



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2004

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

1. EXERCICE.

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ lorsque c'est commode, et on note $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$.

Question 1.

Il s'agit de diagonaliser S . On utilise le résultat du cours : une matrice d'ordre n possédant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes est diagonalisable.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, choisissons un vecteur propre $V_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul, associé à $\lambda_i : SV_i = \lambda_i V_i$.

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre. La famille $(V_1, \dots, V_n)$ est donc une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace de dimension n : c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit P la matrice dont les colonnes sont $V_1, \dots, V_n$. Ses colonnes formant une base, P est de rang n , donc inversible.

La i -ième colonne de SP est $SV_i = \lambda_i V_i$, qui est aussi la i -ième colonne de PD avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Donc $SP = PD$, puis, en multipliant à gauche par P^{-1} :

$$P^{-1}SP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Conclusion

il existe P inversible telle que $P^{-1}SP = D$ soit diagonale. Dans toute la suite, on fixe un tel P et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les colonnes de P étant rangées dans cet ordre.

Question 2.a.

On doit montrer que f est linéaire et bijective. Un point préliminaire est essentiel : les réels $\mu_i = \lambda_i^k$ sont deux à deux distincts.

Préliminaire : pour k impair, l'application $x \mapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soient $x < y$ réels ; $k \geq 1$ car k est impair.

- Si $0 \leq x < y$: en multipliant k inégalités entre réels positifs, $x^k < y^k$.
- Si $x < y \leq 0$: $0 \leq -y < -x$ donc $(-y)^k < (-x)^k$; comme k est impair, $(-t)^k = -t^k$, d'où $-y^k < -x^k$, soit $x^k < y^k$.
- Si $x < 0 < y$: $x^k = -(-x)^k < 0 < y^k$.

Cette application est donc injective. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, les réels $\mu_1 = \lambda_1^k, \dots, \mu_n = \lambda_n^k$ sont deux à deux distincts.

Linéarité : pour $T_1, T_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout i , $(\alpha T_1 + T_2)(\mu_i) = \alpha T_1(\mu_i) + T_2(\mu_i)$, donc $f(\alpha T_1 + T_2) = \alpha f(T_1) + f(T_2)$. L'application f est linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

Dimensions : $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ admet pour base $(1, X, \dots, X^{n-1})$, donc $\dim E = n = \dim \mathbb{R}^n$.

Méthode 1 — Noyau et dimensions.

Soit $T \in \text{Ker } f$. Alors $T(\mu_1) = \dots = T(\mu_n) = 0$: T admet n racines deux à deux distinctes. Or un polynôme non nul de degré au plus $n - 1$ admet au plus $n - 1$ racines. Donc $T = 0$ et $\text{Ker } f = \{0\}$: f est injective.

Par le théorème du rang, $\text{rg } f = \dim E - \dim \text{Ker } f = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc f est surjective.

Méthode 2 — Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, posons

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}$$

(les dénominateurs sont non nuls car les μ_j sont distincts ; pour $n = 1$, le produit est vide et $L_1 = 1$). Le polynôme L_i est de degré $n - 1$, donc $L_i \in E$, et $L_i(\mu_i) = 1$, $L_i(\mu_l) = 0$ pour $l \neq i$. Ainsi $f(L_i) = e_i$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'image de f est un sous-espace vectoriel contenant une base de $\mathbb{R}^n$: f est surjective. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = n - n = 0$: f est injective. De plus, par linéarité,

$$f\left(\sum_i y_i L_i\right) = (y_1, \dots, y_n),$$

ce qui donne explicitement f^{-1} .

Comparaison : la méthode 1 est la plus rapide (on compte les racines) ; la méthode 2 construit l'application réciproque, utile lorsqu'on veut le polynôme U de façon explicite.

Conclusion

f est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Question 2.b.

Le vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ appartient à $\mathbb{R}^n$. Comme f est bijective, il admet un unique antécédent $U \in E$ par f , c'est-à-dire un unique $U \in E$ tel que $(U(\lambda_1^k), \dots, U(\lambda_n^k)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Conclusion

il existe un unique polynôme $U \in E$ tel que $U(\lambda_i^k) = \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (d'après la méthode 2,

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$$

).

Question 3.

On calcule $R(D)$ grâce au caractère diagonal de D , puis on transporte le résultat à S par la similitude.

Écrivons

$$U = \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^j.$$

Alors

$$R = \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^{jk} - X,$$

et pour toute matrice carrée M , comme $(M^k)^j = M^{jk}$:

$$R(M) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j M^{jk} - M = U(M^k) - M$$

Polynôme d'une matrice diagonale : si $\Delta = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, alors $\Delta^j = \text{diag}(d_1^j, \dots, d_n^j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc par combinaison linéaire $Q(\Delta) = \text{diag}(Q(d_1), \dots, Q(d_n))$ pour tout polynôme Q .

Ainsi $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ et

$$U(D^k) = \text{diag}(U(\lambda_1^k), \dots, U(\lambda_n^k)) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

d'où $R(D) = U(D^k) - D = 0$.

Passage à S : on a $S = PDP^{-1}$. Par récurrence, $S^j = PD^jP^{-1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $j = 0$ ($I_n = PI_nP^{-1}$) et, si c'est vrai au rang j , $S^{j+1} = PD^jP^{-1}PDP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$. Par linéarité, $Q(S) = PQ(D)P^{-1}$ pour tout polynôme Q . Donc :

$$R(S) = PR(D)P^{-1} = 0$$

Remarque : si $k \geq 3$, $U(X^k)$ ne contient que des puissances de X multiples de k , donc le coefficient de X dans R vaut -1 et R est non nul. Si $k = 1$ et $n \geq 2$, $U - X \in E$ s'annule en les n réels distincts λ_i , donc $U = X$ et $R = 0$; mais dans ce cas l'hypothèse $AS^k = S^k A$ est exactement $AS = SA$ et la suite est immédiate.

Conclusion

$R(D) = 0$ et $R(S) = 0$, c'est-à-dire que R est un polynôme annulateur de D et de S .

Question 4.a.

Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $p = 0$, $S^0 = I_n$ et $AI_n = I_n A$.

Hérédité : supposons $AS^{pk} = S^{pk} A$ pour un certain p . Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence puis $AS^k = S^k A$:

$$AS^{(p+1)k} = (AS^{pk})S^k = S^{pk}(AS^k) = S^{pk}S^k A = S^{(p+1)k} A$$

Conclusion

pour tout $p \in \mathbb{N}$, $AS^{pk} = S^{pk} A$.

Question 4.b.

Méthode 1 — Avec le polynôme annulateur R .

D'après la question 3, $R(S) = U(S^k) - S = 0$, donc

$$S = U(S^k) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j S^{jk}$$

En utilisant la question 4.a avec $p = j$ pour chaque j :

$$AS = \sum_{j=0}^{n-1} u_j AS^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j S^{jk} A = SA$$

Méthode 2 — Avec les vecteurs propres.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et V_i la i -ième colonne de P (question 1). Par récurrence, $S^k V_i = \lambda_i^k V_i$.
Donc

$$S^k(AV_i) = A(S^k V_i) = \lambda_i^k AV_i$$

Déterminons les vecteurs W tels que $S^k W = \lambda_i^k W$. On a $S^k = PD^k P^{-1}$ (question 3).
Posons $Y = P^{-1}W$, de coordonnées $y_1, \dots, y_n$. L'égalité $S^k W = \lambda_i^k W$ équivaut à
 $D^k Y = \lambda_i^k Y$, soit $\lambda_l^k y_l = \lambda_i^k y_l$ pour tout l . Comme les λ_l^k sont deux à deux distincts
(question 2.a), $y_l = 0$ pour $l \neq i$. Donc $W = PY = y_i V_i$ est colinéaire à V_i .

Ainsi $AV_i = c_i V_i$ pour un réel c_i . On en déduit :

$$SAV_i = c_i SV_i = c_i \lambda_i V_i \quad \text{et} \quad ASV_i = \lambda_i AV_i = \lambda_i c_i V_i$$

Donc $(SA - AS)V_i = 0$ pour tout i , c'est-à-dire $(SA - AS)P = 0$. Comme P est inversible, $SA - AS = 0$.

Comparaison : la méthode 1 utilise la construction préparée par l'énoncé (S est un polynôme en S^k). La méthode 2 montre directement le rôle de l'impairité : $x \mapsto x^k$ étant

injective, S^k a les mêmes droites propres que S , et toute matrice qui commute avec S^k laisse stables ces droites.

Conclusion

$$AS = SA.$$

Question 5.a.

On exhibe deux vecteurs propres. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, non nuls. On a

$$SX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1, \quad SX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_2$$

Donc 1 et -1 sont valeurs propres de S . Une matrice d'ordre 2 ne peut avoir plus de deux valeurs propres distinctes (des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$).

Conclusion

S possède exactement deux valeurs propres distinctes, 1 et -1 ; elle vérifie donc les hypothèses de l'exercice avec $n = 2$.

Question 5.b.

Calcul de S^2 :

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S^{2p} = (S^2)^p = I_2$, donc $AS^{2p} = A = S^{2p}A$: A commute avec toute

puissance paire de S .

En revanche :

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad SA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices diffèrent (coefficient $(1, 1) : -1 \neq 2$), donc $AS \neq SA$.

Interprétation : avec $k = 2$ pair, $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$, les réels λ_i^k ne sont plus distincts et l'application f de la question 2 n'est plus injective. L'hypothèse « k impair » est donc indispensable.

Conclusion

A commute avec toutes les puissances paires de S mais pas avec S .

2. EXERCICE.

Question 2.1.1.

On utilise le théorème de la bijection pour une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

Sur $[0, \frac{\pi}{4}] \subset [0, \pi]$, la fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante, et

$\cos x \geq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Donc $f = \frac{1}{\cos}$ est bien définie, continue, et strictement croissante sur I (l'inverse d'une fonction strictement positive strictement décroissante est strictement croissante).

On peut aussi le voir par la dérivée : $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, qui est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{4}]$ et nulle seulement en 0.

Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I) = [f(0), f(\frac{\pi}{4})]$. Or

$$f(0) = 1 \text{ et } f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}.$$

Conclusion

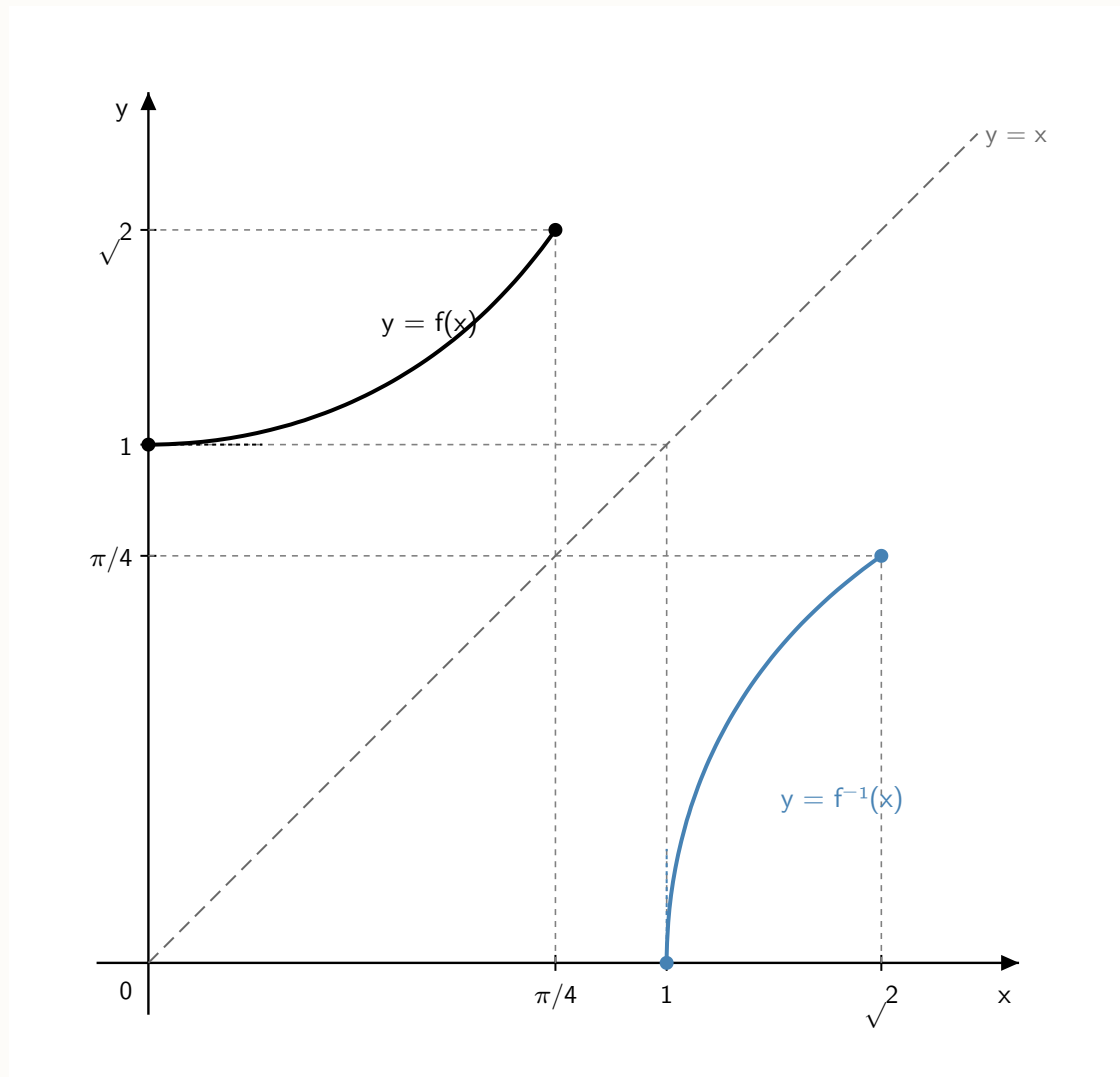
f réalise une bijection de I sur $J = [1, \sqrt{2}]$; sa réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante sur J , à valeurs dans I .

Question 2.1.2.

Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Éléments utiles au tracé :

- $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$: tangente horizontale au point $(0, 1)$; par symétrie, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point $(1, 0)$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ et $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \sqrt{2}$; par symétrie, la tangente à la courbe de f^{-1} au point $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ a pour pente $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $f''(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} > 0$ (voir la question 2.2.3) : f est convexe sur I , et f^{-1} , réciproque croissante d'une fonction convexe croissante, a une courbe tournée vers le bas (concave).
- Sur I , $f(x) \geq 1 > x$ car $x \leq \frac{\pi}{4} < 1$: la courbe de f est au-dessus de la droite $y = x$, celle de f^{-1} en dessous.



Conclusion

les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice, celle de f allant de $(0, 1)$ à $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$, celle de f^{-1} allant de $(1, 0)$ à $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Question 2.1.3.

Soit $x \in J$ et $\theta = f^{-1}(x) \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Par définition, $f(\theta) = x$, soit $\frac{1}{\cos \theta} = x$, donc $\cos \theta = \frac{1}{x}$ ($x \geq 1$, donc $x \neq 0$).

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \subset [0, \pi]$, $\sin \theta \geq 0$. De $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, on tire $\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{x^2}$, quantité positive puisque $x \geq 1$. Le réel positif $\sin \theta$ est donc la racine carrée de ce nombre.

Conclusion

$$\text{pour tout } x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Question 2.1.4.

Remarque préalable : $\sqrt{2}$ est l'extrémité droite de $J = [1, \sqrt{2}]$; la dérivabilité en $\sqrt{2}$ s'entend à gauche.

Méthode 1 — Théorème de dérivation de la réciproque.

f est dérivable sur I , de dérivée $f'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$. Soit $x \in J \setminus \{1\} =]1, \sqrt{2}]$ et $\theta = f^{-1}(x)$.
Comme $f(0) = 1 \neq x$, $\theta \neq 0$, donc $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$ et $\sin \theta > 0$: $f'(\theta) \neq 0$.

Le théorème de dérivation de la réciproque assure alors que f^{-1} est dérivable en x et que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$$

D'après la question 2.1.3 :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1/x^2}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

car $x > 0$ donne $\sqrt{x^2} = x$.

Méthode 2 — Expression explicite à l'aide de l'arctangente.

Soit $x \in J$ et $\theta = f^{-1}(x)$. D'après la question 2.1.3,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que arctan est la réciproque de la restriction de tan à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient :

$$\forall x \in J, \quad f^{-1}(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$$

Sur $]1, \sqrt{2}]$, $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive, la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, f^{-1} est dérivable sur $]1, \sqrt{2}]$, et :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Comparaison : la méthode 1 est générale (elle ne demande aucune formule pour f^{-1}) ; la méthode 2 donne en plus une expression explicite de f^{-1} avec une fonction usuelle du programme.

Complément : f^{-1} n'est pas dérivable en 1. Sinon, en dérivant $f(f^{-1}(x)) = x$ en $x = 1$, on obtiendrait $f'(0)(f^{-1})'(1) = 1$, impossible car $f'(0) = 0$.

Conclusion

$$f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \setminus \{1\} \text{ et } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Question 2.1.5.

Une fonction dérivable en un point admet un développement limité d'ordre 1 en ce point, donné par sa valeur et sa dérivée. Ici $\sqrt{2}$ est l'extrémité droite de J : le développement est valable à gauche de $\sqrt{2}$.

On a $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ (car $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$) et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion

quand x tend vers $\sqrt{2}$ par valeurs inférieures,

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + o(x - \sqrt{2})$$

Question 2.2.1.

La fonction $\cos$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, intervalle ouvert qui contient I . Comme inverse d'une fonction de classe C^∞ qui ne s'annule pas, $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est de classe C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc sa restriction f est de classe C^∞ sur I .

Conclusion

f est de classe C^∞ sur I .

Question 2.2.2.

On construit les polynômes par récurrence, ce qui fournit en même temps la relation de la question 2.2.4.

Définissons $P_1 = X$ et, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$. Ce sont bien des polynômes. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}(n)$:

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1} x}.$$

Initialisation : $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2 x}.$

Hérédité : supposons $\mathcal{H}(n)$. On dérive $f^{(n)}(x) = P_n(\sin x) (\cos x)^{-(n+1)}$ comme un produit :

$$f^{(n+1)}(x) = P'_n(\sin x) \cos x (\cos x)^{-(n+1)} + P_n(\sin x) (n+1) \sin x (\cos x)^{-(n+2)}$$

En réduisant au dénominateur $\cos^{n+2} x$ et en utilisant $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1 - \sin^2 x)P'_n(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{\cos^{n+2} x} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+2} x}$$

Unicité : si deux polynômes Q_1, Q_2 vérifient $\frac{Q_1(\sin x)}{\cos^{n+1} x} = \frac{Q_2(\sin x)}{\cos^{n+1} x}$ pour tout $x \in I$,

alors $Q_1 - Q_2$ s'annule sur $\sin(I) = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, ensemble infini, donc $Q_1 = Q_2$. Le polynôme P_n de l'énoncé est donc unique et coïncide avec celui construit ci-dessus.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1} x}$
pour tout $x \in I$.

Question 2.2.3.

On a déjà $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, donc $P_1 = X$.

On dérive le quotient :

$$f''(x) = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot (-2 \cos x \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

Par unicité (question 2.2.2), $P_2 = 1 + X^2$. On vérifie la cohérence avec la relation de récurrence : $(1 - X^2) \cdot 1 + 2X \cdot X = 1 + X^2$.

Conclusion

$P_1 = X$ et $P_2 = X^2 + 1$.

Question 2.2.4.

D'après la question 2.2.2, les polynômes définis par $P_1 = X$ et

$P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$ conviennent, et les polynômes P_n sont uniques. Donc la relation est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calcul de P_3 avec $n = 2$:

$$P_3 = (1 - X^2) \cdot 2X + 3X(1 + X^2) = 2X - 2X^3 + 3X + 3X^3 = X^3 + 5X$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n, \text{ et } P_3 = X^3 + 5X.$$

Question 2.2.5.

Les premiers calculs suggèrent : P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

Montrons-le par récurrence.

Initialisation : $P_1 = X$ convient.

Hérédité : supposons $P_n = X^n + Q_n$ avec $\deg Q_n \leq n-1$. Alors $P'_n = nX^{n-1} + Q'_n$ avec $\deg Q'_n \leq n-2$. Les termes de degré $n+1$ de P_{n+1} proviennent de $-X^2 \cdot nX^{n-1} = -nX^{n+1}$ et de $(n+1)X \cdot X^n = (n+1)X^{n+1}$; tous les autres termes sont de degré au plus n . Le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} vaut donc $-n + (n+1) = 1 \neq 0$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

Question 2.3.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto [f(x)]^n = \frac{1}{\cos^n x}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$ (question 2.1.1), donc I_n est bien défini. On remarque que la formule

$$I_n = \int_0^{\pi/4} [f(x)]^n dx \text{ reste vraie pour } n = 0, \text{ puisque } \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{\pi}{4} = I_0.$$

Calcul de I_2 : une primitive de $\frac{1}{\cos^2}$ sur I est $\tan$, donc

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$$

Conclusion

la suite est bien définie et $I_2 = 1$.

Question 2.3.2.

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t) + b(1-t)}{1-t^2} = \frac{(a+b) + (a-b)t}{1-t^2}$$

L'égalité voulue équivaut à $(a+b) + (a-b)t = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Le polynôme $(a+b-1) + (a-b)X$ a alors une infinité de racines, il est donc nul : $a+b=1$ et $a-b=0$. Réciproquement, $a=b=\frac{1}{2}$ conviennent.

Conclusion

$$a=b=\frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right).$$

Question 2.3.3.

On écrit l'intégrande sous la forme $g(\sin x) \cos x$ pour effectuer le changement de variable $t = \sin x$. Pour $x \in I$:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$$

La fonction $\sin$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, et $g : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \subset [0, 1[$. Le changement de variable $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, donne :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1 - t^2}$$

Avec la question 2.3.2, et les primitives $-\ln(1-t)$ de $\frac{1}{1-t}$ et $\ln(1+t)$ de $\frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1[$:

$$I_1 = \frac{1}{2} [\ln(1+t) - \ln(1-t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right)$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2 + \sqrt{2}$:

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{4 - 2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$$

Conclusion

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln((1 + \sqrt{2})^2) = \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ (environ } 0,881\text{)}.$$

Question 2.3.4.

Pour $x \in I$, $f(x) \geq 1$, donc $[f(x)]^{n+1} - [f(x)]^n = [f(x)]^n(f(x) - 1) \geq 0$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $I_{n+1} - I_n \geq 0$.

L'inégalité est même stricte : la fonction $x \mapsto [f(x)]^n(f(x) - 1)$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur I (elle est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{4}])$, donc son intégrale est strictement positive.

Conclusion

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante (et l'on a aussi $I_0 < I_1$).

Question 2.3.5.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé original affirme l'inégalité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, la borne $\frac{\pi}{4} - 1$ est strictement négative : l'intervalle d'intégration

sort de I , et la première inégalité est fausse, car $\int_{\frac{\pi}{4}-1}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = I_1 + \int_{\frac{\pi}{4}-1}^0 \frac{dx}{\cos x} > I_1$.

L'énoncé est rectifié en « pour tout $n \geq 2$ », ce qui ne change pas l'étude de la limite.

Inégalités. Soit $n \geq 2$ et $\alpha_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$, on a $\alpha_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

Par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale (la fonction intégrée est positive et $0 < \alpha_n$) :

$$I_n = \int_0^{\alpha_n} \frac{dx}{\cos^n x} + \int_{\alpha_n}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n x} \geq \int_{\alpha_n}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n x}$$

Pour $x \in [\alpha_n, \frac{\pi}{4}]$, la décroissance de $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donne $0 < \cos x \leq \cos \alpha_n$, donc $\frac{1}{\cos^n x} \geq \frac{1}{\cos^n \alpha_n}$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\alpha_n}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n x} \geq \left(\frac{\pi}{4} - \alpha_n\right) \frac{1}{\cos^n \alpha_n} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Comportement de la suite.

Méthode 1 — Avec la minoration imposée.

Posons $h = \frac{1}{n^2} \in]0, \frac{1}{4}]$. Par la formule d'addition du cosinus :

$$\cos \alpha_n = \cos \frac{\pi}{4} \cos h + \sin \frac{\pi}{4} \sin h = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos h + \sin h)$$

On a $\cos h + \sin h > 0$ (car $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos h \leq 1$ et $\sin h \leq h$ (la fonction $u \mapsto u - \sin u$ a pour dérivée $1 - \cos u \geq 0$ et s'annule en 0)). Donc $0 < \cos h + \sin h \leq 1 + h$, puis :

$$0 < \cos^n \alpha_n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$$

Par convexité de l'exponentielle (inégalité de la tangente en 0), $1 + u \leq e^u$ pour tout réel

u , donc $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \leq e^{n \cdot \frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n}} \leq e$. Comme $\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^n = (\sqrt{2})^n$, on obtient :

$$\forall n \geq 2, \quad I_n \geq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{e} = \frac{1}{e} \cdot \frac{e^{n \ln \sqrt{2}}}{n^2}$$

Comme $\ln \sqrt{2} > 0$, les croissances comparées donnent $\frac{e^{n \ln \sqrt{2}}}{n^2} \rightarrow +\infty$, donc par comparaison $I_n \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Minoration sur un intervalle fixe.

Pour tout $n \geq 1$, avec le même raisonnement sur l'intervalle fixe $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} \right]$:

$$I_n \geq \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n x} \geq \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{8}} \right)^n$$

Or $0 < \cos \frac{\pi}{8} < 1$, donc $\frac{1}{\cos(\pi/8)} > 1$ et la suite géométrique tend vers $+\infty$: $I_n \rightarrow +\infty$.

Comparaison : la méthode 2 suffit pour établir la divergence ; la méthode 1, imposée par l'énoncé, fournit une minoration explicite de l'ordre de $\frac{(\sqrt{2})^n}{n^2}$, bien plus précise que la minoration géométrique de raison $\frac{1}{\cos(\pi/8)} \approx 1,08$.

Conclusion

pour tout $n \geq 2$, les deux inégalités sont vraies, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Question 2.3.6.

Méthode 1 — Intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $\frac{1}{\cos^{n+2} x} = \frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ et on pose, sur I , $u(x) = (\cos x)^{-n}$ et $v(x) = \tan x$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur I , avec $u'(x) = n \sin x (\cos x)^{-n-1}$ (y compris pour $n = 0$, où $u' = 0$) et $v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Par intégration par parties sur le segment I :

$$I_{n+2} = \left[\frac{\tan x}{\cos^n x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = (\sqrt{2})^n - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x} dx$$

car $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{1}{\cos^n(\pi/4)} = (\sqrt{2})^n$ et $\tan 0 = 0$. Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et la linéarité :

$$I_{n+2} = (\sqrt{2})^n - n I_{n+2} + n I_n$$

d'où $(n+1)I_{n+2} = (\sqrt{2})^n + nI_n$.

Méthode 2 — Dérivation d'une primitive bien choisie.

Soit $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x}$, de classe C^1 sur I . On calcule :

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\cos^{n+1} x} + \frac{(n+1) \sin^2 x}{\cos^{n+2} x} = \frac{1}{\cos^n x} + (n+1) \left(\frac{1}{\cos^{n+2} x} - \frac{1}{\cos^n x} \right) = \frac{n+1}{\cos^{n+2} x}$$

$$- \frac{n}{\cos^n x}$$

En intégrant sur I : $g(\frac{\pi}{4}) - g(0) = (n+1)I_{n+2} - nI_n$. Or $g(0) = 0$ et

$$g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})^{n+1} = (\sqrt{2})^n.$$

Comparaison : la méthode 1 est l'approche standard pour les relations de récurrence entre intégrales ; la méthode 2, plus rapide une fois la fonction g trouvée, demande de deviner cette primitive (elle s'obtient précisément à partir du crochet de l'intégration par parties).

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}I_n \text{ (on retrouve } I_2 = 1 \text{ pour } n = 0).$$

3. PROBLEME.

Notation : on note $\binom{a}{b}$ le coefficient binomial (noté C_a^b dans l'énoncé original) et $P(\cdot)$ la probabilité, pour éviter toute confusion avec le paramètre p .

Modélisation de la partie 3.1. Posons $N = n + m - 1$. On modélise les choix successifs par des variables $C_1, \dots, C_N$ mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{A, B\}$, avec $P(C_j = A) = p$ et $P(C_j = B) = q$; la j -ième boule est mise dans l'urne C_j , et l'on s'arrête dès qu'une urne est pleine. L'expérience s'arrête au plus tard après N étapes : après N boules, si A contient au plus $n - 1$ boules, B en contient au moins $N - (n - 1) = m$. Seuls les N premiers choix sont donc utiles.

Lemme (utilisé plusieurs fois). Pour des entiers $a, b \geq 0$ avec $a + b \leq N$, le nombre de A parmi $C_1, \dots, C_{a+b}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(a + b, p)$, car c'est une somme de $a + b$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Donc :

$$P(\text{exactement } a \text{ choix } A \text{ parmi les } a + b \text{ premiers}) = \binom{a+b}{a} p^a q^b$$

3.1.1. Préliminaires.

Question 3.1.1.1.

$$a_1 = \frac{\sqrt{1} \binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq 1$, $a_n > 0$ et :

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

Conclusion

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}.$$

Question 3.1.1.2.

Les deux membres étant positifs, il suffit de prouver $a_n^2 \leq \frac{n}{2n+1}$. On raisonne par récurrence.

Initialisation : $a_1^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$.

Hérédité : supposons $a_n^2 \leq \frac{n}{2n+1}$. Avec la question 1 :

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 \cdot \frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} \leq \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} = \frac{2n+1}{4(n+1)}$$

Or $\frac{2n+1}{4(n+1)} \leq \frac{n+1}{2n+3}$ équivaut (dénominateurs positifs) à $(2n+1)(2n+3) \leq 4(n+1)^2$,
soit $4n^2 + 8n + 3 \leq 4n^2 + 8n + 4$, qui est vrai. Donc $a_{n+1}^2 \leq \frac{n+1}{2(n+1)+1}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$

Question 3.1.1.3.

Monotonie : $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n = (2\sqrt{n(n+1)})^2$, et ces quantités sont positives, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Comme $a_n > 0$, la suite (a_n) est strictement croissante.

Majoration : $\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, donc $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour tout $n \geq 1$.

La suite est croissante et majorée : par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel l . Par passage à la limite dans les inégalités larges $a_1 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Conclusion

(a_n) est strictement croissante et converge vers $l \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. On utilise ensuite le résultat admis par l'énoncé : $l = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (environ 0,564, valeur compatible avec l'encadrement).

3.1.2. Etude de cas particuliers.

Ici $m = n$, $p = q = \frac{1}{2}$, et $N = 2n - 1$.

Question 3.1.2.1.

On décrit les suites de choix qui mènent à chaque valeur ; chaque suite de j choix donnés a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^j$ par indépendance.

Loi de R_1 : dès la première boule, l'urne choisie (de capacité 1) est pleine et l'autre est vide. Donc $R_1 = 0$ de façon certaine : $P(R_1 = 0) = 1$.

Loi de R_2 : si les deux premiers choix sont égaux (AA ou BB), l'expérience s'arrête avec $R_2 = 0$; s'ils sont différents, les urnes contiennent chacune une boule et la troisième boule remplit l'une d'elles, l'autre en contenant 1. Donc :

$$P(R_2 = 0) = P(AA) + P(BB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(R_2 = 1) = P(AB) + P(BA) = \frac{1}{2}$$

Loi de R_3 : R_3 prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

- $[R_3 = 0]$: les trois premiers choix sont AAA ou BBB , donc $P(R_3 = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- $[R_3 = 1]$: l'expérience s'arrête à la quatrième boule, avec A pleine et B contenant 1 boule, ou l'inverse. Pour A : les trois premiers choix comportent exactement deux A et un B (3 suites possibles), puis le quatrième choix est A ; probabilité $3 \cdot \frac{1}{16}$. Par symétrie, de même pour B . Donc $P(R_3 = 1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
- $[R_3 = 2]$: les quatre premiers choix comportent deux A et deux B ($\binom{4}{2} = 6$ suites), et la cinquième boule remplit nécessairement l'une des urnes, l'autre contenant 2 boules. Donc $P(R_3 = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

On vérifie : $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1$.

Conclusion

k	0	1	2
$P(R_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$P(R_3 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

et R_1 est la variable certaine égale à 0.

Question 3.1.2.2.

Les variables sont finies, donc espérances et variances existent. On utilise la formule de Koenig-Huygens $V(R) = E(R^2) - E(R)^2$.

$$R_1 : E(R_1) = 0 \text{ et } V(R_1) = 0.$$

$$R_2 : E(R_2) = \frac{1}{2}, \quad E(R_2^2) = \frac{1}{2}, \text{ donc } V(R_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ (} R_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2} \text{)}.$$

$$R_3 : E(R_3) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \text{ et } E(R_3^2) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}, \text{ donc}$$

$$V(R_3) = \frac{15}{8} - \frac{81}{64} = \frac{120 - 81}{64} = \frac{39}{64}$$

Conclusion

$$E(R_1) = 0, V(R_1) = 0; \quad E(R_2) = \frac{1}{2}, \quad V(R_2) = \frac{1}{4}; \quad E(R_3) = \frac{9}{8}, \quad V(R_3) = \frac{39}{64}.$$

Question 3.1.2.3.

À l'issue de l'expérience, l'urne qui n'est pas pleine contient au plus $n - 1$ boules, donc $R_n(\Omega) \subset \{0, \dots, n - 1\}$. Réciproquement, pour $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, la suite de choix formée de $n - 1$ fois A , puis k fois B , puis A a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} > 0$ et conduit à $R_n = k$.

Conclusion

$$R_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Question 3.1.2.4.a.

Soit $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ et G_k l'événement étudié. On a $n - 1 + k \leq 2n - 2 < N$. Si les $n - 1 + k$ premiers choix comportent exactement $n - 1$ fois A et k fois B , aucune urne n'est pleine avant ou à l'issue de l'étape $n - 1 + k$ (les contenus augmentent et restent au plus $n - 1$), donc l'expérience se poursuit et les urnes contiennent bien $n - 1$ et k boules. Réciproquement, G_k impose exactement cette répartition des choix. D'après le lemme :

$$P(G_k) = \binom{n-1+k}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\binom{n-1+k}{k}}{2^{n-1+k}}$$

Conclusion

la probabilité cherchée vaut $\frac{1}{2^{n-1+k}} \binom{n-1+k}{k}$.

Question 3.1.2.4.b.

Notons G'_k l'événement « à l'issue du $(n-1+k)$ -ième tirage, B contient $n-1$ boules et A en contient k » ; par symétrie des rôles ($p = q$), $P(G'_k) = P(G_k)$.

L'événement $[R_n = k]$ est la réunion de deux événements disjoints :

- « A se remplit en dernier avec k boules dans B » $= G_k \cap [C_{n+k} = A]$: en effet, si A est remplie à l'étape où l'expérience s'arrête avec k boules dans B , cette étape est la $(n+k)$ -ième et, juste avant, les urnes contenaient $n-1$ et k boules ; la réciproque est claire.
- « B se remplit avec k boules dans A » $= G'_k \cap [C_{n+k} = B]$.

Ces deux événements sont disjoints car le choix C_{n+k} diffère. L'événement G_k ne dépend que de $C_1, \dots, C_{n-1+k}$, donc il est indépendant de C_{n+k} (et $n+k \leq N$). Ainsi :

$$P([R_n = k]) = \frac{1}{2}P(G_k) + \frac{1}{2}P(G'_k) = P(G_k)$$

Remarque : pour $k = n-1$, $G_{n-1} = G'_{n-1}$ (les deux urnes contiennent $n-1$ boules) et la formule reste valable, car

$$P(G_{n-1} \cap [C_{2n-1} = A]) + P(G_{n-1} \cap [C_{2n-1} = B]) = P(G_{n-1}).$$

Conclusion

pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$P([R_n = k]) = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n-1+k}{k}$$

On retrouve les lois de R_2 et R_3 obtenues à la question 1.

Question 3.1.2.5.

Soit $k \in \{0, \dots, n-2\}$. On a

$$\binom{n+k}{k+1} = \frac{(n+k)!}{(k+1)!(n-1)!} = \frac{n+k}{k+1} \cdot \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{n+k}{k+1} \binom{n-1+k}{k}$$

donc, avec la question 4.b :

$$\begin{aligned} 2(k+1)P([R_n = k+1]) &= 2(k+1) \cdot \frac{n+k}{k+1} \cdot \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n-1+k}{k} \\ &= (n+k) \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n-1+k}{k} = (n+k)P([R_n = k]) \end{aligned}$$

Conclusion

la relation est vérifiée pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

Question 3.1.2.6.

Notons $\pi_k = P([R_n = k])$. On somme la relation de la question 5 pour k de 0 à $n-2$.

Membre de gauche, avec $j = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)\pi_{k+1} = 2 \sum_{j=1}^{n-1} j\pi_j = 2E(R_n)$$

Membre de droite, en ajoutant et retranchant le terme $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)\pi_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\pi_k - (2n-1)\pi_{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k + \sum_{k=0}^{n-1} k\pi_k - (2n-1)\pi_{n-1} = n \\ &+ E(R_n) - (2n-1)\pi_{n-1} \end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k = 1.$$

On obtient $2E(R_n) = n + E(R_n) - (2n-1)\pi_{n-1}$.

Conclusion

$$E(R_n) = n - (2n-1)P([R_n = n-1]).$$

Question 3.1.2.7.

D'après les questions 4.b et 6 :

$$n - E(R_n) = (2n-1) \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} = (2n-1) \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{4^{n-1}}$$

Comme $n \geq 2$, on peut faire intervenir $a_{n-1} = \frac{\sqrt{n-1}}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1}$:

$$n - E(R_n) = \frac{2n-1}{\sqrt{n-1}} a_{n-1}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $a_{n-1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \neq 0$, donc $a_{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; $2n-1 \sim 2n$ et $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$
(car $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$). Les équivalents sont compatibles avec produits et quotients :

$$n - E(R_n) \sim \frac{2n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Conclusion

$$n - E(R_n) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Question 3.1.2.8.

On multiplie la relation de la question 5 par $(k+1)$ et on somme pour k de 0 à $n-2$:

$$\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)^2 \pi_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)(k+1) \pi_k$$

Membre de gauche :

$$2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \pi_j = 2E(R_n^2).$$

Membre de droite : $(n+k)(k+1) = k^2 + (n+1)k + n$, et le terme $k = n-1$ vaut $(2n-1)n \pi_{n-1}$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n+k)(k+1) \pi_k = E(R_n^2) + (n+1)E(R_n) + n - n(2n-1) \pi_{n-1}$$

D'après la question 6, $(2n-1) \pi_{n-1} = n - E(R_n)$, donc $n(2n-1) \pi_{n-1} = n^2 - nE(R_n)$. Il vient :

$$2E(R_n^2) = E(R_n^2) + (n+1)E(R_n) + n - n^2 + nE(R_n)$$

Conclusion

$$E(R_n^2) = (2n + 1)E(R_n) - n(n - 1).$$

(Vérification : pour $n = 3$, $7 \cdot \frac{9}{8} - 6 = \frac{15}{8}$, conforme à la question 2.)

Question 3.1.2.9.

Par la formule de Koenig-Huygens et la question 8 :

$$V(R_n) = E(R_n^2) - E(R_n)^2 = (2n + 1)E(R_n) - n(n - 1) - E(R_n)^2$$

Conclusion

$$V(R_n) = (2n + 1)E(R_n) - E(R_n)^2 - n(n - 1). \text{ (Pour } n = 3 : \frac{63}{8} - \frac{81}{64} - 6 = \frac{39}{64}.)$$

Question 3.1.2.10.

Code adapté en Python (l'énoncé original demandait un algorithme en Pascal).

Méthode 1 — Calcul de la loi par la relation de récurrence de la question 5.

On part de $P([R_n = 0]) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et l'on utilise

$$P([R_n = k + 1]) = \frac{n + k}{2(k + 1)} P([R_n = k]), \text{ en accumulant } k P([R_n = k]).$$

Python

```
def esperance(n):
    p = 1 / 2**(n - 1)      # p contient P(R_n = k), initialement pour k = 0
    E = 0
    for k in range(n):      # k = 0, 1, ..., n-1
        E = E + k * p
        p = p * (n + k) / (2 * (k + 1))  # passage a P(R_n = k+1)
```

return E

La variable p contient $P([R_n = k])$ au début du tour d'indice k ; la boucle parcourt $k = 0, \dots, n-1$ (la borne de range est exclue); la dernière mise à jour de p , au tour $k = n-1$, n'est plus utilisée. La fonction renvoie

$$\sum_{k=0}^{n-1} kP([R_n = k]) = E(R_n).$$

Méthode 2 — Formule de la question 6.

On a

$$P([R_n = n-1]) = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{4^{n-1}} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j-1}{2j}.$$

En effet, en notant

$$c_r = \frac{\binom{2r}{r}}{4^r},$$

on a $c_0 = 1$ et, d'après le calcul de la question 3.1.1.1, $\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{2(2r+1)}{4(r+1)} = \frac{2r+1}{2(r+1)}.$

Python

```
def esperance2(n):
    c = 1
    for j in range(1, n): # j = 1, ..., n-1
        c = c * (2*j - 1) / (2*j)
    return n - (2*n - 1) * c # formule E(R_n) = n - (2n-1) P(R_n = n-1)
```

Comparaison : la méthode 1 n'utilise que la loi de R_n ; la méthode 2 exploite la formule théorique et évite le calcul de 2^{n-1} , qui produit des flottants nuls (dépassement de capacité vers 0) pour n supérieur à environ 1075.

Ces deux codes ont été exécutés : ils renvoient 0,5 pour $n = 2$ et 1,125 pour $n = 3$, conformément à la question 2, ainsi que 6,4760... pour $n = 10$. Pour $n = 1000$, ils donnent $n - E(R_n) \approx 35,678$, à comparer avec $2\sqrt{1000/\pi} \approx 35,682$: observation numérique compatible avec l'équivalent de la question 7, qui ne remplace pas sa démonstration.

Conclusion

la fonction `esperance(n)` ci-dessus renvoie $E(R_n)$.

3.1.3. Retour au cas général.

Les démonstrations de cette partie n'utilisent pas l'hypothèse $n \geq 2$: elles sont valables pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$, ce qui servira dans la partie 3.2.

Question 3.1.3.1.

On décompose l'univers selon l'urne remplie en dernier et le contenu de l'autre urne.

Pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$, notons $F_A(k)$ l'événement «l'expérience s'arrête parce que A est pleine, B contenant alors k boules». Comme à la question 3.1.2.4, $F_A(k)$ est réalisé si et seulement si les $n-1+k$ premiers choix comportent exactement $n-1$ fois A (et k fois B) et $C_{n+k} = A$: en effet, avec $k \leq m-1$, aucune urne n'est pleine avant l'étape $n+k$. Par le lemme et l'indépendance de C_{n+k} avec $C_1, \dots, C_{n-1+k}$ (et $n+k \leq N$) :

$$P(F_A(k)) = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1} q^k \cdot p = p^n q^k \binom{n-1+k}{n-1}$$

De même, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'événement $F_B(k)$ «l'expérience s'arrête parce que B est pleine, A contenant k boules» a pour probabilité :

$$P(F_B(k)) = q^m p^k \binom{m-1+k}{m-1}$$

Ces événements sont deux à deux incompatibles (l'urne remplie à la dernière étape ou le contenu de l'autre urne différent). Leur réunion est Ω : l'expérience s'arrête toujours (au plus tard à l'étape N), une seule urne est pleine à l'arrêt (celle qui reçoit la dernière boule), et l'autre contient un nombre de boules strictement inférieur à sa capacité. Ils forment donc un système complet d'événements et la somme de leurs probabilités vaut 1.

Conclusion

$$q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k \binom{n-1+k}{n-1} = 1,$$

ce qui est la relation (1).

Question 3.1.3.2.a.

Ici n est fixé et m varie dans $\mathbb{N}^*$. Pour $m \geq 1$:

$$u_{m+1} - u_m = q^m \binom{n-1+m}{n-1} > 0$$

donc (u_m) est strictement croissante.

La relation (1), valable pour tout $m \geq 1$, donne

$$p^n u_m = 1 - q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} \leq 1,$$

la somme retranchée étant positive. Comme $p^n > 0$:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad u_m \leq \frac{1}{p^n}$$

Conclusion

(u_m) est croissante et majorée par $\frac{1}{p^n}$; par le théorème de la limite monotone, elle converge.

Question 3.1.3.2.b.

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ fixé. Pour $k=0$, $\binom{m-1}{m-1} = 1$. Pour $k \geq 1$:

$$\binom{m-1+k}{m-1} = \binom{m-1+k}{k} = \frac{(m-1+k)!}{k!(m-1)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (m+j)$$

Pour chaque j fixé, $m+j \sim m$ quand $m \rightarrow +\infty$. Le produit d'un nombre fixé (k) d'équivalents donne un équivalent du produit.

Conclusion

pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{m-1+k}{m-1} \sim \frac{m^k}{k!}$ quand $m \rightarrow +\infty$ (formule valable aussi pour $k=0$).

Question 3.1.3.2.c.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, d'après la question b :

$$q^m p^k \binom{m-1+k}{m-1} \sim \frac{p^k}{k!} m^k q^m$$

Or $q \in]0, 1[$, donc $m^k q^m = m^k e^{m \ln q} \rightarrow 0$ par croissances comparées ($\ln q < 0$). Une suite équivalente à une suite de limite nulle tend vers 0. La somme comporte un nombre fixé n de termes (indépendant de m), donc elle tend vers 0 par somme de limites.

Conclusion

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} = 0.$$

Question 3.1.3.2.d.

D'après la relation (1) :

$$u_m = \frac{1}{p^n} \left(1 - q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k \binom{m-1+k}{m-1} \right).$$

Avec la question c, le membre de droite tend vers $\frac{1}{p^n}$.

Conclusion

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{k \geq 0} q^k \binom{n-1+k}{n-1}$$

converge et a pour somme $\frac{1}{p^n}$, pour tout $n \geq 1$ et tout $q = 1 - p \in]0, 1[$.

3.2. Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Modélisation : on admet, comme il est d'usage, l'existence d'une suite $(C_j)_{j \geq 1}$ de variables mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{A, B\}$, avec $P(C_j = A) = p$; la j -ième boule est mise dans l'urne C_j et l'expérience s'arrête lors du n -ième choix de A . Le lemme du début du problème reste valable pour tous $a, b \geq 0$.

Question 3.2.1.

Si l'expérience s'arrête, T_n est un entier naturel. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de choix formée de k fois B puis n fois A a pour probabilité $q^k p^n > 0$ et donne $T_n = k$.

L'événement « l'urne A n'est jamais remplie » est négligeable (cela découle de la question 3, qui montre que

$$\sum_k P([T_n = k]) = 1$$

); sur cet événement, on attribue à T_n une valeur entière arbitraire, ce qui ne modifie pas sa loi.

Conclusion

$$T_n(\Omega) = \mathbb{N}.$$

Question 3.2.2.

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'événement $[T_n = k]$ (hors événement négligeable) signifie que la n -ième boule de A est mise à l'étape $n + k$, c'est-à-dire : parmi les $n - 1 + k$ premiers choix, exactement $n - 1$ sont égaux à A , et $C_{n+k} = A$. Par le lemme et l'indépendance :

$$P([T_n = k]) = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1} q^k \cdot p$$

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, P([T_n = k]) = \binom{n-1+k}{k} p^n q^k.$$

Question 3.2.3.

La série

$$\sum P([T_n = k])$$

est à termes positifs. Pour tout $K \in \mathbb{N}$, avec la suite (u_m) de la partie 3.1.3 (mêmes n et q) :

$$\sum_{k=0}^K P([T_n = k]) = p^n \sum_{k=0}^K q^k \binom{n-1+k}{n-1} = p^n u_{K+1}$$

D'après la question 3.1.3.2.d (valable pour tout $n \geq 1$), $u_{K+1} \rightarrow \frac{1}{p^n}$ quand $K \rightarrow +\infty$.

La série converge donc, de somme $p^n \cdot \frac{1}{p^n} = 1$.

Conclusion

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([T_n = k]) = 1.$$

En particulier, l'urne A est presque sûrement remplie : l'expérience s'arrête presque sûrement.

Question 3.2.4.

Notons τ_j l'étape à laquelle la j -ième boule est mise dans A (pour $j \geq 1$), et $\tau_0 = 0$. Alors $Z_j = \tau_j - \tau_{j-1} - 1$.

Loi. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour $t \in \mathbb{N}$, l'événement $[\tau_{j-1} = t]$ ne dépend que de $C_1, \dots, C_t$, et :

$$[Z_j = k] \cap [\tau_{j-1} = t] = [\tau_{j-1} = t] \cap [C_{t+1} = B] \cap \dots \cap [C_{t+k} = B] \cap [C_{t+k+1} = A]$$

Par indépendance mutuelle des choix (lemme des coalitions) :

$$P([Z_j = k] \cap [\tau_{j-1} = t]) = P([\tau_{j-1} = t]) q^k p$$

Les événements $[\tau_{j-1} = t]$, $t \in \mathbb{N}$, sont deux à deux incompatibles et de probabilités de somme 1 : c'est évident pour $j = 1$ ($\tau_0 = 0$) ; pour $j \geq 2$, $[\tau_{j-1} = t]$ est l'événement « avec une urne A de capacité $j - 1$, l'expérience s'arrête à l'étape t », c'est-à-dire $[T_{j-1} = t - (j - 1)]$ pour $t \geq j - 1$, et la question 3 appliquée à $j - 1$ donne une somme

égale à 1. Ils forment donc un système quasi-complet d'événements, et la formule des probabilités totales donne :

$$P([Z_j = k]) = \sum_{t=0}^{+\infty} P([\tau_{j-1} = t]) q^k p = q^k p$$

Ainsi $Z_j(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P([Z_j = k]) = pq^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $Y_j = Z_j + 1$ vérifie $P([Y_j = i]) = pq^{i-1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$: Y_j suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Espérance et variance. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ admet une espérance $\frac{1}{p}$ et une variance $\frac{q}{p^2}$. Par linéarité et invariance de la variance par translation :

$$E(Z_j) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}, \quad V(Z_j) = V(Y_j) = \frac{q}{p^2}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } j, Z_j + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \quad E(Z_j) = \frac{q}{p} \text{ et } V(Z_j) = \frac{q}{p^2}.$$

Question 3.2.5.

L'expérience s'arrête dès que la n -ième boule est mise dans A . Chaque boule mise dans B l'est donc avant la n -ième boule de A , soit avant la première boule de A (comptée par Z_1), soit entre la $(j-1)$ -ième et la j -ième boule de A pour un unique $j \in \{2, \dots, n\}$ (comptée par Z_j).

Conclusion

$$T_n = \sum_{j=1}^n Z_j$$

(presque sûrement).

Question 3.2.6.

Méthode 1 — Somme de variables indépendantes.

Espérance : chaque Z_j admet une espérance, donc par linéarité

$$E(T_n) = \sum_{j=1}^n E(Z_j) = \frac{nq}{p}.$$

Indépendance : pour tous $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, l'événement $[Z_1 = k_1] \cap \dots \cap [Z_n = k_n]$ signifie que les premiers choix sont exactement k_1 fois B , puis A , puis k_2 fois B , puis A , ..., puis k_n fois B , puis A . Par indépendance des choix :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n [Z_j = k_j]\right) = q^{k_1 + \dots + k_n} p^n = \prod_{j=1}^n (pq^{k_j}) = \prod_{j=1}^n P([Z_j = k_j])$$

Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ sont donc mutuellement indépendantes, et en particulier deux à deux indépendantes : leurs covariances sont nulles. Chaque Z_j admet une variance, donc T_n aussi, et :

$$V(T_n) = \sum_{j=1}^n V(Z_j) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \frac{nq}{p^2}$$

Méthode 2 — Calcul direct à partir de la loi de T_n .

Pour $k \geq 1$: $k \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(k-1)!(n-1)!} = n \binom{n+(k-1)}{n}$. Donc, pour $K \geq 1$, avec la suite u associée à l'entier $n+1$:

$$\sum_{k=0}^K k P([T_n = k]) = np^n q \sum_{i=0}^{K-1} q^i \binom{(n+1)-1+i}{(n+1)-1} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} np^n q \cdot \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{nq}{p}$$

d'après la question 3.1.3.2.d appliquée à $n + 1$. La série, à termes positifs, converge : T_n admet une espérance et $E(T_n) = \frac{nq}{p}$.

Pour $k \geq 2$:

$$k(k-1) \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(k-2)!(n-1)!} = n(n+1) \binom{(n+2)-1+(k-2)}{(n+2)-1}.$$

De même, avec la question 3.1.3.2.d appliquée à $n + 2$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P([T_n = k]) = n(n+1)p^n q^2 \cdot \frac{1}{p^{n+2}} = \frac{n(n+1)q^2}{p^2}$$

Par le théorème de transfert, $E(T_n(T_n - 1))$ existe et vaut cette somme. Comme $T_n^2 = T_n(T_n - 1) + T_n$, $E(T_n^2)$ existe par linéarité, et :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= E(T_n(T_n - 1)) + E(T_n) - E(T_n)^2 = \frac{n(n+1)q^2}{p^2} + \frac{nq}{p} - \frac{n^2 q^2}{p^2} = \frac{nq^2 + npq}{p^2} \\ &= \frac{nq(q+p)}{p^2} = \frac{nq}{p^2} \end{aligned}$$

Comparaison : la méthode 1, suggérée par l'énoncé, ramène le problème à des lois géométriques connues ; elle nécessite de justifier l'indépendance des Z_j . La méthode 2 ne demande que la loi de T_n , mais exige des manipulations de coefficients binomiaux et réutilise le résultat de convergence de la partie 3.1.3 pour $n + 1$ et $n + 2$.

Conclusion

$$E(T_n) = \frac{nq}{p} \text{ et } V(T_n) = \frac{nq}{p^2}.$$

Relevé des adaptations

- Ensemble du sujet : la notation C_a^b est remplacée par $\binom{a}{b}$, et la probabilité notée $p(\cdot)$ dans l'énoncé original (questions 3.1.2.4.b, 3.1.2.5, 3.1.2.6, 3.2.2) est notée $P(\cdot)$, pour éviter la confusion avec le paramètre p et suivre les notations actuelles.
- Question 2.3.5 : l'inégalité est énoncée pour $n \geq 2$ au lieu de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, la borne $\frac{\pi}{4} - 1$ est négative, l'intervalle sort de I et la première inégalité est fausse ($\int_{\pi/4-1}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} \approx 1,098 > I_1 \approx 0,881$). La conclusion sur la limite est inchangée.
- Question 3.1.2.10 : Code adapté en Python. L'algorithme demandé en langage Pascal est remplacé par une fonction Python `esperance(n)` prenant l'entier n en argument, le Pascal étant hors programme.