question II.3 appliquée aux paramètres (a_n, b_n) :

Conclusion

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(a, \frac{b}{n}\right), \quad E(Y_n) = a + \frac{b}{n} \text{ et } V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}.$$

Question 5.a

Question adaptée au programme actuel : la notion de risque quadratique étant hors programme, on demande directement le moment $E((Y_n - a)^2)$.

Biais. $b_a(Y_n) = E(Y_n) - a = \frac{b}{n}.$

Existence de $E((Y_n - a)^2)$: Y_n admet un moment d'ordre 2 (question II.4), donc $Y_n - a$ aussi.

Méthode 1 — Décomposition variance plus carré du biais

Pour une variable T admettant un moment d'ordre 2 et un réel θ , on écrit $T - \theta = (T - E(T)) + (E(T) - \theta)$ et on développe :

$$\begin{aligned} E((T - \theta)^2) &= E((T - E(T))^2) + 2(E(T) - \theta)E(T - E(T)) + (E(T) - \theta)^2 = V(T) \\ &\quad + (E(T) - \theta)^2, \end{aligned}$$

car $E(T - E(T)) = 0$. Avec $T = Y_n$ et $\theta = a$:

$$E((Y_n - a)^2) = \frac{b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n^2} = \frac{2b^2}{n^2}.$$

Méthode 2 — Relation de récurrence sur les moments

La variable $Y_n - a$ suit la loi $\mathcal{E}\left(0, \frac{b}{n}\right)$ (question II.3 appliquée à Y_n). La relation de la question II.4 avec les paramètres $\left(0, \frac{b}{n}\right)$ et $p = 2$ donne :

$$E((Y_n - a)^2) = 0^2 + 2 \cdot \frac{b}{n} E(Y_n - a) = 2 \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{2b^2}{n^2}.$$

Comparaison des méthodes. La méthode 1 est générale et sera réutilisée à la question 6.b ; la méthode 2 exploite la structure particulière de la loi $\mathcal{E}$ et la relation de récurrence établie en partie II.

Conclusion

le biais de Y_n vaut $\frac{b}{n}$ et $E((Y_n - a)^2) = \frac{2b^2}{n^2}$.

Question 5.b

Question adaptée au programme actuel : la notion « asymptotiquement sans biais » est précisée dans l'énoncé (biais tendant vers 0).

Inégalité de Markov. Si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance, pour tout $c > 0$, $P(Z \geq c) \leq \frac{E(Z)}{c}$. Pour une variable T admettant un moment d'ordre 2, en l'appliquant à $Z = T^2$ et $c = \varepsilon^2$, et comme $\{|T| \geq \varepsilon\} = \{T^2 \geq \varepsilon^2\}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|T| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(T^2)}{\varepsilon^2}.$$

Absence asymptotique de biais : le biais $\frac{b}{n}$ tend vers 0.

Convergence. Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0$.

Méthode 1 — Inégalité de Markov

Avec $T = Y_n - a$ et la question 5.a :

$$0 \leq P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{2b^2}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et le théorème d'encadrement conclut.

Méthode 2 — Condition suffisante du cours

On a $E(Y_n) = a + \frac{b}{n} \rightarrow a$ et $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2} \rightarrow 0$. D'après le cours, un estimateur dont l'espérance tend vers le paramètre et dont la variance tend vers 0 est convergent.

Comparaison des méthodes. La méthode 1, demandée par l'énoncé, fournit en plus une majoration explicite de la probabilité d'erreur ; la méthode 2 applique directement le critère du programme, qui repose d'ailleurs sur le même argument.

Conclusion

(Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais et convergente.

Question 6.a

Z_n admet une espérance comme combinaison linéaire de variables qui en admettent une, et

$$E(Z_n) = \frac{E(S_n)}{n} - E(Y_n) = (a + b) - \left(a + \frac{b}{n}\right) = b - \frac{b}{n}.$$

Conclusion

le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b vaut $-\frac{b}{n}$.

Question 6.b

Question adaptée au programme actuel : $r_{Z_n}(b)$ est défini directement comme le moment $E((Z_n - b)^2)$, sans référence au risque quadratique.

Existence. S_n et Y_n admettent un moment d'ordre 2, donc aussi $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ (car $(u + v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2$), et $Z_n - b$. Ainsi $r_{Z_n}(b)$ existe, et $\text{Cov}(S_n, Y_n)$ aussi.

Décomposition. D'après la méthode 1 de la question 5.a et la question 6.a :

$$r_{Z_n}(b) = V(Z_n) + (E(Z_n) - b)^2 = V(Z_n) + \frac{b^2}{n^2}.$$

Variance de Z_n . Par la formule de la variance d'une somme et la bilinéarité de la covariance (on peut aussi appliquer la question 1 du préliminaire avec $\lambda = \frac{1}{n}$ aux variables à densité S_n et $-Y_n$) :

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) + V(Y_n) - \frac{2}{n}\text{Cov}(S_n, Y_n) = \frac{b^2}{n} + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\text{Cov}(S_n, Y_n).$$

En additionnant :

Conclusion

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}\text{Cov}(S_n, Y_n).$$

Question 6.c

Application du préliminaire. Les variables S_n et Y_n sont à densité (questions 3 et 4), admettent espérance et variance, et $V(S_n) = nb^2 > 0$. La question 2.a du préliminaire donne :

$$\text{Cov}(S_n, Y_n)^2 \leq V(S_n)V(Y_n) = nb^2 \cdot \frac{b^2}{n^2} = \frac{b^4}{n}, \text{ donc } |\text{Cov}(S_n, Y_n)| \leq \frac{b^2}{\sqrt{n}}.$$

Limite. Par conséquent $\left| \frac{2}{n} \text{Cov}(S_n, Y_n) \right| \leq \frac{2b^2}{n^{3/2}} \rightarrow 0$, et comme $\frac{2b^2}{n^2} \rightarrow 0$ et $\frac{b^2}{n} \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0.$$

Absence asymptotique de biais : le biais $-\frac{b}{n}$ tend vers 0.

Convergence.

Méthode 1 — Inégalité de Markov

Pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité de 5.b appliquée à $T = Z_n - b$ donne

$$0 \leq P(|Z_n - b| \geq \varepsilon) \leq \frac{r_{Z_n}(b)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Méthode 2 — Condition suffisante du cours

On a $E(Z_n) = b - \frac{b}{n} \rightarrow b$ et $V(Z_n) = r_{Z_n}(b) - \frac{b^2}{n^2} \rightarrow 0$ (question 6.b) ; le critère du cours conclut.

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$, et (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais et convergente.

Question 7.a

Posons $A = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ et $S = x_1 + \dots + x_n$.

Hypothèses de la partie I. Les X_i sont presque sûrement à valeurs dans

$[a, +\infty[\subset [0, +\infty[$; une réalisation vérifie donc $x_i \geq 0$ pour tout i , d'où $A \geq 0$ et $S \geq 0$.

Chaque x_i est supérieur ou égal à A , et l'un d'eux, égal à $\max\{x_1, \dots, x_n\}$, est strictement supérieur à A par hypothèse; donc $S > nA$. Enfin $n \geq 2$ est non nul.

Calcul de L . Soit $(a, b) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$ (on note ici a, b les variables de L).

Si $a \leq A$, alors $x_i \geq a$ pour tout i et

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} e^{-\frac{x_i - a}{b}} = \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^n (x_i - a)\right) = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na + S)} = L_n(a, b).$$

Si $a > A$, il existe un indice j tel que $x_j = A < a$, donc $f_{a,b}(x_j) = 0$ et

$$L(a, b) = 0 = L_n(a, b).$$

Conclusion

$L = L_n$ avec $A = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ et

$$S = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Question 7.b

Sur l'échantillon $(x_1, \dots, x_n)$, l'estimation de a fournie par Y_n est

$y = \min\{x_1, \dots, x_n\} = A$, et l'estimation de b fournie par Z_n est

$$z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - y = \frac{S}{n} - A.$$

D'après la question I.4, la fonction L_n (donc L) atteint son unique maximum en $(a_0, b_0) = \left(A, \frac{S}{n} - A\right)$.

Interprétation : les estimations données par Y_n et Z_n sont exactement les valeurs des paramètres qui rendent maximal le produit des densités aux points observés. (On parle

d'estimation par maximum de vraisemblance ; ce vocabulaire est donné à titre culturel.)

Conclusion

$a_0 = y$ et $b_0 = z$: les estimations obtenues à partir de Y_n et Z_n coïncident avec (a_0, b_0) .

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 1 : la composition des développements limités étant hors programme, la question demande la formule de Taylor-Young appliquée à $x \mapsto \ln(2 - e^x)$ (après justification de sa régularité) ; le corrigé présente aussi la méthode par développements usuels avec une substitution justifiée à la main.

Problème, partie II, question 5.b : code adapté en Python (langage Pascal remplacé ; `rd.random()` et `np.log` présentés dans l'énoncé).

Problème, partie III, question 1 : code adapté en Python ; le programme principal à compléter devient une fonction `simulation(a, b, n)` renvoyant `S` et `Y`, les déclarations de types et la lecture des paramètres (`readln`) étant supprimées ; les blancs à compléter sont conservés.

Problème, partie III, question 3 : seule la loi gamma de taux 1 étant au programme, la question porte sur la loi de

$$\frac{1}{b} \sum_{i=1}^n (X_i - a)$$

(loi $\gamma(n)$, dont la densité est rappelée) au lieu de

$$\sum_{i=1}^n (X_i - a);$$

la densité de S_n est ensuite obtenue par transformation affine.

Problème, partie III, questions 5.a, 6.b et 6.c : le risque quadratique étant hors programme, il est remplacé par le moment $E((Y_n - a)^2)$ et par la quantité $r_{Z_n}(b)$, définie comme $E((Z_n - b)^2)$; l'existence de $r_{Z_n}(b)$ est demandée explicitement.

Problème, partie III, question 5.b : l'expression « asymptotiquement sans biais » est définie dans l'énoncé (biais tendant vers 0), cette notion n'étant pas au programme sous ce nom.

Les autres questions sont conservées sans modification. Le cas d'égalité du préliminaire (question 2.b) est traité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la continuité monotone. Le sujet ne comporte aucune figure.