



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ECRICOME 2005, Mathématiques option scientifique, version adaptée au programme ECG de mathématiques approfondies

1. EXERCICE

- Il s'agit de décomposer $M(a, b, c)$ selon les coefficients a, b, c , puis de calculer des puissances de matrices et d'en tirer un polynôme annulateur de K , dont les racines contiennent les valeurs propres de K .

Décomposition. En séparant les termes en a, b et c :

$$M(a, b, c) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose donc $I = I_3$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont les coefficients ne

dépendent pas de a, b, c , et l'on a bien $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.

Calcul de J^2 . La i -ème ligne de J^2 est le produit de la i -ème ligne de J par J . La ligne $(0, 0, 1)$ donne la troisième ligne de J , soit $(1, 0, 0)$; la ligne $(0, 1, 0)$ donne la deuxième ligne $(0, 1, 0)$; la ligne $(1, 0, 0)$ donne la première ligne $(0, 0, 1)$. Ainsi

$$J^2 = I$$

Calcul de K^2 . De même, la ligne $(0, 1, 0)$ de K donne la deuxième ligne de K , soit $(1, 0, 1)$; la ligne $(1, 0, 1)$ donne la somme des première et troisième lignes de K , soit $(0, 2, 0)$; la ligne $(0, 1, 0)$ donne $(1, 0, 1)$. Ainsi

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $K^3 = K^2K$. La ligne $(1, 0, 1)$ donne la somme des lignes 1 et 3 de K , soit $(0, 2, 0)$; la ligne $(0, 2, 0)$ donne deux fois la ligne 2 de K , soit $(2, 0, 2)$; la dernière ligne donne $(0, 2, 0)$. Ainsi

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2K$$

Relation entre I , J et K^2 . On lit directement $K^2 = I + J$, c'est-à-dire

$$J = K^2 - I$$

Polynôme annulateur. Comme $K^3 - 2K = 0$, le polynôme $Q(X) = X^3 - 2X = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est annulateur de K .

Valeurs propres possibles. Soit λ une valeur propre réelle de K et $U \neq 0$ tel que $KU = \lambda U$. Alors $K^2U = \lambda^2U$ et $K^3U = \lambda^3U$, donc $0 = (K^3 - 2K)U = (\lambda^3 - 2\lambda)U$. Comme $U \neq 0$, on obtient $\lambda^3 - 2\lambda = 0$: toute valeur propre de K est racine de Q .

Conclusion

$J^2 = I, K^3 = 2K, J = K^2 - I, X^3 - 2X$ annule K , et les seules valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$.

2. Il faut justifier l'existence d'une matrice P inversible avec ${}^t P K P$ diagonale, puis la construire explicitement. La présence de ${}^t P$ (et non P^{-1}) impose de chercher P orthogonale, c'est-à-dire telle que ${}^t P P = I$.

Existence.

Méthode 1 — théorème spectral. La matrice K est symétrique réelle (${}^t K = K$).

D'après le théorème spectral (admis au programme), il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible avec $P^{-1} = {}^t P$ et une matrice diagonale D telles que $K = P D {}^t P$. On en déduit ${}^t P K P = ({}^t P P) D ({}^t P P) = D$, qui est diagonale.

Méthode 2 — construction directe. On détermine les sous-espaces propres de K et on vérifie à la main que trois vecteurs propres normés forment une base orthonormale; la matrice P obtenue convient. Cette méthode prouve l'existence sans invoquer le théorème spectral, et fournit en même temps P et D . Elle est développée ci-dessous.

La méthode 1 donne l'existence immédiatement pour toute matrice symétrique réelle; la méthode 2 n'utilise que des calculs élémentaires et est de toute façon nécessaire pour expliciter P .

Détermination de P et D . Pour $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $KU = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix}$. On résout $KU = \lambda U$

pour chacune des valeurs possibles trouvées à la question 1.

Pour $\lambda = 0$: $y = 0$ et $x + z = 0$, donc $\text{Ker } K = \text{Vect}((1, 0, -1))$.

Pour $\lambda = \sqrt{2}$: $y = \sqrt{2}x$, $y = \sqrt{2}z$ et $x + z = \sqrt{2}y$. Les deux premières équations donnent $z = x$ et $y = \sqrt{2}x$; la troisième est alors vérifiée car $x + z = 2x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}x$. Donc $E_{\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$.

Pour $\lambda = -\sqrt{2}$: $y = -\sqrt{2}x$, $y = -\sqrt{2}z$ et $x + z = -\sqrt{2}y$. On obtient $z = x$, $y = -\sqrt{2}x$, et la troisième équation est vérifiée car $-\sqrt{2}y = 2x = x + z$. Donc $E_{-\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1))$.

Les trois valeurs $-\sqrt{2}$, 0 , $\sqrt{2}$ sont donc effectivement valeurs propres de K , chaque sous-espace propre étant une droite.

On pose, dans l'ordre imposé par $d_{11} < d_{22} < d_{33}$:

$$V_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normes : $\|V_1\|^2 = \frac{1+2+1}{4} = 1$, $\|V_2\|^2 = \frac{1+0+1}{2} = 1$, $\|V_3\|^2 = 1$. Produits

scalaires : $\langle V_1, V_2 \rangle = \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0$, $\langle V_1, V_3 \rangle = \frac{1-2+1}{4} = 0$, $\langle V_2, V_3 \rangle = \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0$. La famille (V_1, V_2, V_3) est orthonormale (ce qui est cohérent avec l'orthogonalité des espaces propres d'une matrice symétrique).

Soit P la matrice de colonnes V_1, V_2, V_3 :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le coefficient (i, j) de ${}^t P P$ vaut $\langle V_i, V_j \rangle$, donc ${}^t P P = I$: P est inversible et $P^{-1} = {}^t P$.

Par ailleurs $KV_1 = -\sqrt{2}V_1$, $KV_2 = 0$, $KV_3 = \sqrt{2}V_3$, ce qui s'écrit $KP = PD$ avec $D = \text{diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. Donc ${}^t P K P = {}^t P P D = D$.

Conclusion

la matrice P ci-dessus est inversible, vérifie ${}^tP = P^{-1}$, et

$$D = {}^tP K P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

avec bien $d_{11} < d_{22} < d_{33}$.

3. On exprime M comme polynôme en K , puis on utilise ${}^tP K P = D$ et $P {}^tP = I$ pour diagonaliser M dans la même base.

Expression de M . Avec $J = K^2 - I$:

$$M = aI + b(K^2 - I) + cK = (a - b)I + cK + bK^2$$

Calcul de ${}^tP M P$. Puisque ${}^tP = P^{-1}$, on a $P {}^tP = I$, d'où

${}^tP K^2 P = {}^tP K P {}^tP K P = D^2 = \text{diag}(2, 0, 2)$. Par linéarité :

$${}^tP M P = (a - b)I + cD + bD^2 = \begin{pmatrix} a + b - \sqrt{2}c & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a + b + \sqrt{2}c \end{pmatrix}$$

On note $\lambda_1 = a + b - \sqrt{2}c$, $\lambda_2 = a - b$, $\lambda_3 = a + b + \sqrt{2}c$ et

$\Delta_M = {}^tP M P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Valeurs propres de M . De $\Delta_M = {}^tP M P$ on tire $MP = P\Delta_M$, soit $MV_i = \lambda_i V_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $U = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$ un vecteur quelconque (la famille (V_1, V_2, V_3) est une base). Alors

$$MU - \mu U = x_1(\lambda_1 - \mu)V_1 + x_2(\lambda_2 - \mu)V_2 + x_3(\lambda_3 - \mu)V_3$$

et, la famille étant libre, $MU = \mu U$ si et seulement si $x_i(\lambda_i - \mu) = 0$ pour tout i . Par conséquent μ est valeur propre de M si et seulement si $\mu \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, et dans ce cas

$$E_\mu(M) = \text{Vect}(V_i : \lambda_i = \mu)$$

Les valeurs propres de M sont donc $a + b - \sqrt{2}c$, $a - b$ et $a + b + \sqrt{2}c$.

Discussion. On a $\lambda_1 = \lambda_3 \iff c = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2b = \sqrt{2}c \iff c = \sqrt{2}b$, et $\lambda_2 = \lambda_3 \iff c = -\sqrt{2}b$. Pour simplifier l'écriture des sous-espaces propres, on utilise les vecteurs non normés $(1, -\sqrt{2}, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$, colinéaires à V_1, V_2, V_3 .

Cas $b = c = 0$: $M = aI$, une seule valeur propre a , et $E_a(M) = \mathbb{R}^3$.

Cas $c = 0$ et $b \neq 0$: $\lambda_1 = \lambda_3 = a + b$ et $\lambda_2 = a - b \neq a + b$. Deux valeurs propres distinctes :

$$E_{a+b}(M) = \text{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1), (1, \sqrt{2}, 1)\right) = \text{Vect}\left((1, 0, 1), (0, 1, 0)\right),$$

$$E_{a-b}(M) = \text{Vect}\left((1, 0, -1)\right).$$

(La deuxième écriture de $E_{a+b}(M)$ s'obtient en prenant la demi-somme et la différence des deux vecteurs.)

Cas $b \neq 0$ et $c = \sqrt{2}b$: $\lambda_1 = \lambda_2 = a - b$ et $\lambda_3 = a + b + 2b = a + 3b \neq a - b$. Deux valeurs propres distinctes :

$$E_{a-b}(M) = \text{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1), (1, 0, -1)\right), E_{a+3b}(M) = \text{Vect}\left((1, \sqrt{2}, 1)\right).$$

Cas $b \neq 0$ et $c = -\sqrt{2}b$: $\lambda_2 = \lambda_3 = a - b$ et $\lambda_1 = a + b + 2b = a + 3b \neq a - b$. Deux valeurs propres distinctes :

$$E_{a-b}(M) = \text{Vect}\left((1, 0, -1), (1, \sqrt{2}, 1)\right), E_{a+3b}(M) = \text{Vect}\left((1, -\sqrt{2}, 1)\right).$$

Cas restant, $c \neq 0$, $c \neq \sqrt{2}b$ et $c \neq -\sqrt{2}b$: les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont deux à deux distinctes et

$$E_{\lambda_1}(M) = \text{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1)), E_{\lambda_2}(M) = \text{Vect}((1, 0, -1)), E_{\lambda_3}(M) = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1)).$$

Ces cas sont exhaustifs et disjoints : si $b = 0$, les conditions $c = \pm\sqrt{2}b$ se réduisent à $c = 0$; si $b \neq 0$, les conditions $c = 0$, $c = \sqrt{2}b$ et $c = -\sqrt{2}b$ sont deux à deux incompatibles.

Conclusion

M a une seule valeur propre si $b = c = 0$, deux valeurs propres distinctes si $(b, c) \neq (0, 0)$ et $c \in \{0, \sqrt{2}b, -\sqrt{2}b\}$, et trois valeurs propres distinctes sinon, les sous-espaces propres étant donnés ci-dessus.

4. a. i. On utilise ${}^t P P = P {}^t P = I$ et l'expression ${}^t P M P = \Delta_M$ obtenue à la question 3.

Avec $a = 4, b = 2, c = \sqrt{2}$: $\lambda_1 = 4 + 2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$, $\lambda_2 = 4 - 2 = 2$, $\lambda_3 = 4 + 2 + 2 = 8$, donc ${}^t P M P = \text{diag}(4, 2, 8)$.

Égalité des normes. On a

$$\|X'\|^2 = {}^t X' X' = {}^t ({}^t P X) ({}^t P X) = {}^t X P {}^t P X = {}^t X X = \|X\|^2,$$

car $P {}^t P = I$.

Expression de f . Comme $X' = {}^t P X$ et $P {}^t P = I$, on a $X = P X'$. Alors

$${}^t X M X = {}^t X' {}^t P M P X' = {}^t X' \text{diag}(4, 2, 8) X' = 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2$$

Enfin $X \neq 0 \iff X' \neq 0$ (car P est inversible), donc le dénominateur $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \|X\|^2$ est non nul.

Conclusion

$$\|X\|^2 = \|X'\|^2 \text{ et, pour tout } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad f(x, y, z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

4. a. ii. On encadre le numérateur à l'aide de la plus petite et de la plus grande des valeurs 2, 4, 8, puis on étudie les cas d'égalité.

Pour $X \neq 0$, on a $X' \neq 0$ et :

$$2(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 \leq 8(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

car la différence entre le terme central et le terme de gauche vaut $2x'^2 + 6z'^2 \geq 0$, et celle entre le terme de droite et le terme central vaut $4x'^2 + 6y'^2 \geq 0$. En divisant par $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$: $2 \leq f(x, y, z) \leq 8$.

Cas d'égalité pour 2. $f(x, y, z) = 2 \iff 2x'^2 + 6z'^2 = 0 \iff x' = z' = 0$. Alors $X' = (0, y', 0)$ avec $y' \neq 0$, et $X = PX' = y'V_2$. Réciproquement, pour $X = tV_2$ avec $t \neq 0$, on a $X' = {}^tP X = t {}^tP V_2 = (0, t, 0)$ (car ${}^tP P = I$), donc $f = 2$. La valeur 2 est atteinte exactement aux points $(t, 0, -t)$, $t \neq 0$.

Cas d'égalité pour 8. $f(x, y, z) = 8 \iff 4x'^2 + 6y'^2 = 0 \iff x' = y' = 0$, donc $X = z'V_3$ avec $z' \neq 0$. La valeur 8 est atteinte exactement aux points $(t, \sqrt{2}t, t)$, $t \neq 0$.

Vérification :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } f(1, 0, -1) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Conclusion

f est minorée par 2 et majorée par 8, ces valeurs étant atteintes; 2 est le minimum de f , atteint exactement sur $\text{Vect}((1, 0, -1)) \setminus \{0\}$, et 8 est le maximum de f , atteint exactement sur $\text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1)) \setminus \{0\}$, c'est-à-dire sur les sous-espaces propres $E_2(M)$ et $E_8(M)$ privés de l'origine.

4. b. i. On exploite la relation $M = B^2$ pour obtenir la commutation, puis la stabilité des sous-espaces propres, qui sont ici des droites.

Commutation. $BM = B \cdot B^2 = B^3 = B^2 \cdot B = MB$.

Stabilité. Soit $X \in E_\lambda$, c'est-à-dire $MX = \lambda X$. Alors

$M(BX) = (MB)X = (BM)X = B(\lambda X) = \lambda BX$, donc $BX \in E_\lambda$.

Vecteurs propres. D'après la question 3, avec $b = 2 \neq 0$ et $c = \sqrt{2}$, on a $c \neq 0$, $c \neq \sqrt{2}b = 2\sqrt{2}$ et $c \neq -2\sqrt{2}$: la matrice M a trois valeurs propres distinctes 4, 2, 8, et chaque sous-espace propre est une droite. Soit X un vecteur propre de M associé à λ : $E_\lambda = \text{Vect}(X)$. Comme $BX \in E_\lambda$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \mu X$; puisque $X \neq 0$, X est vecteur propre de B .

Diagonalité de Δ . Les colonnes V_1, V_2, V_3 de P sont vecteurs propres de M (car $MP = P \text{diag}(4, 2, 8)$). Elles sont donc vecteurs propres de B : il existe μ_1, μ_2, μ_3 réels tels que $BV_i = \mu_i V_i$, soit $BP = P \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Alors

$$\Delta = {}^t P B P = {}^t P P \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

Conclusion

B et M commutent, les sous-espaces propres de M sont stables par B , les vecteurs propres de M sont vecteurs propres de B et $\Delta = {}^t P B P$ est diagonale.

4. b. ii. On résout d'abord l'équation matricielle en Δ , puis on revient à B par la bijection $B \mapsto {}^t P B P$.

Résolution de $\Delta^2 = D_M$, où $D_M = {}^t P M P = \text{diag}(4, 2, 8)$. Soit $\Delta = (\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une

solution.

Toute solution est diagonale : $\Delta D_M = \Delta^3 = D_M \Delta$. Le coefficient (i, j) de ΔD_M vaut $\delta_{ij} d_j$, et celui de $D_M \Delta$ vaut $d_i \delta_{ij}$, où $(d_1, d_2, d_3) = (4, 2, 8)$. Donc $(d_j - d_i) \delta_{ij} = 0$, et comme les d_i sont deux à deux distincts, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. (Ce point est aussi une conséquence de la question b.i lorsque $\Delta = {}^t P B P$ provient d'une solution B .)

Alors $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ et $\Delta^2 = \text{diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2) = \text{diag}(4, 2, 8)$, soit

$$\delta_1 \in \{-2, 2\}, \quad \delta_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \quad \delta_3 \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$$

Réciproquement, ces $2 \times 2 \times 2 = 8$ matrices diagonales sont solutions. L'équation $\Delta^2 = {}^t P M P$ admet exactement 8 solutions.

Retour à B . Pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $\Delta = {}^t P B P$. Comme $P {}^t P = I$, on a $\Delta^2 = {}^t P B P {}^t P B P = {}^t P B^2 P$, donc

$$B^2 = M \iff {}^t P B^2 P = {}^t P M P \iff \Delta^2 = {}^t P M P$$

(la première équivalence car ${}^t P$ et P sont inversibles). L'application $B \mapsto {}^t P B P$ est une bijection de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui-même, de réciproque $\Delta \mapsto P \Delta {}^t P$. Les solutions de $B^2 = M$ sont donc exactement les matrices

$$B = P \text{diag}(\pm 2, \pm \sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) {}^t P$$

et elles sont deux à deux distinctes.

Conclusion

l'équation $B^2 = M$ possède exactement 8 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. EXERCICE

1. On veut minorer u_n . On vérifie d'abord que la suite est bien définie et positive, ce qui suffit ensuite.

Bonne définition et positivité. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Si c'est vrai au rang $n - 1$ (avec $n \geq 1$), alors $n + u_{n-1} \geq 0$, donc $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini et positif.

Minoration. Pour $n = 0 : u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$. Pour $n \geq 1 : u_{n-1} \geq 0$, donc $n + u_{n-1} \geq n$ et, par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

Conclusion

pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. a. Il s'agit d'une inégalité entre fonctions sur $\mathbb{R}^+$; deux approches classiques sont possibles.

Méthode 1 — identité remarquable. Pour $x \geq 0$:

$$\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$$

Méthode 2 — concavité. La fonction $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ avec $r''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0$: elle est concave sur $]0, +\infty[$, donc sa courbe est située sous chacune de ses tangentes sur cet intervalle. La tangente en 1 a pour équation $y = r(1) + r'(1)(x-1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(1+x)$. D'où $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$ pour $x > 0$;

pour $x = 0$, l'inégalité s'écrit $0 \leq \frac{1}{2}$.

La méthode 1 est la plus rapide ici ; la méthode 2 explique d'où vient le majorant (tangente en 1) et se généralise à d'autres fonctions concaves.

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

2. b. On établit la majoration par récurrence à l'aide de 2.a, puis on encadre $\frac{u_{n-1}}{n^2}$.

Récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n) : u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit $u_0 \leq u_0$: vraie.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on applique 2.a à $x = n + 1 + u_n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \frac{1}{2}(n+2+u_n) \leq \frac{1}{2}\left(n+2+n+\frac{u_0}{2^n}\right) = n+1+\frac{u_0}{2^{n+1}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Limite. Pour $n \geq 1$, d'après la positivité et ce qui précède :

$$0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{2^{n-1}n^2}$$

Le majorant tend vers 0 (car $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{u_0}{2^{n-1}n^2} \leq u_0 \frac{1}{n^2}$). Par encadrement, $\frac{u_{n-1}}{n^2} \rightarrow 0$.

Conclusion

pour tout n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$, et $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2. c. On exprime $\frac{u_n}{n}$ et $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ à l'aide de la relation de récurrence, puis on passe à la limite par continuité de la racine carrée.

Limite de $\frac{u_n}{n}$. Pour $n \geq 1$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n + u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}$$

D'après 2.b, $\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2} \rightarrow 0$, et la racine carrée est continue en 0, donc $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$.

Encadrement. Pour $n \geq 1$, $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n + u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$ (il y a même égalité dans l'inégalité de droite proposée par l'énoncé), et $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1$ d'après la question 1.

Limite de $\frac{u_{n-1}}{n}$. Pour $n \geq 2$, $\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$. Le premier facteur est la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ décalée d'un rang, qui tend vers 0 ; le second tend vers 1. Donc $\frac{u_{n-1}}{n} \rightarrow 0$, puis $\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$ par continuité de la racine carrée en 1.

Par encadrement, $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$.

Conclusion

$\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$ et $u_n \sim \sqrt{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. On écrit w_n sous la forme $\sqrt{n}(\sqrt{1 + x_n} - 1)$ avec $x_n \rightarrow 0$. L'énoncé impose l'emploi d'un développement limité ; une seconde méthode, par la quantité conjuguée, est présentée ensuite.

Préliminaire. Pour $n \geq 2$, posons $x_n = \frac{u_{n-1}}{n}$. D'après 2.c, $x_n \rightarrow 0$. De plus

$\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$, en utilisant $u_n \sim \sqrt{n}$ (décalé d'un rang). Enfin

$$w_n = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + x_n} - 1 \right)$$

Méthode 1 — développement limité. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe C^∞ au voisinage de 0, de dérivée $\frac{1}{2}$ en 0; la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0, avec $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Comme $x_n \rightarrow 0$, on a $\varepsilon(x_n) \rightarrow 0$, et, pour n assez grand :

$$w_n = \sqrt{n} \left(\frac{x_n}{2} + x_n \varepsilon(x_n) \right) = \sqrt{n} x_n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x_n) \right) = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x_n) \right)$$

car $\sqrt{n} x_n = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}$. Le premier facteur tend vers 1, le second vers $\frac{1}{2}$, donc $w_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Méthode 2 — quantité conjuguée. Les deux racines étant positives et de somme strictement positive :

$$w_n = \frac{(n + u_{n-1}) - n}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n} (\sqrt{1 + x_n} + 1)} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x_n} + 1}$$

Le premier facteur tend vers 1 et le second vers $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ par continuité, donc $w_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Le développement limité est l'outil systématique pour une forme indéterminée du type $\sqrt{n}(\sqrt{1+x_n}-1)$ et permettrait d'aller plus loin dans l'asymptotique ; la quantité conjuguée est spécifique aux différences de racines carrées, mais évite tout reste à contrôler.

Conclusion

$$(w_n) \text{ converge et } L = \frac{1}{2}.$$

4. On calcule les deux limites, on en déduit l'existence de N_0 par la définition de la limite, puis on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ par la quantité conjuguée.

Première limite. Pour $n \geq 1$:

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Seconde limite. Pour $n \geq 1$, $u_n = w_n + \sqrt{n}$, donc

$$u_n - u_{n-1} = (w_n - w_{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Comme $w_n \rightarrow \frac{1}{2}$ et $w_{n-1} \rightarrow \frac{1}{2}$, on obtient $u_n - u_{n-1} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$.

Existence de N_0 . Par définition de la limite nulle, appliquée avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{2}$; en particulier

$$u_n - u_{n-1} \geq -\frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

Signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} = \frac{(n+1+u_n) - (n+u_{n-1})}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}$$

$$= \frac{1 + u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}$$

Le dénominateur est supérieur ou égal à $\sqrt{n+1} > 0$; donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$.

Monotonie. Pour $n \geq N_0$, $1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion

$\lim(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0$, $\lim(u_n - u_{n-1}) = 0$, et la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang N_0 .

5. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Il s'agit de traduire la relation $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ en une fonction qui s'appelle elle-même pour l'indice $n - 1$, avec le cas de base $u_0 = 1$.

Méthode 1 — fonction récursive (demandée).

Python

```
import numpy as np

def suite(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return np.sqrt(n + suite(n - 1))
```

Explication : si $n = 0$, la fonction renvoie $u_0 = 1$; sinon elle calcule récursivement u_{n-1} par l'appel `suite(n - 1)`, puis renvoie $\sqrt{n + u_{n-1}}$. Chaque appel diminue l'argument de 1, donc le cas de base est atteint après n appels et la fonction termine pour tout entier naturel n .

Code exécuté : suite(1) renvoie 1.4142 ... ($= \sqrt{2}$), suite(2) renvoie 1.8477 ... ($= \sqrt{2 + \sqrt{2}}$), suite(10) renvoie environ 3.676. Pour $n = 100$ et $n = 900$, on obtient numériquement $u_n - \sqrt{n} \approx 0.510$ et 0.504 , ce qui illustre (sans le prouver) la limite $L = \frac{1}{2}$ de la question 3.

Méthode 2 — version itérative (complément, non demandée).

Python

```
import numpy as np

def suite_iter(n):
    u = 1
    for k in range(1, n + 1):
        u = np.sqrt(k + u)
    return u
```

Ici `range(1, n + 1)` parcourt les entiers de 1 à n ; après le passage d'indice k , la variable u contient u_k . Les deux fonctions renvoient les mêmes valeurs (vérifié pour $n = 10$). La version récursive suit littéralement la définition de la suite, mais Python limite par défaut la profondeur des appels récursifs (environ un millier) ; la version itérative ne présente pas cette limite.

3. PROBLÈME

Le préambule rappelle la formule de convolution sous l'hypothèse de continuité de h (sauf éventuellement en un nombre fini de points) prévue par le programme ; il ne comporte pas de question.

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. L'intégrande est continu et positif sur $[0, +\infty[$; la seule difficulté est en $+\infty$, où l'on compare à une intégrale de Riemann.

Pour tout réel α , $t \mapsto (1 + t^2)^{-\alpha}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $1 + t^2 \sim t^2$, et la compatibilité des équivalents avec les puissances donne

$(1 + t^2)^{-\alpha} \sim t^{-2\alpha}$. Les fonctions étant positives, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^\alpha}$ converge si et

seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $2\alpha > 1$ (intégrale de Riemann). Sur $[0, 1]$, l'intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment.

Conclusion

J_α converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. On intègre par parties sur un segment $[0, A]$, puis on fait tendre A vers $+\infty$; la relation de récurrence s'obtient en écrivant $t^2 = (1 + t^2) - 1$.

Convergence. Pour $\alpha \geq 1$, $t \mapsto \frac{t^2}{(1 + t^2)^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $t^{2-2\alpha-2} = t^{-2\alpha}$ avec $2\alpha \geq 2 > 1$: l'intégrale converge.

Intégration par parties. Soit $A > 0$. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{2\alpha(1 + t^2)^\alpha}$, de classe C^1 sur $[0, A]$, avec $u'(t) = 1$ et

$$v'(t) = -\frac{1}{2\alpha} \cdot (-\alpha) \cdot 2t(1 + t^2)^{-\alpha-1} = \frac{t}{(1 + t^2)^{\alpha+1}}$$

Donc

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1 + t^2)^{\alpha+1}} dt = \int_0^A u(t)v'(t) dt = \left[-\frac{t}{2\alpha(1 + t^2)^\alpha} \right]_0^A + \frac{1}{2\alpha} \int_0^A \frac{dt}{(1 + t^2)^\alpha}$$

Le terme entre crochets vaut $-\frac{A}{2\alpha(1+A^2)^\alpha}$. Comme $\alpha \geq 1$ et $1+A^2 \geq 1$, on a

$(1+A^2)^\alpha \geq 1+A^2$, donc $0 \leq \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} \leq \frac{A}{1+A^2} \rightarrow 0$. Par ailleurs

$\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} \rightarrow J_\alpha$ (convergente car $\alpha > \frac{1}{2}$). En faisant tendre A vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$

Relation de récurrence. Les intégrales J_α et $J_{\alpha+1}$ convergent (α et $\alpha+1$ sont supérieurs à $\frac{1}{2}$). Par linéarité des intégrales convergentes :

$$J_\alpha - J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$$

d'où $J_{\alpha+1} = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) J_\alpha$.

Conclusion

pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha$ et $J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$.

3. On calcule J_1 par une primitive, puis J_n en itérant la relation précédente, appliquée aux entiers $\alpha = k \geq 1$.

Calcul de J_1 . Pour $A > 0$, $\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \arctan A - \arctan 0 = \arctan A \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Donc

$$J_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Calcul de J_n . Pour $n \geq 1$, en appliquant la question 2 avec $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$:

$$J_n = J_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}$$

(le produit vide valant 1 pour $n = 1$). Or $2 \cdot 4 \cdots (2n - 2) = 2^{n-1}(n - 1)!$ et

$$1 \cdot 3 \cdots (2n - 3) = \frac{(2n - 2)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n - 2)} = \frac{(2n - 2)!}{2^{n-1}(n - 1)!}. \text{ Donc}$$

$$J_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n - 2)!}{2^{2n-2} ((n - 1)!)^2} = \frac{\pi (2n - 2)!}{2^{2n-1} ((n - 1)!)^2}$$

Vérification par récurrence de la forme close. Pour $n = 1$: $\frac{\pi \cdot 0!}{2 \cdot (0!)^2} = \frac{\pi}{2} = J_1$. Si la formule est vraie au rang n , alors

$$J_{n+1} = \frac{2n - 1}{2n} J_n = \frac{(2n)(2n - 1)}{4n^2} \cdot \frac{\pi(2n - 2)!}{2^{2n-1} ((n - 1)!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

ce qui est la formule au rang $n + 1$. Par exemple $J_2 = \frac{\pi}{4}$ et $J_3 = \frac{3\pi}{16}$.

Conclusion

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et, pour tout } n \geq 1, \quad J_n = \frac{\pi (2n - 2)!}{2^{2n-1} ((n - 1)!)^2}.$$

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

- On montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n$ converge et est strictement positive ; k_n est alors cette intégrale. Le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ est affine ; on l'effectue sur un segment avant de passer à la limite.

Propriétés de g_n . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et paire.

Calcul sur un segment. Pour $A > 0$, le changement de variable $t = \sqrt{n} u$ (affine, de classe C^1) donne

$$\int_0^A g_n(t) dt = \sqrt{n} \int_0^{A/\sqrt{n}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Comme $\frac{n+1}{2} \geq 1 > \frac{1}{2}$, la partie I.1 assure que le membre de droite tend vers $\sqrt{n} \frac{J_{n+1}}{2}$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} g_n$ converge et vaut $\sqrt{n} \frac{J_{n+1}}{2}$.

Partie négative. Par le changement de variable $t = -s$ sur $[-A, 0]$ et la parité de g_n , $\int_{-A}^0 g_n(t) dt = \int_0^A g_n(s) ds$, **donc $\int_{-\infty}^0 g_n$ converge et vaut aussi $\sqrt{n} \frac{J_{n+1}}{2}$.**

On pose $k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = 2\sqrt{n} \frac{J_{n+1}}{2}$. C'est un réel strictement positif, car

$\frac{J_{n+1}}{2}$ est l'intégrale d'une fonction continue, strictement positive. La fonction

$f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ est alors continue, positive sur $\mathbb{R}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = 1$: c'est une densité de probabilité.

Conclusion

$k_n = 2\sqrt{n} \frac{J_{n+1}}{2}$ convient. Pour $n = 1$, $k_1 = 2J_1 = \pi$, ce qui redonne la densité de Cauchy de l'énoncé.

2. a. L'existence de l'espérance équivaut à la convergence absolue de $\int t f_n(t) dt$; on étudie le comportement en $\pm\infty$ par équivalent.

Existence. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_n(t) dt$ converge. La fonction $t \mapsto |t| f_n(t)$ est continue, positive et paire; il suffit donc d'étudier

$\int_0^{+\infty} t g_n(t) dt$ (le facteur $\frac{1}{k_n}$ est sans effet). Quand $t \rightarrow +\infty$:

$$t g_n(t) = t \left(\frac{n+t^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \sim t \left(\frac{t^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}} t^{-n}$$

Par comparaison de fonctions positives et le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} t g_n(t) dt$ converge si et seulement si $n > 1$. Sur $[0, 1]$ il n'y a pas de difficulté.

Valeur. On suppose $n > 1$.

Méthode 1 — imparité. La fonction $t \mapsto t f_n(t)$ est impaire et ses intégrales sur $] -\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ convergent. Le changement de variable $t = -s$ sur un segment $[-A, 0]$

donne $\int_{-A}^0 t f_n(t) dt = - \int_0^A s f_n(s) ds$, d'où, en passant à la limite,

$$\int_{-\infty}^0 t f_n(t) dt = - \int_0^{+\infty} s f_n(s) ds \text{ et } E(X) = 0.$$

Méthode 2 — symétrie de la loi. La variable $-X$ a pour densité $t \mapsto f_n(-t) = f_n(t)$ (transformation affine), donc $-X$ et X ont même loi et donc même espérance : $E(-X) = E(X)$. Par linéarité $E(-X) = -E(X)$, d'où $E(X) = 0$.

La méthode 1 est un calcul direct sur l'intégrale ; la méthode 2 est plus conceptuelle et s'applique à toute variable de loi symétrique admettant une espérance.

Conclusion

X admet une espérance si et seulement si $n > 1$, et dans ce cas $E(X) = 0$.

2. b. On étudie l'existence du moment d'ordre 2, puis on calcule $E(X^2)$ par le changement de variable $t = \sqrt{n}u$ et les résultats de la partie I.

Existence. X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance, c'est-à-dire

si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$ converge (fonction positive). Par parité, on étudie

$\int_0^{+\infty} t^2 g_n(t) dt$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $t^2 g_n(t) \sim n \frac{n+1}{2} t^{1-n}$, et $\int_1^{+\infty} t^{1-n} dt$ converge si et seulement si $n-1 > 1$, c'est-à-dire $n > 2$.

Calcul pour $n > 2$, donc $n \geq 3$. On a $E(X) = 0$ (question a), donc d'après la formule de Koenig-Huygens $V(X) = E(X^2)$, et par parité

$$V(X) = \frac{2}{k_n} \int_0^{+\infty} t^2 g_n(t) dt$$

Pour $A > 0$, le changement de variable affine $t = \sqrt{n}u$ donne

$$\int_0^A t^2 g_n(t) dt = n^{3/2} \int_0^{A/\sqrt{n}} \frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du$$

Méthode 1 — résultat de la partie I.2. Avec $\alpha = \frac{n-1}{2}$, on a $\alpha \geq 1$ car $n \geq 3$, et

$\alpha + 1 = \frac{n+1}{2}$. La partie I.2 donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du = \frac{1}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}}$$

En passant à la limite $A \rightarrow +\infty$:

$$V(X) = \frac{2n^{3/2}}{(n-1)k_n} J_{\frac{n-1}{2}}$$

Vérification de la valeur. La relation de la partie I.2 avec le même α s'écrit

$$J_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-2}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}}, \text{ donc } k_n = 2\sqrt{n} J_{\frac{n+1}{2}} = \frac{2\sqrt{n}(n-2)}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}}. \text{ Comme } J_{\frac{n-1}{2}} > 0 :$$

$$V(X) = \frac{2n^{3/2} J_{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)} \cdot \frac{n-1}{2\sqrt{n}(n-2) J_{\frac{n-1}{2}}} = \frac{n}{n-2}$$

Méthode 2 — décomposition $u^2 = (1+u^2) - 1$. Les intégrales $J_{\frac{n-1}{2}}$ et $J_{\frac{n+1}{2}}$

convergent car $\frac{n-1}{2} > \frac{1}{2}$ pour $n > 2$. Par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2) \frac{n+1}{2}} du = J_{\frac{n-1}{2}} - J_{\frac{n+1}{2}} = J_{\frac{n-1}{2}} - \frac{k_n}{2\sqrt{n}}$$

d'où

$$V(X) = \frac{2n^{3/2}}{k_n} \left(J_{\frac{n-1}{2}} - \frac{k_n}{2\sqrt{n}} \right) = \frac{2n^{3/2}}{k_n} J_{\frac{n-1}{2}} - n$$

Avec $J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n-1}{n-2} J_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{k_n}{2\sqrt{n}}$, on obtient

$$V(X) = \frac{n(n-1)}{n-2} - n = \frac{n}{n-2}.$$

La méthode 1 réutilise directement l'intégration par parties de la partie I ; la méthode 2 ne demande qu'une manipulation algébrique de l'intégrande et la relation de récurrence. Les deux expressions de $V(X)$ obtenues sont égales, d'après cette même relation.

Conclusion

$$X \text{ admet une variance si et seulement si } n > 2; \text{ alors } V(X) = \frac{2n^{3/2}}{(n-1)k_n} J_{n-1} = \frac{n}{n-2}.$$

Partie III : Simulation d'une loi.

1. On exprime l'événement $[\tan \Theta \leq x]$ à l'aide de Θ , grâce à la bijection croissante $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$.

La variable Θ prend ses valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, donc $T = \tan \Theta$ est bien définie. Sa

fonction de répartition est, pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $F_{\Theta}(\theta) = \frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{\pi}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\tan$ étant continue et strictement croissante de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque $\arctan$, on a $[\tan \Theta \leq x] = [\Theta \leq \arctan x]$, et $\arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
Donc

$$F_T(x) = P(\Theta \leq \arctan x) = \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

La fonction F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; T est donc une variable à densité, et une densité est F'_T :

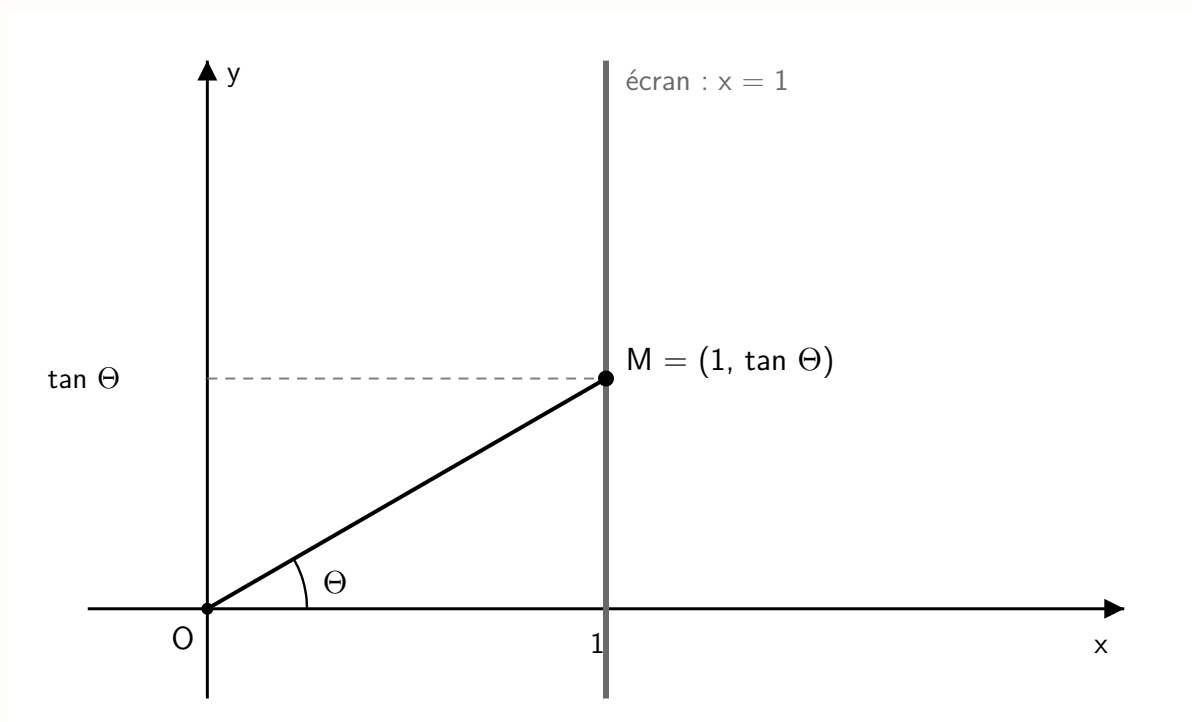
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Conclusion

$$F_T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \text{ et } \tan \Theta \text{ suit la loi de Cauchy, de densité } x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

2. On détermine les coordonnées du point d'intersection de la demi-droite issue de O , d'angle Θ , avec la droite $x = 1$.

Le schéma ci-dessous est tracé pour la valeur $\Theta = \frac{\pi}{6}$, avec $\tan \frac{\pi}{6} \approx 0,577$.



Les points de la demi-droite $[O, M)$ sont les points $(r \cos \Theta, r \sin \Theta)$ avec $r \geq 0$. Comme $\Theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos \Theta > 0$ et la condition $r \cos \Theta = 1$ impose $r = \frac{1}{\cos \Theta}$. Le point M a donc pour coordonnées $\left(1, \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} \right) = (1, \tan \Theta)$.

Conclusion

$Y = \tan \Theta$, et d'après la question 1, Y suit la loi de Cauchy, de densité $y \mapsto \frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

3. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le programme calcule $x = \frac{\sin V}{\cos V}$ avec $V = \pi U - \frac{\pi}{2}$, où U est simulée par `np.random.random()`. On détermine la loi de V , puis on se ramène aux questions 1 et 2.

Loi de V . U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$. Pour $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$P(V \leq v) = P\left(U \leq \frac{v + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right) = \frac{v + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

avec $P(V \leq v) = 0$ si $v < -\frac{\pi}{2}$ et 1 si $v > \frac{\pi}{2}$. C'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: V a la même loi que Θ .

Valeur calculée. Lorsque $V \neq -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $U \neq 0$, on a $\cos V > 0$ et $x = \tan V$. L'événement $[U = 0]$ est de probabilité nulle (la loi de U est à densité). Ainsi, presque sûrement, la valeur affichée est $\tan V$, qui a la même loi que $\tan \Theta$.

Conclusion

le programme simule une variable aléatoire de loi de Cauchy (loi de Y de la question 2) : on simule un angle uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par transformation affine d'une variable uniforme sur $[0, 1[$, puis on prend sa tangente.

Illustration expérimentale (code exécuté) : on simule un échantillon de taille 100000 et l'on compare la fréquence de l'événement $[x \leq 1]$ à $F_T(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$.

Python

```
import numpy as np

np.random.seed(0)

N = 100000

u = np.random.random(N)          # tableau de N tirages uniformes sur [0,1[
x = np.sin(np.pi*u - np.pi/2) / np.cos(np.pi*u - np.pi/2)
print(np.mean(x <= 1))           # fréquence empirique de [x <= 1]
print(np.mean(np.abs(x) <= 1))   # fréquence empirique de [|x| <= 1]
```

L'exécution affiche 0.75003 et 0.49805, proches des valeurs théoriques $\frac{3}{4}$ et

$P(|T| \leq 1) = \frac{2}{\pi} \arctan 1 = \frac{1}{2}$. Cette observation ne constitue pas une preuve.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

1. a. On calcule la fonction de répartition de $-Y$ puis celle de $|Y|$ à l'aide de F , dont la continuité de f assure qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Régularité de F . Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F' = f$ (théorème fondamental du calcul intégral). En particulier F est continue, donc $P([Y = x]) = 0$ pour tout réel x .

Densité de $-Y$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-Y}(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F(-x)$$

car $P(Y = -x) = 0$. La fonction F_{-Y} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto f(-x)$. Donc $-Y$ est à densité et $x \mapsto f(-x)$ en est une densité (continue).

Équivalence. Si Y et $-Y$ ont même loi, alors $F_{-Y} = F$; ces deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on dérive : $f(-x) = f(x)$ pour tout x , donc f est paire. Réciproquement, si f est paire, $F_{-Y} - F$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto f(-x) - f(x) = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc constante ; sa limite en $-\infty$ est $0 - 0 = 0$, donc $F_{-Y} = F$, et $Y, -Y$ ont même loi.

Expression de G . On suppose f paire. Alors $F(x) = F_{-Y}(x) = 1 - F(-x)$ pour tout x ; en particulier $F(0) = \frac{1}{2}$. Pour $x < 0$, $G(x) = P(|Y| \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$:

$$G(x) = P(-x \leq Y \leq x) = F(x) - F(-x) + P(Y = -x) = F(x) - (1 - F(x)) = 2F(x) - 1$$

$|Y|$ est à densité. G est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ (constante) et sur $]0, +\infty[$; elle est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = 0$ et $G(0) = 2F(0) - 1 = 0$. Donc G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0 : $|Y|$ est une variable à densité. Une densité est obtenue en dérivant G en dehors de 0 :

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(la valeur en 0 est choisie arbitrairement).

Conclusion

$x \mapsto f(-x)$ est une densité de $-Y$; Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire; dans ce cas $G(x) = 2F(x) - 1$ pour $x \geq 0$, $G(x) = 0$ pour $x < 0$, et $g = 2f$ sur $[0, +\infty[$, $g = 0$ sur $] -\infty, 0[$ est une densité de $|Y|$.

1. b. On utilise la symétrie de la loi de Y et le fait que $|Y|$ est à densité; on reconstruit F à partir de G , puis on dérive.

Rappel utilisé. Puisque $|Y|$ est à densité, G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, et $G'(x) = g(x)$ en tout point x où g est continue, c'est-à-dire sauf en un nombre fini de points.

Atomes nuls. Pour $x \in \mathbb{R}$, $[Y = x] \subset [|Y| = |x|]$, donc $0 \leq P(Y = x) \leq P(|Y| = |x|) = 0$, puisque la variable à densité $|Y|$ ne charge aucun point.

Relation entre $F(x)$ et $F(-x)$. Y et $-Y$ ont la même fonction de répartition, donc pour tout x :

$$F(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F(-x) + P(Y = -x) = 1 - F(-x) - F(-x)$$

Expression de F à l'aide de G . Pour $x \geq 0$:

$$G(x) = P(-x \leq Y \leq x) = F(x) - F(-x) + P(Y = -x) = F(x) - (1 - F(x)) = 2F(x) - 1$$

donc $F(x) = \frac{1 + G(x)}{2}$. Pour $x < 0$, on a $-x > 0$, donc

$$F(x) = 1 - F(-x) = 1 - \frac{1 + G(-x)}{2} = \frac{1 - G(-x)}{2}.$$

Y est à densité. Notons S l'ensemble fini des points où G n'est pas de classe C^1 . La fonction F est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$; en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - G(-x)}{2} = \frac{1 - G(0)}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } F(0) = \frac{1 + G(0)}{2} = \frac{1}{2}, \text{ car}$$

$G(0) = P(|Y| \leq 0) = P(Y = 0) = 0$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 en dehors de l'ensemble fini $S \cup (-S) \cup \{0\}$, avec

$$F'(x) = \frac{G'(x)}{2} \text{ si } x > 0, \quad F'(x) = \frac{G'(-x)}{2} \text{ si } x < 0$$

Donc Y est une variable à densité, et une densité est donnée, sauf éventuellement en un nombre fini de points, par

$$f(x) = \frac{1}{2} g(|x|)$$

Conclusion

$$P([Y = x]) = 0 \text{ pour tout } x, F(x) = 1 - F(-x), \quad F(x) = \frac{1 + G(x)}{2} \text{ si } x \geq 0 \text{ et } F(x) = \frac{1 - G(-x)}{2} \text{ si } x < 0; Y \text{ est à densité, de densité } x \mapsto \frac{1}{2} g(|x|).$$

2. On travaille sur un segment $[A, B]$, on effectue le changement de variable imposé, puis on fait tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$.

L'intégrande $t \mapsto e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$ est continu et positif sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 — changement de variable $u = e^{2t}$. Soient $A < B$ réels. La fonction $t \mapsto e^{2t}$ est de classe C^1 sur $[A, B]$, de dérivée $2e^{2t}$, donc $du = 2e^{2t} dt$ et

$$\int_A^B e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_{e^{2A}}^{e^{2B}} e^{-\frac{cu}{2}} du = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{c} e^{-\frac{cu}{2}} \right]_{e^{2A}}^{e^{2B}} = \frac{1}{c} \left(e^{-\frac{c e^{2A}}{2}} - e^{-\frac{c e^{2B}}{2}} \right)$$

Méthode 2 — primitive directe. La fonction $\Phi_c : t \mapsto -\frac{1}{c} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée vaut $-\frac{1}{c} \cdot \left(-\frac{c}{2} \cdot 2e^{2t} \right) e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} = e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$. On retrouve donc

$$\int_A^B = \Phi_c(B) - \Phi_c(A), \text{ soit la même expression.}$$

La méthode 1 est celle imposée et ramène à une exponentielle simple; la méthode 2, plus rapide, suppose de reconnaître une dérivée de la forme $v' e^v$, ce que le changement de variable rend apparent.

Passage à la limite. Quand $A \rightarrow -\infty$, $e^{2A} \rightarrow 0$ donc $e^{-\frac{c e^{2A}}{2}} \rightarrow 1$; quand $B \rightarrow +\infty$, $e^{2B} \rightarrow +\infty$ et, comme $c > 0$, $e^{-\frac{c e^{2B}}{2}} \rightarrow 0$. En prenant par exemple $A = 0$ puis $B = 0$, on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty}$ et de $\int_{-\infty}^0$, puis la valeur totale.

Conclusion

l'intégrale converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \frac{1}{c}.$

3. a. On calcule la fonction de répartition de Z à partir de celle de $|X|$, connue grâce à la question 1.a.

Loi de $|X|$. La densité φ est continue et paire sur $\mathbb{R}$; d'après 1.a, en notant Φ la fonction de répartition de X (loi normale centrée réduite), $|X|$ a pour fonction de répartition $G(x) = 2\Phi(x) - 1$ pour $x \geq 0$, $G(x) = 0$ pour $x < 0$.

Fonction de répartition de Z . Comme X est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $|X| > 0$ et $Z = \ln |X|$ est bien définie. Pour $z \in \mathbb{R}$, la fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $[\ln |X| \leq z] = [|X| \leq e^z]$, donc

$$F_Z(z) = G(e^z) = 2\Phi(e^z) - 1$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions C^1 , $\Phi' = \varphi$ étant continue). Donc Z est à densité, de densité

$$f_Z(z) = 2e^z \varphi(e^z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^z e^{-\frac{e^{2z}}{2}}$$

Densité de $-Z$. La densité f_Z est continue sur $\mathbb{R}$; d'après 1.a, $-Z$ a pour densité

$$f_{-Z}(z) = f_Z(-z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-z} e^{-\frac{e^{-2z}}{2}}$$

Conclusion

Z est à densité, de densité $z \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{z - \frac{e^{2z}}{2}}$, et $-Z$ a pour densité $z \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-z - \frac{e^{-2z}}{2}}$.

3. b. On écrit $\ln \left| \frac{X}{X'} \right|$ comme somme de deux variables indépendantes à densité et l'on applique le produit de convolution rappelé en préambule, l'intégrale obtenue étant celle de la question 2.

Décomposition. X' étant à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, le quotient est bien défini, et $\ln \left| \frac{X}{X'} \right| = \ln |X| - \ln |X'| = Z + (-Z')$ avec $Z' = \ln |X'|$. La variable Z est une fonction de X seule et $-Z'$ une fonction de X' seule ; X et X' étant indépendantes, Z et $-Z'$ sont indépendantes (lemme des coalitions). La variable X' ayant la même densité que X , la question a donne une densité de $-Z' : f_{-Z'}(s) = f_Z(-s)$.

Calcul de la convolée. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_Z(t) f_{-Z'}(x-t) &= f_Z(t) f_Z(t-x) = \frac{2}{\pi} e^t e^{-\frac{e^{2t}}{2}} e^{t-x} e^{-\frac{e^{2t-x}}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-x} e^{2t} e^{-\frac{(1+e^{-2x})e^{2t}}{2}} \end{aligned}$$

On applique la question 2 avec $c = 1 + e^{-2x} > 0$: l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{-Z'}(x-t) dt = \frac{2}{\pi} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-x} e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

Application du rappel. La fonction h est ainsi définie sur tout $\mathbb{R}$, et elle est continue sur $\mathbb{R}$ d'après son expression explicite. D'après le résultat rappelé en préambule, h est une densité de $Z + (-Z') = \ln \left| \frac{X}{X'} \right|$.

Conclusion

une densité de $\ln \left| \frac{X}{X'} \right|$ est $h : x \mapsto \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

3. c. Question adaptée au programme actuel.

On obtient la loi de $W = \left| \frac{X}{X'} \right| = e^V$, avec $V = \ln \left| \frac{X}{X'} \right|$, par sa fonction de répartition, puis la loi de $\frac{X}{X'}$ par la question 1.b, grâce au résultat admis sur la symétrie.

Densité de W . Notons H la fonction de répartition de V ; comme h est continue, H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $H' = h$. La variable W est à valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour $w \leq 0$, $F_W(w) = 0$. Pour $w > 0$, par stricte croissance de $\ln$:

$$F_W(w) = P(V \leq \ln w) = H(\ln w)$$

F_W est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et continue en 0 car $H(\ln w) \rightarrow \lim_{-\infty} H = 0$ quand $w \rightarrow 0^+$. Donc W est à densité, et pour $w > 0$:

$$F'_W(w) = \frac{1}{w} h(\ln w) = \frac{1}{w} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{w}{w^2 + 1} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + w^2}$$

Une densité de $\left| \frac{X}{X'} \right|$ est donc $g_W(w) = \frac{2}{\pi(1 + w^2)}$ si $w \geq 0$ et $g_W(w) = 0$ si $w < 0$.

Résultat admis dans cette version adaptée : les couples (X, X') et $(-X, X')$ étant formés de variables indépendantes ayant respectivement les mêmes lois, les variables $\frac{X}{X'}$ et $\frac{-X}{X'}$ ont la même loi. Il intervient ici pour vérifier l'hypothèse de symétrie de la question 1.b.

Loi de $\frac{X}{X'}$. Posons $R = \frac{X}{X'}$. D'après le résultat admis, R et $-R = \frac{-X}{X'}$ ont la même loi; d'après ce qui précède, $|R| = W$ est à densité, de densité g_W . La question 1.b s'applique : R est à densité et une densité est, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

$$x \mapsto \frac{1}{2} g_W(|x|) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut la prendre comme densité en tout point.

Conclusion

$\left| \frac{X}{X'} \right|$ admet la densité $w \mapsto \frac{2}{\pi(1+w^2)}$ sur $[0, +\infty[$ (nulle sur $] -\infty, 0[$), et $\frac{X}{X'}$ suit la loi de Cauchy, de densité $f_1 : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

Relevé des adaptations

Exercice 2, question 5 : la fonction récursive demandée en Pascal est demandée en Python, avec l'indication de la fonction `np.sqrt` de `numpy`. Code adapté en Python. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème, préambule : le rappel de la formule de convolution est complété par l'hypothèse « si h est définie et continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ». Justification : c'est la forme sous laquelle le résultat figure au programme ; elle est vérifiée en IV.3.b.

Partie III, question 3 : le programme Pascal est remplacé par un programme Python équivalent, utilisant `np.random.random()`, qui simule une loi uniforme sur $[0, 1[$ (et non $]0, 1[$ comme la fonction `random` de Pascal). Code adapté en Python. La différence ne porte que sur l'événement $[U = 0]$, de probabilité nulle, qui est traité dans le corrigé ; l'instruction `randomize`, sans équivalent nécessaire, est supprimée.

Partie IV, question 3.c : ajout du résultat admis selon lequel $\frac{X}{X'}$ et $\frac{-X}{X'}$ ont la même loi. Justification : établir que deux fonctions de couples de variables indépendantes de mêmes lois marginales ont même loi relève de la loi conjointe d'un couple à densité, dont le calcul général (densité jointe, intégrale double) est hors du référentiel ; seule la conséquence particulière nécessaire est admise. La détermination de la loi de $\left| \frac{X}{X'} \right|$ et l'utilisation de la question 1.b restent à la charge du candidat.

Partie III, question 2 : le corrigé comporte un schéma explicatif retranscrit en SVG,

calculé exactement pour $\Theta = \frac{\pi}{6}$; l'énoncé original ne comporte aucune figure.

Points restant à vérifier

Partie III, question 3 : dans le PDF, l'instruction Pascal est imprimée sous la forme d'une fraction «sin sur cos» appliquée à $(\pi \cdot u - \pi/2)$; elle a été interprétée comme

$\frac{\sin(\pi u - \pi/2)}{\cos(\pi u - \pi/2)}$, seule lecture cohérente avec la question.